УДК 517.937

©2018 р. **В. В. Джашитова, С. А. Щоголев**

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ПРО МАТРИЦЮ ГРІНА ЗЛІЧЕННОЇ ЛІНІЙНОЇ МАЙЖЕ ТРИКУТНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Для зліченної лінійної системи диференціальних рівнянь, близької до трикутної, отримано достатні умови існування нескінченної матриці Гріна, що задовольняє задані умови.

Ключові слова: зліченні системи, матриця Гріна.

For the countable linear system of the differential equations, which close to triangular, the conditions of the existence of the infinite Green-matrix, which satisfies given conditions, are obtained.

Keywords: countable systems, Green-matrix.

Вступ. Зліченні системи диференціальних рівнянь займають помітне місце в сучасній теорії диференціальних рівнянь, та їм присвячено численні дослідження [1,2]. Як відмічається в монографії [2], зліченні системи диференціальних рівнянь, незважаючи на те, що вони є частинним випадком диференціальних рівнянь у банахових просторах [3,4], мають низку специфічних властивостей, що приводить до розробки теорії таких рівнянь. В статті досліджуються властивості розв'язків зліченних лінійних, близьких до трикутних, систем диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами.

Постановка задачі. Розглянемо зліченну лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \tag{1}$$

$x = \mathrm{col}(x_1, x_2, \ldots)$,
$P(t) = (p_{jk}(t))_{j,k=1,2,\ldots}$, $p_{jk} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$p_{jk}(t) \in C(\mathbb{R})$.

Матрицею Гріна системи (1) назвемо матрицю $G(t,\tau) = (g_{jk}(t,\tau))_{j,k=1,2,\ldots}$,
$g_{jk} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задовольняє умови:
1) при $t \neq \tau$:

$$\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t} = P(t)G(t,\tau), \tag{2}$$

$$\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial \tau} = -\,G(t,\tau)P(\tau); \tag{3}$$

2)

$$G(\tau+0,\tau) - G(\tau-0,\tau) = E, \tag{4}$$

$$G(t,t+0) - G(t,t-0) = -E, \tag{5}$$

де $E = \mathrm{diag}(1,1,\ldots)$ – нескінченна одинична матриця. При $t=\tau$ матрицю $G(t,\tau)$ не визначено.

Метою статті є встановлення достатніх умов існування матриці Гріна системи вигляду (1) та дослідження її властивостей.

Основні результати. Розглянемо зліченну лінійну однорідну трикутну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{6}$$

$x = \mathrm{col}(x_1, x_2, \ldots)$,
$A(t) = (a_{jk}(t))_{j,k=1,2,\ldots}$, $a_{jk} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$a_{jk}(t) \in C(\mathbb{R})$, $a_{jk}(t) \equiv 0$ $(j<k)$.

Лема 1. *Нехай система (6) задовольняє наступні умови:*
1) $\inf\limits_{\mathbb{R}} |a_{jj}(t)| \geq \gamma > 0$ $(j=1,2,\ldots)$;
2)

$$\sum_{j=2}^{\infty} A_j < +\infty,$$

де $A_j = \max\limits_{1\leq k\leq j-1} \sup\limits_{\mathbb{R}} |a_{jk}(t)|$ $(j=2,3,\ldots)$.

Тоді система (6) має матрицю Гріна $G^*(t,\tau) = (g^*_{jk}(t,\tau))_{j,k=1,2,\ldots}$, *причому існують* $\delta \in (0,\gamma)$, $K_j = K_j(\delta) \in (0,+\infty)$ $(j=1,2,\ldots)$, *що не залежать від* t,τ, *і такі, що*

$$|g^*_{jk}(t,\tau)| \leq K_j\, e^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|},\ j,k=1,2,\ldots, \tag{7}$$

$$K = \sum_{j=1}^{\infty} K_j < +\infty. \qquad (8)$$

Доведення. За аналогією з [5, с. 192] визначимо елементи матриці $G^*(t,\tau)$ для $t \neq \tau$ наступним чином:
якщо $a_{jj}(t) \le -\gamma < 0$, то

$$g^*_{jj}(t,\tau) = \begin{cases} \exp\int\limits_{\tau}^{t} a_{jj}(s)ds, \ t > \tau, \\ 0, \ t < \tau; \end{cases} \qquad (9)$$

якщо $a_{jj}(t) \ge \gamma > 0$, то

$$g^*_{jj}(t,\tau) = \begin{cases} 0, \ t > \tau, \\ -\exp\int\limits_{\tau}^{t} a_{jj}(s)ds, \ t < \tau; \end{cases} \qquad (10)$$

якщо $j > k$, то

$$g^*_{jk}(t,\tau) = \sum_{q=k}^{j-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^*_{jj}(t,s)a_{jq}(s)g^*_{qk}(s,\tau)ds, \qquad (11)$$

якщо $j < k$, то $g^*_{jk}(t,\tau) \equiv 0$; $j = 2, 3, \ldots$.

