УДК 517.51

©2018 р. І. В. Замрій, М. В. Працьовитий

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова,
Державний університет телекомунікацій

ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРІВ, ВИЗНАЧЕНИХ В ТЕРМІНАХ Q_S-ЗОБРАЖЕННЯ ДРОБОВОЇ ЧАСТИНИ ДІЙСНОГО ЧИСЛА

Для заданого Q_s-зображення чисел $x \in [0;1]$, яке є узагальненням класичного трійкового зображення, і визначається параметрами $q_0, q_1, q_2, ...q_{s-1}$ $(q_i > 0,\ \sum\limits_{i=0}^{s-1} q_i = 1)$ та наступною рівністю

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)} \right] \equiv \Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_n(x)...},$$

де $\alpha_k(x) \in A_s \equiv \{0, 1, 2, ..., s-1\}, \beta_0 = 0, \beta_i = \sum\limits_{j=0}^{i-1} q_j$, вивчаються функції

$$\omega_n(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}...}$$

та

$$f_{ni}(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}i\alpha_n\alpha_{n+1}...}, \text{ де } n, i \in N.$$

Доведено, що всі функції є кусково-неперервними та мають скінченну кількість точок розриву першого роду, знайдено їх аналітичний вираз. Розлянуто застосування у метричних задачах.

Ключові слова: Q_s-зображення дробової частини дійсного числа, кусково-неперервна функція, кусково-монотонна функція, оператори лівостороннього та правостороннього зсуву цифр.

Q_s-representation of numbers $x \in [0,1]$ is a generalization of classic ternary representation and is determined by the parameters $q_0, q_1, q_2, ...q_{s-1}$ $(q_i > 0,\ \sum\limits_{i=0}^{s-1} q_i = 1)$ and the following equality

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)} \right] = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_n(x)...},$$

where $\alpha_k(x) \in A_s \equiv \{0, 1, 2, ..., s-1\}, \beta_0 = 0, \beta_i = \sum\limits_{j=0}^{i-1} q_j$. For a given Q_s-representation, we study functions

$$\omega_n(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}...}$$

and

$$f_{ni}(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}i\alpha_n\alpha_{n+1}...}, \text{ where } n, i \in N.$$

We prove that all functions are piecewise continuous and have a finite number of points of discontinuity of the first kind. Their analytic expression is found. The Gauss-Kuzmin problem is also solved.

Keywords: Q_s-representation digits of real number, piecewise continuous, piecewise monotonic, left-shift and right-shift digit operators.

Вступ

На сьогоднішній день існує ряд проблем, пов'язаних з функціями, що мають всюди щільну множину особливостей (сингулярність, недиференційовність, ніде не монотонність і т.д.), однією з яких є проблема ефективних способів їх задання та дослідження. Для цього використовують геометрично-описовий метод, метод згущення особливостей, задання їх за допомогою систем функціональних рівнянь, а в останній час з цією метою широко використовуються різні системи зображення дійсних чисел як зі скінченним [7, 9], так і нескінченним [8, 11] алфавітом, який споріднений з останнім. Однією з таких є Q-зображення дійсних чисел, вперше введене у 1986 році. Воно використовувалось в різних цілях. Ми ж використовуємо Q-зображення чисел для задання та дослідження функцій і тут значною мірою допомагає знання геометрії цього зображення, а саме: геометричного змісту цифр зображення, властивостей циліндричних, напівциліндричних і хвостових множин, метричних відношень породжених цим зображенням тощо.

Нагадаємо основні поняття [7].

Нехай $Q_s = \{q_0, q_1, q_2, ..., q_{s-1}\}$ — впорядкована множина додатних дійсних чисел, таких, що $q_i > 0$, $\sum\limits_{i=0}^{s-1} q_i = 1$; $\beta_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} q_i$.

Відомо, що для будь-якого $x \in [0, 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L_s = A_s \times A_s \times ... \times A_s \times ...$, $\alpha_n \in \{0, 1, 2, ..., s-1\} \equiv A_s$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right] = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}. \quad (1)$$

Розклад числа x у ряд (1) називається його *Q_s-представленням*, а скорочений (формальний) запис

$$x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...} \quad (2)$$

– *Q_s-зображенням.* При цьому α_k називається k-тим Q_s-символом зображення числа x.

Взагалі кажучи, поняття k-ого Q_s-символа числа є некоректно визначеним, оскільки можна довести, що

$$\Delta^{Q_s}_{c_1...c_{m-1}c_m(0)} = \Delta^{Q_s}_{c_1...c_{m-1}[c_m-1](s-1)},$$

де (i)– період в зображенні числа з одного символа (цифри) i. Ті числа, що мають два різні зображення, називаються Q_s-раціональними, а решта – Q_s-ірраціональними.

