УДК 517.51

©2018 р. О.В. Сафонова

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ПРО ТОЧКОВО РОЗРИВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В РЕГУЛЯРНИХ ПРОСТОРАХ

Досліджуються зв'язки між точковою розривністю та різними типами квазінеперервності для відображень зі значеннями в регулярних просторах. Зокрема, встановлено, що квазінеперервність та деякі її аналоги рівносильні у випадку точково розривних відображень.

Ключові слова: точкова розривність, квазінеперервність, сильна квазінеперервність, псевдоквазінеперервність, проста неперервність, ледь неперервність, майже квазінеперервність.

The relationships between pointwise discontinuity and various types of quasicontinuity to mappings with values in regular spaces are researched. In particular, it is shown that the quasicontinuity and some of its analogues are equivalent in the case of pointwise discontinuous mappings.

Keywords: pointwise discontinuity, quasicontinuity, strong quasicontinuity, pseudoquasicontinuity, simple continuity, somewhat continuity, almost quasicontinuity.

1. Вступ. При дослідженні різноманітних властивостей функцій та відображень завжди привабливою залишається неперервність. Це спонукало до введення значної кількості різних ослаблень неперервності та подальшого їх вивчення. Властивості аналогів неперервності розглядалися багатьма математиками. За останні десятиліття у цьому напрямі глибокі результати були отримані у працях В.К. Маслюченка та його учнів, зокрема, у дослідженнях В.В. Нестеренка [1 - 5].

У цій роботі розглядаються точково розривні відображення, які діють з довільного топологічного простору в регулярний простір. Основною метою досліджень є встановлення зв'язків між точковою розривністю та різновидами квазінеперервності.

2. Основні поняття. Нехай X та Y – топологічні простори, $f : X \longrightarrow Y$– відображення, $C(f)$ – множина точок неперервності і $D(f)$ – множина точок розривності відображення f. Як звичайно, позначимо n-вимірний евклідів простір через R^n. Через $\overline{A}$, $IntA$ і FrA позначимо відповідно замикання, внутрішність та межу довільної множини $A \subseteq X$. Множину A топологічного простору X називатимемо просто відкритою, якщо вона є об'єднанням відкритої і ніде не щільної множин [5, 7].

Надалі потрібні такі означення. Відображення f називається:

- квазінеперервним у точці $x \in X$ [5], якщо для будь-яких околів V точки $f(x)$ в Y і U точки x в X існує відкрита непорожня множина G в X така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$;
- сильно квазінеперервним [6], якщо $f(U) \subseteq \overline{f(U \cap C(f))}$ для довільної відкритої непорожньої множини U в X;
- псевдоквазінеперервним [5], якщо для довільної відкритої множини U в X та довільної множини E в X такої, що $U \subseteq \overline{E}$ існує відкрита непорожня множина G в X така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq \overline{f(E)}$;
- просто неперервним [5, 7], якщо прообраз кожної відкритої множини є просто відкритою множиною ;
- ледь неперервним у точці $x \in X$ [5, 8], якщо для довільного околу V точки $f(x)$ в Y існує відкрита непорожня множина G в X така, що $f(G) \subseteq V$;
- майже квазінеперервним у точці $x \in X$ [5, 9], якщо для будь-яких околів V і U точок $f(x)$ і x відповідно в Y та X існує множина A в X така, що $Int\overline{A} \neq \varnothing$, $A \subseteq U$ і $f(A) \subseteq V$;

- майже ледь неперервним у точці $x \in X$ [5], якщо $Int\overline{f^{-1}(V)} \neq \varnothing$ для кожного околу V точки $f(x)$ в Y.

Відображення $f : X \to Y$ є квазінеперервним, ледь неперервним, майже квазінеперервним чи майже ледь неперервним, якщо воно є таким у кожній точці $x \in X$.

