

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

ПРО НАБЛИЖЕННЯ В СЕРЕДНЬОМУ ФУНКЦІЙ КЛАСУ ГЕЛЬДЕРА ЇХ УЗАГАЛЬНЕНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

Отримано повні асимптотичні розклади точних верхніх меж відхилень узагальненого інтеграла Пуассона від функцій класу Гельдера в інтегральній метриці.

Ключові слова: наближення, клас Гельдера, узагальнений інтеграл Пуассона, асимптотичні розклади, константи Колмогорова-Нікольського.

We obtain complete asymptotic expansion of the exact upper bounds of a generalized Poisson integral of deviations from the Hölder class functions in the integral metric.

Keywords: approximation, Hölder class, generalized Poisson integral, asymptotic expansions, Kolmogorov-Nikolsky constants.

Нехай C — простір 2π -періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|;$$

L — простір 2π -періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається рівністю

$$\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt.$$

Множину функцій $f \in L$, які задовольняють умову

$$\|f(x+t) - f(x)\|_1 \leq |t|,$$

будемо позначати через H_1^1 , а множину функцій $f \in C$, для яких виконується умова

$$\|f(x+t) - f(x)\|_C \leq |t|,$$

позначатимемо через H_1 . Класи H_1^1 та H_1 називають класами Гельдера.

Розглянемо крайову задачу (в одиничному крузі) для рівняння

$$\Delta u = 0, \quad (1)$$

де Δ — оператор Лапласа в полярних координатах. Тобто рівняння (1) запишеться у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (0 \leq r < 1, -\pi \leq x \leq \pi). \quad (2)$$

Розв'язок рівняння (2), що задовольняє граничну умову

$$u(r, x)|_{r=1} = f(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (3)$$

де $f(x)$ — сумовна 2π -періодична функція, можемо записати у вигляді

$$A(r, f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt \right\} dt, \quad 0 \leq r < 1. \quad (4)$$

Функцію (4) прийнято називати інтегралом Абеля-Пуассона функції f (див., напр., [1, 2]), а величину

$$K_1(r, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt = \frac{1-r^2}{2(1-2r \cos t + r^2)}$$

називають ядром Абеля-Пуассона.

Розглянемо тепер крайову задачу (в одиничному крузі) для рівняння

$$\Delta(\Delta u) = 0. \quad (5)$$

Розв'язок рівняння (5), що задовольняє граничні умови

$$u(r, x)|_{r=1} = f(x), \quad \frac{\partial u(r, x)}{\partial r} |_{r=1} = 0,$$

$$-\pi \leq x \leq \pi,$$

можемо записати у вигляді

$$B(r, f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{k}{2}(1-r^2) \right] r^k \cos kt \right\} dt, \quad 0 \leq r < 1. \quad (6)$$

Функцію (6) прийнято називати бігармонічним інтегралом Пуассона функції f (див., напр., [3, 4]), а величину

$$K_2(r, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{k}{2}(1-r^2) \right] r^k \cos kt = \frac{(1-r^2)^2(1-r \cos t)}{2(1-2r \cos t + r^2)^2}$$

— бігармонічним ядром Пуассона.

В роботі будемо розглядати деяке узагальнення інтеграла Абеля-Пуассона і бігармонічного інтеграла Пуассона, а саме інтеграл виду

$$P_{s,q}(r, f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K(r, t) dt, \quad (7)$$

який прийнято називати узагальненим інтегралом Пуассона [5], де

$$K(r, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [1 + sk(1+r)(1-r)^q] r^k \cos kt \quad (8)$$

— ядро узагальненого інтеграла Пуассона і

$$0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \quad q \geq 1, \quad 0 \leq r < 1, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Відмітимо, що у випадку $s = 0$ з (7) отримуємо інтеграл Абеля-Пуассона $A(r)$, а у випадку $s = \frac{1}{2}, q = 1$, з (7) отримуємо бігармонічний інтеграл Пуассона $B(r)$.

Позначимо

$$\mathcal{E}(H^1; P_{s,q}(r))_C := \sup_{f \in H^1} \|P_{s,q}(r, f, \cdot) - f(\cdot)\|_C, \quad (9)$$

$$\mathcal{E}(H^1; P_{s,q}(r))_1 := \sup_{f \in H^1} \|P_{s,q}(r, f, \cdot) - f(\cdot)\|_1. \quad (10)$$

Означення 1. [6, с.198] *Задачу про відшукання асимптотичних рівностей для величин (9) і (10), згідно з О.І. Степанцем, називатимемо задачею Колмогорова-Нікольського для узагальненого інтеграла Пуассона $P_{s,q}(r)$ відповідно на класах H^1 і H^1_1 в рівномірній та інтегральній метриках.*