Означення 1. *Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ – фіксований впорядкований набір чисел з $\{0, 1, 2, ..., s-1\}$. Циліндром рангу k з основою $c_1c_2\ldots c_k$ називається множина $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_k}$ всіх чисел $x \in [0, 1]$, які мають наступне Q_s-зображення*

$$x = \Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_k\alpha_{k+1}...\alpha_{k+m}...}, \ \alpha_{k+i} \in A_s.$$

Циліндр $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_k}$ є відрізком з кінцями $a = \Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_k(0)}$ і $b = \Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_k(s-1)}$, тобто $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_k} = [a; b]$. Його внутрішність позначатимемо через $\nabla^{Q_s}_{c_1c_2...c_k}$ і називатимемо циліндричним інтервалом, тобто $\nabla^{Q_s}_{c_1c_2...c_k} = int\Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_k} = (a, b)$.

Циліндричні множини або циліндри мають наступні властивості:

1)$\Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_k} = \bigcup\limits_{t \in A_s} \Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_kt}$;

2)$[0, 1] = \bigcup\limits_{i_1=0}^{s-1} \bigcup\limits_{i_2=0}^{s-1} \ldots \bigcup\limits_{i_n=0}^{s-1} \Delta^{Q_s}_{i_1i_2...i_n}$;

3)$max\Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_ki} = min\Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_k(i+1)}$;

4)$|\Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_k}| = \prod\limits_{i=1}^{k} q_{c_i} \to 0 \ (k \to \infty)$;

5) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_k} = x \equiv \Delta^{Q_s}_{c_1c_2...c_k...}$ для довільної послідовності (c_k), $c_k \in A_s$.

В ергодичній теорії важливу роль відіграють оператори лівостороннього зсуву цифр зображення дійсного числа (s-кового, ланцюгового і т.д.). Вони використовуються в математиці (фрактальному аналізі та геометрії, теорії функцій та теорії ймовірностей) в різних цілях, зокрема для опису цікавих груп перетворень простору $[0; 1]$.

На сьогоднішній день досліджувались оператори зсуву цифр для $n = 1$ у різних кодуваннях (зображеннях) дійсних чисел зі скінченним та нескінченним [8, 10] алфавітом. Хоча вони широко застосовуються і відіграють важливу роль у теорії динамічних систем, зокрема фігурують у працях

F. Schweiger [3], А. Я. Хінчина [12], Р. О. Нікіфорова і Г. М. Торбіна. Крім того, вони мають застосування й в інших дослідженнях, наприклад, у роботі [4] оператор зсуву ($n = 1$) використовують для побудови базису лінійного простору узагальнених послідовностей Фібоначчі з фіксованими параметрами p та s та знаходження координат довільного вектора в даному базисі, а у роботі [8] для доведення теореми, яка стверджує, що неперервна випадкова величина ξ, 2^{∞}-символи якої є незалежними, має або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярно неперервний розподіл. В роботі [9] вони використовувалися для встановлення функціональних співвідношень.

Ці оператори викликають інтерес ще й тому, що тісно пов'язані з перетвореннями та функціями, що зберігають частоти цифр та множинами, що мають властивість зберігати «хвости» (хвостові множини) у різних зображеннях, зокрема у такому аспекті це висвітлено у роботах Р. Ю. Осауленка [6] та С. О. Климчук [5].

Дана робота присвячена вивченню операторів Q_s-цифр дійсного числа, а саме:

$$\omega_n(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots},$$

$$\delta_{in}(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}i\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots},$$

де $i \in \{0, 1, 2, ..., s-1\}$, $n \in N$.

1. Оператор лівостороннього зсуву цифр

У множині всіх Q_s-зображень дійсних чисел з відрізка $[0; 1]$ розглянемо оператор $\hat{\omega_1}$ зсуву цифр, який послідовності $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ ставить у відповідність (відображає) послідовність $(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots)$.