Будуть потрібні наступні відомі характерізації ледь неперервності [5, с. 104] та квазінеперервності [2]. Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y :

(1) ледь неперервне тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної всюди щільної множини A в X;

(2) квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли для кожної відкритої непорожньої множини U в X та щільної в U множини E маємо, що $f(U) \subseteq \overline{f(E)}$.

3. Точкова розривність та різновиди квазінеперервності. В.К. Маслюченко увів цікаву різновидність квазінеперервності – поняття сильної квазінеперервності [6]. В [6] також показано, що сильна квазінеперервність рівносильна одночасній квазінеперервності та точковій розривності. Виявляється, що якщо в топологічному просторі X задано точково розривне відображення f зі значеннями в регулярному просторі Y і образ $f(M)$ деякої підмножини точок $M \subseteq X$, в яких відображення f майже ледь неперервне, є всюди щільним в множині усіх точок образа $f(X)$, то це відображення майже ледь неперервне у кожній точці $x \in X$ і, більш того, воно ледь неперервне. Однак, за вище названих умов навіть додаткова вимога всюди щільності в X множини точок Q, $Q \neq X$, в яких відображення f є майже квазінеперервним, не забезпечує квазінеперервності f у кожній точці простору X. На це вказує приклад, наданий автору В.В. Нестеренком. Цей приклад, як приклад 1, буде наведений пізніше. Якщо ж точково розривне відображення f зі значеннями в регулярному просторі Y є майже квазінеперервним у кожній точці $x \in X$, то воно буде квазінеперервним та, згідно з [6], сильно квазінеперервним.

Отже, мають місце такі твердження.

Теорема 1. Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір і $f : X \to Y$ – відображення, для якого виконуються умови:

1) f точково розривне;

2) існує всюди щільна в образі $f(X)$ множина $B \subseteq f(X)$, така, що $Int\overline{f^{-1}(V)} \neq \varnothing$ для кожного околу V будь-якої точки $y \in B$ в Y.

Тоді відображення f ледь неперервне.

Доведення. Покажемо спочатку, що образ $f(C(f))$ множини $C(f)$ точок неперервності відображення f щільний в множині $f(X)$. Припустимо, що це не так. Тоді для замикання образа $f(C(f))$ в просторі Y виконується $f(X) \setminus \overline{f(C(f))} \neq \varnothing$. Оскільки Y – регулярний простір, то за припущенням існують точка $y_0 \in f(X) \setminus \overline{f(C(f))}$ та відкрита в Y множина V_0, такі, що $y_0 \in V_0$ і $\overline{V_0} \cap \overline{f(C(f))} = \varnothing$. З того, що $f(X) \subseteq \overline{B}$, випливає, що для будь-якої точки $y \in f(X)$ і кожного її околу V в Y виконується $B \cap V \neq \varnothing$. Отже, існує точка $y_1 \in V_0$ така, що $y_1 \in B$ і тому $Int\overline{f^{-1}(V_0)} \neq \varnothing$. Звідси та з всюди щільності в просторі X множини точок неперервності $C(f)$ маємо, що $C(f) \cap Int\overline{f^{-1}(V_0)} \neq \varnothing$, внаслідок чого існують точка $x_0 \in C(f)$ та її відкритий в X окіл $U_0 \subseteq Int\overline{f^{-1}(V_0)}$, такі, що $f(U_0) \subseteq f(X) \setminus \overline{V_0}$. Тоді з одного боку, $f(U_0) \subseteq f(X) \setminus V_0$, а з іншого боку, оскільки множина $f^{-1}(V_0)$ щільна в $Int\overline{f^{-1}(V_0)}$, то $U_0 \cap f^{-1}(V_0) \neq \varnothing$. Одержали суперечність.