Означення 2. [7] *Формальний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(r)$ називається повним асимптотичним розкладом або повною асимптотикою функції $f(r)$ при $r \rightarrow 1-$, якщо для всіх $n \in N$*

$$|g_{n+1}(r)| = o(|g_n(r)|)$$

і при будь-якому $m \in N$

$$f(r) = \sum_{n=0}^m g_n(r) + o(g_m(r)), \quad r \rightarrow 1-.$$

Коротко будемо записувати цей факт наступним чином

$$f(r) \cong \sum_{n=0}^{\infty} g_n(r).$$

Апроксимативні властивості інтегралів Абеля-Пуассона та бігармонічних інтегралів Пуассона на класах Гельдера достатньо добре вивчені.

Перші результати, пов'язані з дослідженням величин $\mathcal{E}(H^1; A(r))_C$ були отримані І.П. Натансоном [8]. Зокрема, ним була розв'язана задача Колмогорова-Нікольського на класах H^1 для інтеграла Абеля-Пуассона, а саме встановлена асимптотична рівність при $r \rightarrow 1-$

$$\mathcal{E}(H^1; A(r))_C = \frac{2}{\pi}(1-r)|\ln(1-r)| + O(1-r).$$

О.П. Тіман [9] отримав точні значення апроксимативних характеристик $\mathcal{E}(H^1; A(r))_C$:

$$\mathcal{E}(H^1; A(r))_C = \frac{2}{\pi}(1-r) \ln \frac{1}{1-r} + \varepsilon_r, \quad 0 < r < 1,$$

$$\varepsilon_r = \frac{2}{\pi} \int_0^{1-r} \left\{ \frac{1}{1-t} \ln \frac{2-t}{t^2} + 1 \right\} dt.$$

В роботі Е. Л. Штарка [10] був знайдений повний асимптотичний розклад для верхньої межі відхилення функції з класу H^1 від інтегралів Пуассона виду

$$\mathcal{E}(H^1; A(r))_C \cong \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (1-r)^k \ln \frac{1}{1-r} + \gamma_k (1-r)^k \right\}, r \rightarrow 1-,$$

$$\gamma_k = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} + \ln 2 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2^{-i}}{i} \right).$$

В.А.Баскаков [1] записав аналогічний асимптотичний розклад, але за степенями $\frac{1}{\delta}$ ($\delta = -\frac{1}{\ln r}$) при $\delta \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H^1; A(\delta))_C &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} \ln \delta + \\ &+ \frac{1}{\delta} \left[\frac{2 \ln \pi}{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^2} dt \right] + \\ &+ \frac{2}{\pi \delta} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{\pi}}{t^{2(k+1)}} dt - \frac{1}{2k\pi^{2k}} \right] \frac{1}{\delta^{2k}}. \end{aligned}$$

Апроксимативні властивості інтегралів Пуассона на інших функціональних класах вивчались у роботах [11–12].

Що ж стосується питання апроксимативних властивостей бігармонічних інтегралів Пуассона, то тут потрібно відмітити, що С. Канієв [3] знайшов асимптотичну рівність при $r \rightarrow 1-$

$$\mathcal{E}(H^1; B(r))_C = \frac{2}{\pi} (1-r) + \frac{\varepsilon_r}{\pi},$$

$$\varepsilon_r = o(1-r).$$

Пізніше, Р. Русч [13] уточнила результат С.Канієва, знайшовши більш точний порядок залишкового члена:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H^1; B(r))_C &= \frac{2}{\pi} (1-r) + \\ &+ O \left((1-r)^2 \ln \frac{1}{1-r} \right), r \rightarrow 1-. \end{aligned}$$

Л.П.Фалалеев [14] знайшов повний асимптотичний розклад при $r \rightarrow 1-$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H^1; B(r))_C &= \frac{2}{\pi} \left\{ (1-r) + (1-r^2) \ln \frac{1}{1-r} + \right. \\ &+ \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) (1-r)^2 + \\ &+ \left. \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{k} (1-r)^k \ln \frac{1}{1-r} + \nu_k (1-r)^k \right) \right\}. \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \nu_k &= \frac{1}{k} \left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i 2^i} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{(k-2)(k-1)2^{k-2}} - \frac{1}{(k-1)2^{k-1}} \right). \end{aligned}$$

Зазначимо також, що апроксимативні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона на різних функціональних класах вивчались у роботах [15–20].

Головною метою даної роботи є знаходження повного асимптотичного розкладу для величини (10) при $r \rightarrow 1-$, які дозволять виписувати константи Колмогорова-Нікольського довільного порядку малості.