Після домовленості не використовувати Q_s – зображення дійсних чисел із $[0; 1)$ з періодом $(s-1)$ оператор $\hat{\omega_1}$ породжує функцію, означену рівністю

$$\omega_1(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Оператор $\hat{\omega_1}$ і функцію ω_1 називають *оператором лівостороннього зсуву цифр Q_s – зображення дійсного числа.*

Очевидно, що даний оператор має рівно s інваріантних точок: $\Delta^{Q_s}_{(0)}$, $\Delta^{Q_s}_{(1)}$, $\Delta^{Q_s}_{(2)}$,...,$\Delta^{Q_s}_{(s-1)}$. Він володіє властивістю сюр'єктивності, але не є ін'єктивним, бо прообразом точки, що має зображення $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$ є s точок $\Delta^{Q_s}_{0c_1c_2\ldots c_n\ldots}$, $\Delta^{Q_s}_{1c_1c_2\ldots c_n\ldots}$, $\Delta^{Q_s}_{2c_1c_2\ldots c_n\ldots}$,...,$\Delta^{Q_s}_{[s-1]c_1c_2\ldots c_n\ldots}$.

Теорема 1. *Функція $\omega_1(x)$:*

1) є кусково-лінійною, причому лінійною на циліндричних інтервалах першого рангу:

$$\omega_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{q_0} \text{ при } 0 \le x < q_0, \\ \dfrac{x-q_0}{q_1} \text{ при } q_0 \le x < q_0+q_1, \\ \dfrac{x-q_0-q_1}{q_2} \text{ при } q_0+q_1 \le x < q_0+q_1+q_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{x-(1-q_{s-1})}{q_{s-1}} \text{ при } 1-q_{s-1} \le x < 1; \end{cases}$$

2) в точках $x = q_0$ і $x = q_0 + q_1$,..., $x = 1 - q_{s-1}$ має розриви першого роду зі стрибком 1, причому $\lim\limits_{x\to q_0-0}\omega_1(x) = 1$ і $\lim\limits_{x\to q_0+q_1-0}\omega_1(x) = 1$,..., $\lim\limits_{x\to 1-q_{s-1}-0}\omega_1(x) = 1$.

Доведення. Очевидно, що

$$\omega_1(q_0) = \omega_1(\Delta^{Q_s}_{1(0)}) = \Delta^{Q_s}_{(0)} = 0 = \omega_1(0).$$

Нехай $x \in \Delta^{Q_s}_i$, тобто

$$x = \Delta^{Q_s}_{i\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} =$$

$$= \beta_i + \beta_{\alpha_2}q_i + \beta_{\alpha_3}q_iq_{\alpha_2} + \ldots + \beta_{\alpha_n}q_i\prod_{j=2}^{n-1}q_{\alpha_j} + \ldots =$$

$$= \beta_i + q_i\left(\beta_{\alpha_2} + \beta_{\alpha_3}q_{\alpha_2} + \ldots + \beta_{\alpha_n}\prod_{j=2}^{n-1}q_{\alpha_j} + \ldots\right).$$

Тоді $x = \beta_i + q_i\omega_1(x)$.

Звідки

$$\omega_1(x)=\frac{x-\beta_i}{q_i}=\begin{cases}\frac{x}{q_0}, \text{ якщо } i=0,\\ \frac{x-q_0}{q_1}, \text{ якщо } i=1,\\ \frac{x-q_0-q_1}{q_2}, \text{ якщо } i=2,\\ \dots\dots\dots\dots\\ \frac{x-(1-q_0)}{q_{s-1}}, \text{ якщо } i=s-1.\end{cases}$$

Дослідимо поведінку функції $\omega_1(x)$ в лівому ε-півоколі точки $x=q_0$. Якщо число $x\in(q_0-\varepsilon;q_0)$, то відповідно отримаємо $x=\Delta^{Q_s}_{0\underbrace{[s-1]\dots[s-1]}_{k}\alpha_{k+2}\alpha_{k+3}\dots\alpha_{k+n}\dots}$ і $\omega_1(x)=\Delta^{Q_s}_{\underbrace{[s-1]\dots[s-1]}_{k}\alpha_{k+2}\alpha_{k+3}\dots\alpha_{k+n}\dots}$. Умова $x\to q_0-0$ рівносильна умові $k\to\infty$, тому $\lim\limits_{x\to q_0-0}\omega_1(x)=\Delta^{Q_s}_{[s-1]\,[s-1]\,[s-1]\dots[s-1]\dots}=1$.

Аналогічно доводиться твердження для інший точок.