Взявши до уваги включення $f(X) \subseteq \overline{f(C(f))}$, тепер переконаємось в тому, що для довільної всюди щільної в просторі X множини A виконується $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$. Тоді, згідно з вище наведеною характерізацією ледь неперервності (1), теорема буде доведеною. Припустимо, що для деякої всюди щільної множини A_1 в X її образ $f(A_1)$ не є щільним в множині $f(X)$. Тоді знайдеться в просторі Y відкрита множина W_1, така, що $W_1 \cap f(X) \neq \varnothing$ і $W_1 \cap f(A_1) = \varnothing$. Враховуючи щільність множини $f(C(f))$ в образі $f(X)$, маємо, що $W_1 \cap f(C(f)) \neq \varnothing$. Отже, існують точка $x_1 \in f^{-1}(W_1) \cap C(f)$

та її відкритий окіл U_1 в X такі, що $f(U_1) \subseteq W_1$. Оскільки $U_1 \cap A_1 \neq \varnothing$, то $f(U_1 \cap A_1) \subseteq f(U_1) \cap f(A_1) \neq \varnothing$, всупереч тому, що $f(U_1) \subseteq f(X) \setminus f(A_1)$.

Теорема доведена.

Зрозуміло, що довільне ледь неперервне відображення є майже ледь неперервним, але не навпаки. З теореми 1 випливає, що якщо точково розривне відображення f зі значеннями в регулярному просторі Y є майже ледь неперервним, то воно і ледь неперервне. Враховуючи ці факти, маємо наступне твердження.

Теорема 2. Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір. Тоді точково розривне відображення $f : X \to Y$ ледь неперервне тоді і тільки тоді, коли воно є майже ледь неперервним.

Беручи до уваги, що кожне майже квазінеперервне відображення є майже ледь неперервним, з теореми 1 одержуємо і таке твердження.

Теорема 3. Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір і $f : X \to Y$ – точково розривне відображення. Якщо існує підмножина $M \subseteq X$, в кожній точці якої відображення f є майже квазінеперервним, така, що її образ $f(M)$ щільний в множині $f(X)$, то f – ледь неперервне відображення.

Наступний приклад показує, що за умов теореми 1 відображення f не зобов'язане бути квазінеперервним і, навіть, майже квазінеперервним у кожній точці простору X.

Приклад 1. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ визначається так:

$$f(x) = \begin{cases} x, x \neq 0, \\ 1, x = 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що для f виконуються всі умови теореми 1. Ця функція точково розривна і майже ледь неперервна (більш того, вона є розривною лише в одній точці $x = 0$ і неперервною в усіх інших точках простору $\mathbb{R}$). Однак, в точці $x = 0$ функція f не є майже квазінеперервною і, отже, не є квазінеперервною, бо для околу $U = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ цієї точки і для прообраза $f^{-1}(V)$ околу $V = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ точки $f(0)$ маємо, що $U \cap f^{-1}(V) = \{0\}$(одноточкова множина $U \cap f^{-1}(V)$ ніде не щільна в околі U).

Якщо замість умови 2) в теоремі 1 для відображення f вимагати майже квазінеперервність у кожній точці простору X , то f буде квазінеперервним. Отже, вірне таке твердження.

Теорема 4. Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір, $f : X \to Y$ – точково розривне і майже квазінеперервне відображення. Тоді відображення f квазінеперервне.

Доведення. Переконаємось в тому, що для кожної відкритої непорожньої множини U в X та щільної в U множини E маємо, що $f(U) \subseteq \overline{f(E)}$. Тоді за вище наведеною характерізацією квазінеперервності (2) відображення f буде квазінеперервним у кожній точці $x \in X$.