Теорема. При $r \rightarrow 1-$ має місце повний асимптотичний розклад

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H_1^1; P_{s,q}(r))_1 &= \frac{2s}{\pi} (1-r)^q \left(\ln \frac{1}{4} + \right. \\ &+ (1 + \ln 2)(1-r) + (1-r) \ln \frac{1}{1-r} + \\ &+ \ln(1-r)^2 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-r)^k}{k(k-1)2^{k-1}} \left. \right) + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (1-r)^k \ln \frac{1}{1-r} + \gamma_k (1-r)^k \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\gamma_k = \frac{1}{k} \left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2^{-j}}{j} \right)$, $k = 1, 2, \dots$

Доведення. Для доведення теореми покажемо, що матиме місце рівність

$$\mathcal{E}(H_1^1; P_{s,q}(r))_1 = \mathcal{E}(H^1; P_{s,q}(r))_C. \quad (12)$$

Оскільки $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(r, t) dt = 1$, то

$$P_{s,q}(r, f, x) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t+x) - f(x)) K(r,t) dt. \quad (13) \quad \times \int_0^{\pi} t \cos kt dt = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{8} -$$

Звідси, в силу того, що $f \in H^1$, а $K(r,t) > 0, t \in [-\pi, \pi]$, отримуємо

$$\mathcal{E}(H^1; P_{s,q}(r))_C \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| K(r,t) dt. \quad (14)$$

З іншого боку, функція f_1^* , яка є 2π -періодичним продовженням функції $f_1(t) = |t|, t \in [-\pi, \pi]$, належить до множини H^1 і

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H^1; P_{s,q}(r))_C &\geq \|P_{s,q}(r, f_1^*, \cdot) - f_1^*(\cdot)\|_C \geq \\ &\geq |P_{s,q}(r, f_1^*, 0) - f_1^*(0)| = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| K(r,t) dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Об'єднуючи (14) і (15), маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H^1; P_{s,q}(r))_C &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| K(r,t) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t K(r,t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \left(\frac{1}{2} + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} (1 + sk(1+r)(1-r)^q) r^k \cos kt \right) dt.$$

Оскільки функції

$$(1 + sk(1+r)(1-r)^q) r^k \cos kt$$

неперервні при $t \in [0, \pi]$, $0 \leq r < 1$, $k = 1, 2, \dots$, та ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + sk(1+r)(1-r)^q) r^k \cos kt$$

є рівномірно збіжний, то його можна по-членно інтегрувати, тому

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H^1; P_{s,q}(r))_C &= \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi} t dt + \sum_{k=1}^{\infty} (1 + sk(1+r)(1-r)^q) r^k \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + s(2k+1)(1+r)(1-r)^q) r^{2k+1}}{(2k+1)^2} \right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - (1 + s(2k+1)(1+r)(1-r)^q) r^{2k+1}}{(2k+1)^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Отже, зрозуміло, що для встановлення співвідношення (12) достатньо показати, що $\mathcal{E}(H^1_1; P_{s,q}(r))_1$ співпадає з правою частиною (16).

Оскільки функція $(f(x+t) - f(x))K(r,t)$ вимірна на множині $[-\pi; \pi] \times [-\pi; \pi]$ та

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} |(f(x+t) - f(x)) K(r,t)| dt < +\infty,$$

то використовуємо наслідок до теореми Фубіні (див., наприклад, [21, с. 331]) після підстановки правої частини рівності (13) в (10), а також, враховуючи, що для $f \in H^1_1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| dx \leq |t|,$$

при $0 \leq r < 1, -\pi \leq x < \pi$, отримаємо

$$\mathcal{E}(H^1_1; P_{s,q}(r))_1 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t K(r,t) dt =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - (1 + s(2k+1)(1+r)(1-r)^q) r^{2k+1}}{(2k+1)^2}. \quad (17)$$

З іншого боку, згідно леми з роботи [22, с. 63],

$$\mathcal{E}(H^1_1; P_{s,q}(r))_1 \geq$$

$$\geq \sup_{f \in T^1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_{s,q}(r, f, x)| dx \geq$$

$$\geq \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - (1 + s(2k+1)(1+r)(1-r)^q) r^{2k+1}}{(2k+1)^2}, \quad (18)$$

де T^n — клас усіх тригонометричних поліномів g , для яких має місце співвідношення $\int_{-\pi}^{\pi} |g^{(n)}(x)| dx \leq 1$.

Із нерівностей (17) та (18) отримуємо

$$\mathcal{E}(H_1^1; P_{s,q}(r))_1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - (1 + s(2k + 1)(1 + r)(1 - r)^q)r^{2k+1}}{(2k + 1)^2}. \quad (19)$$

Із (16) та (16) слідує справедливість рівності (12).