Після n-кратного застосування оператора зсуву цифр, отримаємо

$$\omega_1^{(n)}(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\dots})=\Delta^{Q_s}_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\dots\alpha_{n+k}\dots}.$$

Оскільки

$$x=\beta_{\alpha_1}+\beta_{\alpha_2}q_{\alpha_1}+\ldots+\beta_{\alpha_n}\prod_{j=1}^{n-1}q_{\alpha_j}+$$

$$+\prod_{j=1}^{n}q_{\alpha_j}\left(\beta_{\alpha_{n+1}}+\beta_{\alpha_{n+2}}q_{\alpha_{n+1}}+\ldots\right)=$$

$$=\beta_{\alpha_1}+\beta_{\alpha_2}q_{\alpha_1}+\ldots+\beta_{\alpha_n}\prod_{j=1}^{n-1}q_{\alpha_j}+\omega_1^{(n)}(x)\prod_{j=1}^{n}q_{\alpha_j}.$$

Отже,

$$\omega_1^{(n)}(x)=\frac{x-\left(\beta_{\alpha_1}+\beta_{\alpha_2}q_{\alpha_1}+\ldots+\beta_{\alpha_n}\prod\limits_{j=1}^{n-1}q_{\alpha_j}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n}q_{\alpha_j}}.$$

2. Оператор ліквідації n-ої цифри Q_s– зображення дійсного числа

У просторі послідовностей L_s розглядається оператор $\hat{\omega_n}$, який послідовності $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots)$ ставить у відповідність (відображає) послідовність $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_{n+1},\ldots)$.

Після домовленості не використовувати Q_s – зображення дійсних чисел із $[0;1)$ з періодом $(s-1)$ оператор $\hat{\omega_n}$ породжує функцію, визначену рівністю

$$\omega_n(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots})=\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\dots}.$$

Оператор $\hat{\omega_n}$ і функцію ω_n називатимемо *оператором ліквідації цифри Q_s – зображення дійсного числа.*

Очевидно, що $\omega_1(x)$ є оператором ліквідації першої Q_s – цифри. Також очевидно, що оператор $\omega_n(x)$ ліквідації цифр має s^n інваріантних точок. Це точки виду: $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\dots c_{n-1}(0)}$, $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\dots c_{n-1}(1)}$, $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\dots c_{n-1}(2)}$,…,$\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\dots c_{n-1}(s-1)}$ де $(c_1,c_2,\ldots,c_{n-1})\in A_s^{n-1}$.

Число x та значення функції $\omega_n(x)$ подамо у вигляді

$$x=A+\beta_{\alpha_n}\prod_{i=1}^{n-1}q_{\alpha_i}+\beta_{\alpha_{n+1}}\prod_{i=1}^{n}q_{\alpha_i}+...,$$

$$\omega_n(x)=A+\beta_{\alpha_{n+1}}\prod_{i=1}^{n-1}q_{\alpha_i}+\beta_{\alpha_{n+2}}q_{\alpha_{n+1}}\prod_{i=1}^{n-1}q_{\alpha_i}+$$

$$+\beta_{\alpha_{n+3}}q_{\alpha_{n+1}}q_{\alpha_{n+2}}\prod_{i=1}^{n-1}q_{\alpha_i}+\ldots,$$

де $A=\beta_{\alpha_1}+\beta_{\alpha_2}q_{\alpha_1}+\ldots+\beta_{\alpha_{n-1}}\prod\limits_{i=1}^{n-2}q_{\alpha_i}$.

Різниця $\omega_n(x)-x$ має вигляд:

$$\begin{aligned}&\omega_n(x)-x=\\&=[-\beta_{\alpha_n}+\beta_{\alpha_{n+1}}(1-q_{\alpha_n})+\\&+\beta_{\alpha_{n+2}}q_{\alpha_{n+1}}(1-q_{\alpha_n})+...]\prod_{j=1}^{n-1}q_{\alpha_i}(x).\end{aligned}$$

Звідки

$$\omega_n(x) = x + (1 - q_{\alpha_n}) \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_i}(x) \times$$

$$\times (\beta_{\alpha_{n+1}} - q_{\alpha_n} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_{n+k}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_{n+j}}) =$$

$$= x + [(1 - q_{\alpha_n})\omega_1^n(x) - \beta_{\alpha_n(x)}] \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j(x)}.$$

Перепишемо число x у вигляді

$$x = A + \beta_{\alpha_n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i} +$$

$$+q_{\alpha_n} \left(\underbrace{\beta_{\alpha_{n+1}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i} + \beta_{\alpha_{n+2}} q_{\alpha_{n+1}} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i} + \ldots}_{B} \right) =$$

$$= A + \beta_{\alpha_n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i} + q_{\alpha_n} B.$$

Останню рівність поділимо на q_{α_n} та додамо до лівої і правої частини число A, отримаємо

$$\frac{x}{q_{\alpha_n}} + A = \frac{A + \beta_{\alpha_n} \prod\limits_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i}}{q_{\alpha_n}} + B + A.$$

Очевидно, що $\omega_n(x) = A + B$. Тому

$$\omega_n(x) = \frac{x - A - \beta_{\alpha_n} \prod\limits_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i}}{q_{\alpha_n}} + A. \qquad (3)$$

Останню рівність можна переписати у вигляді

$$\omega_n(x) = \frac{1}{q_{\alpha_n}} x + b(x),$$

де $b(x) = A - \dfrac{A + \beta_{\alpha_n} \prod\limits_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i}}{q_{\alpha_n}}$.