Для цього покажемо, що звуження $g = f|_U$ відображення f на кожну відкриту непорожню множину $U \subseteq X$ є майже квазінеперервним відображенням. Оскільки будь-який окіл довільної точки топологічного простору містить відкритий окіл цієї точки, то обмежимось розглядом лише відкритих околів. Нехай $U \subseteq X$ – довільна відкрита непорожня підмножина, $x \in U$ – довільна точка множини U, V – довільний відкритий окіл точки $f(x)$ в просторі Y. Візьмемо будь-яку відкриту множину $G \subseteq X$, таку, що $x \in G \subseteq U$. Тому G – відкритий окіл точки x як в X, так і в U. Розглянемо звуження $g = f|_U$ відображення f на множину U. Оскільки відображення f майже квазінеперервне у точці $x \in U \subseteq X$, то існує множина A в X, така, що $Int\overline{A} \neq \varnothing$, $A \subseteq G$ і $f(A) \subseteq V$. Тоді для відображення g маємо, що $\varnothing \neq G \cap Int\overline{A} \subseteq U$, $g(x) = f(x) \in V$ і $g(A) = f(A) \subseteq V$. Внаслідок довільності вибору точки $x \in U$, звідси випливає, що відображення g майже квазінеперервне.

Нехай знову $\varnothing \neq U \subseteq X$ – довільна відкрита множина і E – щільна множина в U. За умовою Y – регулярний простір. Тоді образ $f(U) \subseteq Y$ також є регулярним простором. Оскільки множина $C(f)$ всюди щільна в X, то вона щільна і в множині U. З попереднього випливає, що звуження $g = f|_U$ відображення f на множину U є майже квазінеперервним відображенням. Отже, будучи точково розривним, відображення g задовольняє усі умови теореми 3 і тому воно ледь неперервне. Тоді, згідно з вище наведеною характерізацією ледь неперервності (1), маємо, що $A = U \cap E$ і $f(U) = g(U) \subseteq \overline{g(A)} = \overline{f(A)} \subseteq \overline{f(E)}$.

Теорема 4 доведена.

З доведення теореми 4 безпосередньо випливає наступне твердження.

Теорема 5. Якщо виконуються умови теореми 4, то f – сильно квазінеперервне відображення.

Розглянемо точково розривне відображення $f : X \to Y$ зі значеннями в регулярному просторі Y, таке, що звуження $g = f|_U$ відображення f на кожну відкриту непорожню підмножину $U \subseteq X$ є майже ледь неперервним відображенням. Нехай $\varnothing \neq U$ – довільна відкрита множина в просторі X. Зрозуміло, що її образ $f(U)$ – регулярний простір. При цьому множина $C(f)$ точок неперервності відображення f щільна в множині U. Так само, як і в теоремі 4, візьмемо звуження $g = f|_U$ відображення f на відкриту множину U. Оскільки g – точково розривне і майже ледь неперервне відображення зі значеннями в регулярному просторі $g(U)$, де $g(U) = f(U)$, то за теоремою 2 відображення g є ледь неперервним. Тоді, згідно з наведеними характерізаціями ледь неперервності (1) та квазінеперервності (2), звідси маємо, що f-квазінеперервне відображення.

З іншого боку, відомо [10, p.134], що якщо відображення f є квазінеперервним, то його звуження $g = f|_U$ на кожну відкриту непорожню підмножину $U \subseteq X$ є також квазінеперервним і, отже, майже ледь неперервним відображенням. З цього і попереднього випливає таке твердження, яке є доповненням до теорем 2 і 4.

Теорема 6. Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір і $f : X \to Y$ – точково розривне відображення. Тоді f є квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли звуження $g = f|_U$ відображення f на кожну відкриту непорожню підмножину $U \subseteq X$ є майже ледь неперервним.

Теорема 6 залишається справедливою для довільних топологічних просторів X, Y і довільного відображення f, якщо в твердженні цієї теореми замінити майже ледь неперервність звуження g відображення f на ледь неперервність. Це безпосередньо випливає з характерізацій ледь неперервності (1) та квазінеперервності (2) і результату (Theorem 3), отриманого в [10, p.134].

Очевидно, що кожне квазінеперервне відображення є майже квазінеперервним. Враховуючи, що сильна квазінеперервність рівносильна одночасній квазінеперервності та точковій розривності [6], згідно з теоремою 4, маємо ще одне твердження.