Враховуючи далі теорему з роботи [5], рівність (12), а також той факт, що клас квазігладких функцій H^2 співпадає з класом H^1 , отримуємо розклад (11). Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Baskakov, V. A.* (1975). Some properties of operators of Abel-Poisson type: *Mathematical Notes*, 17(2), 101-107. DOI: 10.1007/BF01161864
2. *Zhyhallo, K.M., Kharkevych, Yu.I.* (2009). Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals: *Ukr. Math. J.*, 61(1), 86-98. DOI: 10.1007/s11253-009-0196-y
3. *Каниев, С.* (1963). Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений: Доклады АН СССР, 153(5), 995-998.
4. *Kharkevych, Yu.I., Kal'chuk, I.V.* (2007). Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals: *Ukr. Math. J.*, 59(8), 1224-1237. DOI: 10.1007/s11253-007-0082-4
5. *Kharkevych, Yu.I.* (2017). On Approximation of the Quasi-Smooth Functions by Their Poisson Type Integrals: *Journal of Automation and Information Sciences*, 49(10), 74-81. DOI: 10.1615/JAutomatInfSci.en.v49.i10.80
6. *Степанец, А. И.* (2002). Методы теории приближения. Ч. I. Киев: Ин-т математики НАН України.
7. *Жигалло, К. М., Харкевич, Ю. И.* (2002). Повна асимптотика відхилення від класу диференційованих функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона: *Укр. мат. журн.*, 54(1), 43-52.
8. *Натансон, И.П.* (1950). О порядке приближения непрерывной 2π -периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона: Докл. АН СССР, 72(1), 11-14.
9. *Тиман, А.Ф.* (1950). Точная оценка остатка при приближении периодических дифференциру-

емых функций интегралами Пуассона: Докл. АН СССР, 74(1), 17-20.

10. *Stark, E.L.* (1973). The complete asymptotic expansion for the measure of approximation of Abel-Poisson's singular integral for Lip_1 : *Mathematical Notes*, 13(1), 14-18. DOI: 10.1007/BF01093622

11. *Жигалло, К. М., Харкевич, Ю. И.* (2009). Наближення спряжених диференційованих функцій їх інтегралами Абеля-Пуассона: *Укр. мат. журн.*, 61(1), 73-82.

12. *Zhyhallo, T.V., Kharkevych, Yu.I.* (2005). Approximation of (ψ, β) -differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators: *Ukr. Math. J.*, 51(8), 1297-1315. DOI: 10.1007/s11253-005-0262-z

13. *Pych, P.* (1968). On biharmonic function in unit disc: *Ann. pol. math.*, 20(3), 203-213.

14. *Фалалеев, Л.П.* (1976). Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip_1 от одного сингулярного интеграла. Теоремы вложения и их приложения: Материалы всесоюз. симп., Алма-Ата: Наука, 163-167.

15. *Zhyhallo, K.M., Kharkevych, Yu.I.* (2000). On the approximation of function of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals: *Ukr. Math. J.*, 52(7), 1113-1117. DOI: 10.1023/A:1005285818550

16. *Kharkevych, Yu.I., Zhyhallo, T.V.* (2008). Approximation of function from class $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric: *Ukr. Math. J.*, 60(5), 769-798. DOI: 10.1007/s11253-008-0093-9

17. *Харкевич, Ю.И., Кальчук, І.В.* (2007). Асимптотика величин наближення в середньому класів диференційованих функцій за допомогою бігармонійних інтегралів Пуассона на класах диференційованих функцій: *Укр. мат. журн.*, 59(8), 1105-1115.

18. *Жигалло, К.М., Харкевич, Ю.И.* (2009). Наближення спряжених диференційованих функцій бігармонічними інтегралами Пуассона: *Укр. мат. журн.*, 61(3), 333-345.

19. *Жигалло, К.М., Харкевич, Ю.И.* (2011). Наближення функцій із класів $C_{\beta,\infty}^{r\psi}$ бігармонічними інтегралами Пуассона: *Укр. мат. журн.*, 63(7), 939-959.

20. *Kal'chuk, I.V., Kharkevych, Yu.I.* (2017). Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W_{\beta}^r H^{\alpha}$: *Ukr. Math. J.*, 68(11), 1727-1740. DOI: 10.1007/s11253-017-1323-9

21. *Натансон, И.П.* (1950). Основы теории функций дійсної змінної. Київ: "Радянська школа".

22. *Pych, P.* (1967). Approximation of functions in L - and C -metrics: *Ann. Soc. Math. Pol.*, 1(11), 61-76.