Розглянемо циліндри n-го рангу і Q_s – раціональні точки, тобто точки виду $x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)} \equiv \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](s-1)} = x^*$, $\alpha_n \neq 0$.

Тоді різниця

$$\omega_n(x^*) - \omega_n(x) =$$

$$= \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}(s-1)} - \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}(0)} = \prod_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i}.$$

Тобто, функція $\omega_n(x)$ має розриви першого роду.

З вище сказаного випливає наступне твердження.

Теорема 2. *Функція $\omega_n(x)$:*

1) є кусково-лінійною на циліндричних інтервалах n-го рангу і

$$\omega_n(x) = \frac{1}{q_{\alpha_n}} x + b(x),$$

де $b(x) = A - \dfrac{A + \beta_{\alpha_n} \prod\limits_{i=1}^{n-1} q_{\alpha_i}}{q_{\alpha_n}}$,

$A = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_{n-1}} \prod\limits_{i=1}^{n-2} q_{\alpha_i}$;

2) має $(s-1)\cdot s^{n-1}$ розривів першого роду в точках $x = \Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}1(0)}$, $x = \Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}2(0)}$, ..., $x = \Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[s-1](0)}$, де $c_i \in A_s$, зі стрибком $\prod\limits_{i=1}^{n-1} q_{c_i}$ на відповідному циліндричному інтервалі.

Лема 1. *Функція φ_{in}, означена на [0;1] рівністю*

$$\varphi_{in}(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}i\alpha_{n+1}\ldots},$$

має вираз

$$\varphi_{in}(x) = x + (\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j})[\beta_i - \beta_{\alpha_n} + \omega_1^n(q_i - q_{\alpha_n})]. \qquad (4)$$

Доведення. Використовуючи вирази

$$\varphi_{in}(x) = A + (\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j})[\beta_i + q_i\omega_1^n],$$

$$x = A + (\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j})[\beta_{\alpha_n} + q_{\alpha_n}\omega_1^n],$$

знайдемо різницю

$$\varphi_{in}(x) - x = (\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j}) \times$$

$$\times [[\beta_i - \beta_{\alpha_n} + \omega_1^n(q_i - q_{\alpha_n})].$$

Звідки й отримуємо (4).

Наслідок 1. *Функція φ_{in} є кусково-лінійною, причому лінійною на кожному з циліндричних відрізків $(n-1)$-го рангу.*

3. Оператор вклеювання цифри Q_s – зображення дійсного числа

Нехай задано: елемент i алфавіту $A_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$ та натуральне число n.

У просторі послідовностей $L^{(s)}$ розглядається оператор $\hat{\delta}_{in}$, який послідовності $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots)$ ставить у відповідність (відображає) послідовність $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, i, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots)$.

Після домовленості не використовувати Q_s – зображення дійсних чисел із $[0; 1)$ з періодом $(s-1)$ оператор $\hat{\delta}_{in}$ породжує функцію

$$\delta_{in}(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}i\alpha_n\alpha_{n+1}\dots}.$$

Оператор $\hat{\delta}_{in}$ і функцію δ_{in} називатимемо *оператором вклеювання цифри Q_s – зображення дійсного числа.*

Очевидно, що δ_{in} має s^{n-1} інваріантних точок і це точки виду: $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\dots c_{n-1}(i)}$. Також очевидно, що мають місце співвідношення

$$\omega_n(\delta_{in}(x)) = x \ \text{ і } \ \delta_{\alpha_n(x)}(\omega_n(x)) = x.$$

Лема 2. *Функція $\delta_{i1}(x)$ має вираз*

$$\delta_{i1}(x) = \beta_i + q_i x,$$

є лінійною і набуває значень з $[\beta_i; \beta_{i+1})$.