Теорема 7. Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір. Тоді для точково розривного відображення $f : X \to Y$ наступні умови рівносильні:

а) f сильно квазінеперервне;

б) f квазінеперервне;

в) f майже квазінеперервне.

Що стосується псевдоквазінеперервності, то вона не рівносильна квазінеперервності навіть за умови точкової розривності відображень в евклідових просторах. На це вказує такий приклад [5, c.115].

Приклад 2. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка визначається так:

$$f(x) = \{^{1, x=0,}_{0, x\neq 0}$$

псевдоквазінеперервна і, очевидно, точково розривна, але вона не є квазінеперервною. Отже, ця функція, будучи точково розривною і псевдоквазінеперервною, не задовольняє жодної з рівносильних умов, наведених в теоремі 7.

4. Точкова розривність та псевдоквазінеперервність. Відомо [5, c.58], що для псевдоквазінеперервного відображення f зі значеннями в топологічному просторі Y, який задовольняє другу аксіому зліченності, множина $D(f)$ точок розриву є першої категорії. Звідси відразу випливає для берівського простору X точкова розривність відображення $f : X \to Y$ як тільки воно є псевдоквазінеперервним. Приклад, наведений в [5, с.117], показує, що обернене твердження не вірне. Отже, не кожне точково розривне відображення є псевдоквазінеперервним. У наступному твердженні встановлюються умови, за яких точково розривне відображення є псевдоквазінеперервним.

Теорема 8. Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір і точково розривне відображення $f : X \to Y$ задовольняє наступну умову:

($*$) якщо підмножина $N \subseteq Y$, $N \neq f(X)$ ніде не щільна в Y, то її прообраз $f^{-1}(N)$ ніде не щільний в X.

Тоді відображення f псевдоквазінеперервне.

Доведення. Оскільки псевдоквазінеперервність рівносильна простій неперервності [5, с.118], то досить переконатися в тому, що прообраз кожної відкритої в Y множини є просто відкритою множиною, тобто є об'єднанням відкритої і ніде не щільної множин в X.

Нехай відображення f не є псевдоквазінеперервним і, отже, воно не є просто неперервним. Тоді існує відкрита непорожня множина V в Y така, що множина $Fr(f^{-1}(V))$ щільна в деякій відкритій непорожній множині U в X. Внаслідок замкненості будь-якої межі, маємо, що $U \subseteq Fr(f^{-1}(V)) = \overline{f^{-1}(V)} \cap \overline{X \setminus f^{-1}(V)}$, або, що те саме, $U \subseteq \overline{f^{-1}(V)}$ і $U \subseteq \overline{X \setminus f^{-1}(V)}$. Множина $FrV = \overline{V} \setminus V$ ніде не щільна в Y. Тому за умовою ($*$) її прообраз $f^{-1}(FrV)$ ніде не щільний в X. Оскільки множина $C(f)$ точок неперервності відображення f всюди щільна в X і, отже, щільна в U, то існує точка $x_0 \in (U \setminus f^{-1}(FrV)) \cap C(f) \neq \varnothing$. Можливі два випадки: або $f(x_0) \in V$, або $f(x_0) \in f(X) \setminus \overline{V}$.

Припустимо спочатку, що $f(x_0) \in f(X) \setminus \overline{V}$. Оскільки Y – регулярний простір і $x_0 \in C(f)$, то існують відкриті множини V_1 в Y та U_1 в X такі, що $f(x_0) \in V_1, \overline{V_1} \cap \overline{V} = \varnothing$ і $x_0 \in U_1 \subseteq U, f(U_1) \subseteq V_1$. Тоді з того, що $U \subseteq \overline{f^{-1}(V)}$ випливає, що $U_1 \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$. Отже, $f(U_1) \cap V \neq \varnothing$. Отримали суперечність з тим, що $f(U_1) \subseteq f(X) \setminus \overline{V}$.