Доведення. Дійсно,

$$\delta_{i1}(x) = \beta_i + \beta_{\alpha_1(x)} q_i + \dots + \beta_{\alpha_n(x)} q_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j(x)} + \dots =$$

$$= \beta_i + q_i(\beta_{\alpha_1(x)} + \beta_{\alpha_2(x)} q_{\alpha_1(x)} + \dots) = \beta_i + q_i x.$$

Оскільки x пробігає проміжок $[0; 1)$, то оператор $\delta_{i1}(x)$ набуває значень з $[\beta_i; \beta_{i+1})$.

Наслідок 2. *Оператор $\delta_{i1}(x)$ є стискуючим відображенням з коефіцієнтом q_i.*

Теорема 3. *При $n > 1$ функція $\delta_{in}(x)$:*

1) є кусково-лінійною, причому лінійною на циліндричних інтервалах $(n-1)$-го рангу і

$$\delta_{in}(x) = x + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} -$$

$$-(1-q_i) \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} (\beta_{\alpha_n} + \beta_{\alpha_{n+1}} q_{\alpha_n} + \dots),$$

або

$$\delta_{in}(x) = q_i x + C(1-q_i) + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j},$$

$$\delta_{in}(x) = C + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + q_i \omega^{(n-1)}(x) \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j},$$

де $C = \beta_{\alpha_1} + \dots + \beta_{\alpha_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j}$;

2) має $(s-1) \cdot s^{n-2}$ розривів першого роду в точках виду $x = \Delta^{Q_s}_{c_1c_2\dots c_{n-2}1(0)}$, …, $x = \Delta^{Q_s}_{c_1c_2\dots c_{n-2}[s-1](0)}$, де $c_i \in A_s$, зі стрибком

$$\prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j} \left(\beta_{\alpha_{n-1}} - \beta_{[\alpha_{n-1}-1]} + \beta_i (q_{\alpha_{n-1}} - q_{[\alpha_{n-1}-1]}) - q_{[\alpha_{n-1}-1]} q_i\right)$$

на відповідному циліндричному інтервалі.

Доведення. Знайдемо вираз функції

$$\delta_{in}(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}i\alpha_n\dots} =$$

$$= \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \dots + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} +$$

$$+ \beta_{\alpha_n} q_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + \beta_{\alpha_{n+1}} q_i \prod_{j=1}^{n} q_{\alpha_j} + \dots =$$

$$= \underbrace{\left(\beta_{\alpha_1} + \dots + \beta_{\alpha_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j}\right)}_{C} + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} +$$

$$+ q_i \underbrace{\left(\beta_{\alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + \beta_{\alpha_{n+1}} \prod_{j=1}^{n} q_{\alpha_j} + \dots\right)}_{D} =$$

$$= C + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + q_i D.$$

Очевидно, що $x = C + D$. Тому

$$\delta_{in}(x) = C + D + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + q_i D - D =$$

$$= x + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} - D(1 - q_i).$$

З іншого боку,

$$\delta_{in}(x) = C + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} +$$

$$+ q_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} \left(\beta_{\alpha_n} + \beta_{\alpha_{n+1}} q_{\alpha_n} + \ldots\right) =$$

$$= C + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + q_i \omega^{(n-1)}(x) \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j}.$$

Використовуючи вираз для оператора лівостороннього зсуву цифр $(n-1)$ раз, отримаємо

$$\delta_{in}(x) = C + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} + q_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} \frac{x - C}{\prod\limits_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j}} =$$

$$= q_i x + C(1 - q_i) + \beta_i \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j}.$$

З останнього виразу очевидно, що оператор $\delta_{in}(x)$ при $n > 1$ є кусково-лінійною функцією.

Нехай $\alpha_{n-1} \neq 0$. Розглянемо дві точки $x_1 = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}(0)}$ і $x_2 = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}[\alpha_{n-1}-1](s-1)}$ та їх образи $\delta_{in}(x_1)$ і $\delta_{in}(x_2)$. Тоді

$$\delta_{in}(x_1) - \delta_{in}(x_2) =$$

$$= \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}i(0)} - \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}[\alpha_{n-1}-1]i(2)} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j} \left(\beta_{\alpha_{n-1}} + \beta_i q_{\alpha_{n-1}} + \beta_0 q_{\alpha_{n-1}} q_i + \ldots\right) -$$

$$- \prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j} \left(\beta_{[\alpha_{n-1}-1]} + \beta_i q_{[\alpha_{n-1}-1]} + \ldots\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j} \left(\beta_{\alpha_{n-1}} - \beta_{[\alpha_{n-1}-1]}\right) +$$

$$+ \prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j} \left(\beta_i (q_{\alpha_{n-1}} - q_{[\alpha_{n-1}-1]}) - q_{[\alpha_{n-1}-1]} q_i\right).$$

Отже, на цилінричних інтервалах $(n-1)$-го рангу в Q_s – раціональних точках функція $\delta_{in}(x)$ є розривною.

Якщо оператором $\delta_{in}(x)$ вклеювання цифр Q_s – зображення дійсного числа подіяти k разів, то отримаємо

$$\delta^{(k)}_{in}(x) = \delta_{in}(\delta_{in}(\ldots(x))) =$$

$$= \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\underbrace{i\ldots i}_{k}\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots}.$$

$$\delta^{(k)}_{in}(x) = \underbrace{\left(\beta_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-2} q_{\alpha_j}\right)}_{C} +$$

$$+ \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} (\beta_i + \beta_i q_i + \ldots + \beta_i q_i^{k-1}) +$$

$$\underbrace{+ q_i^k \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} (\beta_{\alpha_n} + \beta_{\alpha_{n+1}} q_{\alpha_n} + \ldots)}_{D} =$$

$$= x - D(1 - q_i^k) + \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} (\beta_i + \beta_i q_i + \ldots + \beta_i q_i^{k-1}).$$

Крім того,

$$\delta^{(k)}_{in}(x) = C + \omega_1^{(n-1)}(x) q_i^k \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} +$$

$$+ \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} (\beta_i + \beta_i q_i + \ldots + \beta_i q_i^{k-1})$$

або

$$\delta^{(k)}_{in}(x) = q_i^k x + C(1 - q_i^k) +$$

$$+ \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} (\beta_i + \beta_i q_i + \ldots + \beta_i q_i^{k-1}).$$

4. Використання оператора лівостороннього зсуву у метричних задачах

Нехай $u = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ — Q_s-зображення числа u, $\omega_1^n(u) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots\alpha_{n+k}\ldots}$. Розглянемо множину

$$D_n(x) = \{u : u \in [0;1], \omega_1^n(u) < x\}.$$

Нехай $\lambda[D_n(x)]$ міра Лебега множини $D_n(x)$. Знайдемо границю $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda[D_n(x)]$.

Аналогічну задачу поставив Гаусс для ланцюгових дробів, а повністю її розв'язав у 1928 році Р.О. Кузьмін. Дана задача виявилася не такою простою із-за геометрії ланцюгових дробів, у нашому ж випадку вона розв'язується значно простіше.

Розв'язок аналогу задачі Гаусса-Кузьміна для Q_s-зображення чисел дає наступна лема.

Теорема 4. *Міра Лебега множини $D_n(x)$ рівна x, тобто*

$$\lambda[D_n(x)] = x.$$

Доведення. При $n = 0$ множина $D_0(x)$ складається з точок $u < x$ і очевидно, що $\lambda[D_0(x)] = x$. Належність $u \in D_0(x)$ означає, що нескінченний набір знаків $(\alpha_1(u), \alpha_2(u), \ldots, \alpha_k(u), \ldots)$ володіє певною властивістю, яка легко виписується у вигляді співвідношень між знаками Q_s-зображень чисел u та x.

Очевидно, що при $u \in D_0(x)$, тобто $u < x$, то

$$v_i = \Delta^{Q_s}_{i\alpha_1(u)\alpha_2(u)\ldots\alpha_n(u)\ldots} \in D_1(x), i \in A_s.$$

Більше того, при $v_i \in D_1(x)$ маємо

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_2(v)\alpha_3(v)\ldots\alpha_k(v)\ldots} = \omega_1^1(v) \in D_0(x).$$

Тому

$$D_1(x) = E_0 \bigcup E_1 \bigcup \ldots \bigcup E_{s-1},$$

де $D_0(x) \overset{q_i}{\sim} E_i$, $i = 0, 1, ..., s-1$ а отже,

$$\lambda[D_1(x)] = \sum_{i=0}^{s-1} q_i \lambda[E_i] =$$

$$= (q_0 + q_1 + ... + q_{s-1})\lambda[D_0(x)] = x.$$

Аналогічно міркуючи,

$$D_2(x) = \bigcup_{i_2=0}^{s-1} \bigcup_{i_1=0}^{s-1} [E_{i_1 i_2}],$$

де $D_0(x) \overset{q_{i_1} q_{i_2}}{\sim} E_{i_1 i_2}$, тоді

$$\lambda[D_2(x)] = \sum_{i_2=0}^{s-1} \sum_{i_1=0}^{s-1} q_{i_1} q_{i_2} \lambda[D_0(x)] = x.$$

Аналогічно для довільного $n \in N$, отримаємо

$$D_n(x) = \bigcup_{i_n=0}^{s-1} \ldots \bigcup_{i_1=0}^{s-1} [E_{i_1 i_2 \ldots i_n}],$$

де $D_0(x) \overset{t}{\sim} E_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ та $t = \prod\limits_{j=1}^{n} q_{i_j}$.