Нехай тепер $f(x_0) \in V$. Оскільки x_0 – точка неперервності відображення f, то існує відкрита в X множина $U_0 \subseteq U$ така, що $x_0 \in U_0$ і $f(U_0) \subseteq V$. Внаслідок того, що $U \subseteq \overline{X \setminus f^{-1}(V)}$ випливає, що множина $X \setminus f^{-1}(V)$ щільна в U_0. Тоді з одного боку $f(U_0) \cap (f(X) \setminus V) \neq \varnothing$, а з іншого боку $f(U_0) \subseteq V$. Знову одержали суперечність. Таким чином, припущення хибне. Теорема 8 доведена.

Умови теореми 8 не можна послабити, відмовившись від вимоги ($*$). На це вказує приклад, який згадувався раніше і наведений в [5, с.117]. Ось він.

Приклад 3. Нехай $\mathbb{Q}$ – множина раціональних точок. Функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ визначимо так:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

.

Побудована функція відома як функція Рімана. Функція f не є псевдоквазінеперервною, однак вона точково розривна і не задовольняє умову ($*$) теореми 8, бо множина $N = \{0\}$ ніде не щільна в $\mathbb{R}$, а її прообраз $f^{-1}(N) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – всюди щільна множина ірраціональних точок.

Якщо для відображення f виконується $f(X) \setminus \overline{Intf(X)} = \varnothing$, то в умові ($*$) теореми 8 можна вимагати ніде не щільність підмножини N лише в самому образі $f(X)$. Отже, справедливе таке твердження.

Теорема 9. Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір і $f : X \to Y$ – точково розривне відображення, що задовольняє такі умови:

1) $f(X) \subseteq \overline{Intf(X)}$;

2) прообраз $f^{-1}(N)$ довільної ніде не щільної в образі $f(X)$ множини N ніде не щільний в X.

Тоді f – псевдоквазінеперервне відображення.

Доведення. Відомо [11, с.77], що якщо множина M ніде не щільна в Y, то перетин $M \cap \overline{Intf(X)}$ ніде не щільний в множині $\overline{Intf(X)}$. Враховуючи умову 1) маємо, що $Intf(X) \subseteq f(X) \subseteq \overline{Intf(X)}$. Звідси випливає, що $\overline{Intf(X)} \subseteq \overline{f(X)} \subseteq \overline{\overline{Intf(X)}} = \overline{Intf(X)}$, тобто $\overline{f(X)} = \overline{Intf(X)}$. Оскільки перетин $M \cap \overline{f(X)}$ ніде не щільний в замиканні образа $\overline{f(X)}$, то множина $M \cap f(X)$ ніде не щільна в образі $f(X)$ [11, с.77]. Тому кожна множина $N \subseteq f(X)$, яка ніде не щільна в Y, буде ніде не щільною і в образі $f(X)$. Отже, якщо підмножина $N \subseteq f(X)$ ніде не щільна в просторі Y, то за умовою 2) її прообраз $f^{-1}(N)$ є ніде не щільною множиною в просторі X. Тоді, згідно з теоремою 8, відображення f псевдоквазінеперервне.

Якщо при відображенні f для кожної множини $A \subseteq X$, $IntA \neq \varnothing$ маємо $Intf(A) \neq \varnothing$, то умову $(*)$ теореми 8 можна послабити, замінивши її на умову 2) теореми 9. Тоді, беручи до уваги теореми 8 і 9, приходимо до такого твердження.

Теорема 10. Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір і $f : X \to Y$ – точково розривне відображення, для якого виконуються умови:

1) якщо $A \subseteq X$ і $IntA \neq \varnothing$, то $Intf(A) \neq \varnothing$;

2) прообраз $f^{-1}(N)$ довільної ніде не щільної в $f(X)$ множини N ніде не щільний в X.

Тоді відображення f псевдоквазінеперервне.