Тоді

$$\lambda[D_n(x)] = \lambda[D_0(x)] \sum_{i_n=0}^{s-1} \ldots \sum_{i_1=0}^{s-1} \prod_{j=1}^{n} q_{i_j}.$$

Оскільки $\prod\limits_{j=1}^{n} q_{\alpha_j}$ визначає довжину відрізка n-го рангу, тобто $|\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}| = \prod\limits_{j=1}^{n} q_{\alpha_j}$. А підсумовування добутків ведеться по всеможливих наборах $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_k \in \{0, 1, ..., s-1\}$, тобто по всеможливих відрізках n-го рангу, то згідно із заданням Q_s-зображення, $\sum\limits_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \\ \alpha_k \in \{0,1,\ldots,s-1\}}} \prod\limits_{j=1}^{n} q_{\alpha_j} = 1$. Таким чином

$$\lambda[D_n(x)] = \lambda[D_0(x)] = x.$$

Лема 3. Розв'язком рівняння

$$\omega_k(x) = \delta_{in}(x)$$

є множина точок

$$W = \{x : x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_{t-1}(i)}, \text{де}\, \alpha_j, i \in A_s,$$

причому $t = n$ при $k \geq n$ або $t = k$ при $k < n$.

Доведення. Згідно з означеннями вказаних функцій, рівність $\omega_k(x) = \delta_{in}(x)$ перепишеться у вигляді

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-2}\alpha_{k-1}\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots} = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}i\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots}.$$

Якщо $k < n$, то очевидно, що множиною розв'язків даного рівняння будуть всі числа у яких починаючи з k-го номеру всі Q_s-цифри дорівнюють i, тобто

$$W = \{x : x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}(i)}, \text{ де } \alpha_j, i \in A_s\}.$$

Якщо ж $k \geq n$, тоді

$$W = \{x : x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}(i)}, \text{ де } \alpha_j, i \in A_s\}.$$

REFERENCES

1. *Eggleston, H.G.* (1951). Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory: The Journal of the Proc. London Math. Soc., 54, 42-93.

2. *Melnichuk, Yu. V.* (1991). Fast converging series representations of real numbers and their implementations in digital processing: The Journal of the Computational number theory, 27-29.

3. *Schweiger, F.* (1995). Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. New York, NY: Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press.

4. *Karvatskyi, D., Vasylenko, N.* (2012). Mathematical structures in the spaces of generalized Fibonacci sequences: Scientific journal NPU of N. P. Drahomanov. Series 1. Physics and mathematics, 13(1), 118-127.

5. *Klymchuk, S., Makarchuk, O., Pratsovytyi, M.* (2014). Frequency of a digit in the representation of a number and the asymptotic mean value of the digits: Ukrainian Mathematical Journal, 66(3), 302–310.

6. *Osaulenko, R.* (2016). A group of continuous transformations of a segment $[0; 1]$ that preserves the frequency of digits Q_s-representation of a number: Collected Works of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 13(3), 191-204.

7. *Pratsovytyi, M.* (1998). Fractal approach in studies of singular distributions. Kyiv: View of the NPU named after M. P. Dragomanov.

8. *Pratsovytyi, M.* (2013). The geometry of real numbers in their codings means the infinite alphabet as the basis of topological, metric, fractal, and probabilistic theories: Scientific journal NPU of N. P. Drahomanov. Series 1. Physics and mathematics, 14, 189-216.

9. *Pratsovytyi, M., Zamrii, I.* (2013). Inversor of digits of Q_3-representation of a fractional part of a real number as a solution of a system of three functional equations: Scientific journal NPU of N. P. Drahomanov. Series 1. Physics and mathematics, 15, 156-167.

10. *Pratsovytyi, M., Chuikov, A.* (2016). The simplest functions are related to the operator of the left-shift continued fractional elements of representation of numbers: Collected Works of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 13(3), 158-173.

11. *Turbin, A., Pratsovytyi, M.* (1992). Fractal sets, functions, distributions. Kyiv: Naukova dumka.

12. *Khinchyn, A.* (1978). The continued fractional. Moscow: Nauka.