Доведення. Переконаємось спочатку в тому, що $f(C(f)) \subseteq \overline{Intf(X)}$. Припустимо, що це не так. Тоді $f(C(f)) \cap (f(X) \setminus \overline{Intf(X)}) \neq \varnothing$. Отже, існують точка $y_0 \in f(C(f))$ і, внаслідок регулярності простору Y, відкритий в Y її окіл V_0 такий, що $\overline{V_0} \cap \overline{Intf(X)} = \varnothing$. Нехай $x_0 \in f^{-1}(y_0) \cap C(f)$. Тоді існує відкритий в X окіл U_0 точки x_0 такий, що $f(U_0) \subseteq V_0$. Звідси, згідно з умовою 1) маємо, що $Int(V_0 \cap f(X)) \neq \varnothing$. А це неможливо, тому що $V_0 \cap f(X) \subseteq f(X) \setminus \overline{Intf(X)}$. Отже, припущення не вірне.

Візьмемо замикання $\overline{Intf(X)}$ внутрішності образа $f(X)$. З доведення теореми 9 випливає, що кожна множина $N \subseteq f(X) \cap \overline{Intf(X)}$, яка ніде не щільна в Y, ніде не щільна і в $f(X)$. Зокрема перетин $f(X) \cap Fr(Intf(X))$, будучи ніде не щільною множиною в Y, ніде не щільний в $f(X)$. Тому за умовою 2) множина $f^{-1}(f(X) \cap Fr(Intf(X)))$ ніде не щільна в X.

Розглянемо тепер доповнення $f(X) \setminus \overline{Intf(X)}$ замикання внутрішності образа $f(X)$. Його прообраз $f^{-1}(f(X) \setminus \overline{Intf(X)})$ є ніде не щільною множиною в X. Якщо це не так, то існує відкрита непорожня множина G_1 в X, така, що множина $f^{-1}(f(X) \setminus \overline{Intf(X)})$ щільна в G_1. Оскільки множина точок неперервності $C(f)$ щільна в $X \supseteq G_1$, то існують точка $x_1 \in C(f) \setminus f^{-1}(f(X) \cap Fr(Intf(X)))$ і відкрита в X множина $U_1 \subseteq G_1$, такі, що $x_1 \in U_1$ і $f(U_1) \subseteq \overline{Intf(X)}$, всупереч тому, що $f(U_1) \cap (f(X) \setminus \overline{Intf(X)}) \neq \varnothing$.

Нехай $N \subseteq f(X)$ – довільна підмножина. Образ $f(X)$ можна записати у вигляді об'єднання двох множин $f(X) \setminus \overline{Intf(X)}$ і $f(X) \cap \overline{Intf(X)}$. Тоді $N = (N \cap (f(X) \setminus \overline{Intf(X)})) \cup (N \cap \overline{Intf(X)})$ і $f^{-1}(N)$ є об'єднанням двох прообразів $f^{-1}(N \cap (f(X) \setminus \overline{Intf(X)}))$ та $f^{-1}(N \cap \overline{Intf(X)})$. Згідно з доведеним $f^{-1}(f(X) \setminus \overline{Intf(X)})$ – ніде не щільна множина в X. Тому множина $f^{-1}(N \cap (f(X) \setminus \overline{Intf(X)}))$ теж ніде не щільна в X. Якщо $N \subseteq f(X)$ – ніде не щільна множина в Y, то підмножина $N \cap \overline{Intf(X)} \subseteq f(X) \cap \overline{Intf(X)}$ ніде не щільна в образі $f(X)$ і, отже, її прообраз $f^{-1}(N \cap \overline{Intf(X)})$ ніде не щільний в X. Звідси випливає, що прообраз $f^{-1}(N)$ ніде не щільної в Y множини $N \subseteq f(X)$ є ніде не щільною множиною в X. Оскільки при цьому відображення f точково розривне, то воно задовольняє усі умови теореми 8. Тому f – псевдоквазінеперервне відображення. Теорема доведена.

Умови в теоремах 8, 9 та 10 є істотними. Жодну з цих умов не можна відкинути. На це вказує ще один приклад , який наведений в [12, с.34].

Приклад 4. Нехай, як і в прикладі 3, $\mathbb{Q}$ – множина раціональних точок. Функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ визначимо так:

$$f(x) = \begin{cases} x, x \in \mathbb{Q}, \\ -x, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ця функція бієктивна і множина її значень – весь простір $\mathbb{R}$. Очевидно, що звуження $g_1 = f|_{\mathbb{Q}}$ і $g_2 = f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ функції f відповідно на множини $\mathbb{Q}$ та $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є гомеоморфізмами. Нехай N – довільна ніде не щільна множина в образі $f(\mathbb{R})$. Зрозуміло, що кожна з множин $N \cap f(\mathbb{Q})$ і $N \cap f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ ніде не щільна відповідно в множині $f(\mathbb{Q})$ та в множині $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Тому їх прообрази $f^{-1}(N \cap f(\mathbb{Q})) = g_1^{-1}(N)$ та $f^{-1}(N \cap f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = g_2^{-1}(N)$ ніде не щільні як в множині $\mathbb{Q}$, так і в множині $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, а, отже, ніде не щільні в просторі $\mathbb{R}$. Тоді множина $f^{-1}(N) = f^{-1}(N \cap f(\mathbb{Q})) \cup f^{-1}(N \cap f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$ ніде не щільна в $\mathbb{R}$. Отже, умова $(*)$ теореми 8 виконується. Однак, функція f не є точково розривною (вона неперервна лише в одній точці $x = 0$ і розривна в усіх інших точках простору $\mathbb{R}$) і не є псевдоквазінеперервною (для будь-якого відкритого інтервала I в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ виконується $f(I \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{f(I \cap \mathbb{Q})}$).

Цей приклад демонструє, що з умови $(*)$ теореми 8 не випливає точкова розривність і псевдоквазінеперервність відображення.

Автор вдячна Маслюченку Володимиру Кириловичу і Нестеренку Василю Володимировичу за цінні зауваження та поради, які допомогли підготувати цю статтю.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Маслюченко, В.К., Нестеренко, В.В.* (1996). Горизонтальна квазінеперервність та її застосування. *УкрІНТЕІ, №98 — Ук.96*.

2. *Маслюченко, В.К.* (1999). Нарізно неперервні відображення і простори Кете. (Докторська дисертація). Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна.

3. *Нестеренко, В.В.* (1999). Різні типи квазінеперервності та їх застосування. (Кандидатська дисертація). Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна.

4. *Михайлюк, В.В.* (2008). Координатний метод і теорія нарізно неперевних відображень. (Докторська дисертація). Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна.

5. *Нестеренко, В.В.* (2016). Аналоги неперервності: зв'язки між нарізними і сукупними властивостями та теореми про декомпозицію. (Докторська дисертація). Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна.

6. *Маслюченко, В.К., Михайлюк, В.В., Собчук, О.В.* (1995). Дослідження про нарізно неперервні відображення. Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. Чернівці, Рута. (С.192-246).

7. *Biswas, N.* (1969). On some mappings in topological spaces. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 61, 127-135.

8. *Frolik, Z.* (1961). Remarks concerning the invariance of Baire spaces under mappings Czechoslovak Mathematical Journal, 11, 381-385.

9. *Borsík, J., Doboš, J.* (1991). On decompositions of quasicontinuity. Real Analysis Exchange, 16, 292-305.

10. *Noiri, T.* (1973). On semi-continuous mappings. Atti della Accademia nazionale dei Lincei. Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, Serie 8, 54, 132-136.

11. *Куратовский, К.* (1966). Топология, (Том 1). Москва: Мир.

12. *Гелбаум, Б., Олмстед, Дж.* (1967). Контрпримеры в анализе. Москва: Мир.