Внаслідок умови 1) теореми і рівностей (9),(10) виконано:

$$|g^*_{jj}(t,\tau)| \le e^{-\gamma|t-\tau|}, \ j = 1, 2, ... \qquad (12)$$

З огляду на (11) розглянемо:

$$g^*_{j,j-1}(t,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g^*_{jj}(t,s)a_{j,j-1}(s)g^*_{j-1,j-1}(s,\tau)ds.$$

Звідси з урахуванням умови 2) теореми і нерівностей (12) матимемо:

$$|g^*_{j,j-1}(t,\tau)| \le A_j \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma(|t-s|+|s-\tau|)}ds =$$

$$= \frac{A_j}{\gamma}\ (1+\gamma|t-\tau|)\ e^{-\gamma|t-\tau|}, \ j = 2, 3, ... \qquad (13)$$

Легко встановити, що $\forall\ \delta \in (0,\gamma)\ \exists\ M = M(\delta) \in (0,+\infty)$ таке, що

$$(1+\gamma|t-\tau|)\ e^{-\gamma|t-\tau|} \le Me^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|}.$$

Дійсно, достатньо покласти

$$M = \sup_{s>0}(1+\gamma s)e^{-\delta s} = \frac{\gamma}{\delta e^{1-\frac{\delta}{\gamma}}}.$$

Оскільки $e^{1-\frac{\delta}{\gamma}} > 1$, то з нерівності (13) тоді маємо:

$$|g^*_{j,j-1}(t,\tau)| < \frac{A_j}{\delta} e^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|}, \ j = 2, 3, ... \qquad (14)$$

Далі для $\delta \in (0,\gamma)$ маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|t-s|}e^{-(\gamma-\delta)|s-\tau|}ds =$$

$$= \frac{2\gamma}{\delta(2\gamma-\delta)}\ e^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|} - \frac{2(\gamma-\delta)}{\delta(2\gamma-\delta)}e^{-\gamma|t-\tau|} <$$

$$< \frac{2\gamma}{\delta(2\gamma-\delta)}\ e^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|}. \qquad (15)$$

З урахуванням нерівностей (14),(15), співвідношень (11) і умови 2) теореми методом математичної індукції легко встановити оцінки:

$$|g^*_{jk}(t,\tau)| \le \frac{A_j}{\delta} \prod_{s=1}^{j-k-1} \left(1 + \frac{2\gamma}{\delta(2\gamma-\delta)}A_{j-s}\right) \times$$

$$\times \exp(-(\gamma-\delta)|t-\tau|), \ j = 2, 3, ...; k < j \qquad (16)$$

(тут покладено $\prod_{s=1}^{0} = 1$).

Внаслідок умови 2) теореми нескінченний добуток

$$\prod_{s=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2\gamma}{\delta(2\gamma-\delta)}A_s\right)$$

збіжний, тому $\exists\ A^* = A^*(\delta) \in (0,+\infty)$ таке, що

$$|g^*_{jk}(t,\tau)| \le A^*A_je^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|}, \ j = 2, 3, ...; k < j, \qquad (17)$$

що з огляду знову ж таки на умову 2) і нерівність (12) й доводить твердження леми 1.

Розглянемо зліченну лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad (18)$$

$x = \mathrm{col}(x_1, x_2, ...)$, матриця $A(t)$ така ж сама, як і в системі (6), $f(t) = \mathrm{col}(f_1(t), f_2(t), ...)$, $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$, $f_j(t) \in C(\mathbb{R})$, причому

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\mathbb{R}} |f_j(t)| < +\infty. \qquad (19)$$

Лема 2. *Нехай злічення трикутна однорідна система диференціальних рівнянь, що відповідає системі (18), задовольняє всі умови леми 1. Тоді система (18) має єдиний розв'язок* $x(t) =$ $= \mathrm{col}(x_1(t), x_2(t), ...)$ *такий, що*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\mathbb{R}} |x_j(t)| < +\infty. \tag{20}$$

Доведення. Покажемо, що вектор-функція

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(t,\tau) f(\tau) d\tau, \tag{21}$$

де $G^*(t,\tau)$ – матриця Гріна системи (6), існування якої встановлено лемою 1, оскільки умови цієї леми припускаються виконаними, є розв'язком системи (18). Дійсно, подамо $x(t)$ у вигляді:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} G^*(t,\tau) f(\tau) d\tau + \int_{t}^{+\infty} G^*(t,\tau) f(\tau) d\tau.$$

Звідси, використовуючи формулу [6, с. 667], а також співвідношення (2) і (5), дістанемо:

$$\frac{dx}{dt} = \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial G^*(t,\tau)}{\partial t} f(\tau) d\tau + G^*(t, t-0) f(t) +$$

$$+ \int_{t}^{+\infty} \frac{\partial G^*(t,\tau)}{\partial t} f(\tau) d\tau - G^*(t, t+0) f(t) =$$

$$= A(t) \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(t,\tau) f(\tau) d\tau -$$

$$-(G^*(t,t+0) - G^*(t,t-0)) f(t) =$$

$$= A(t)x(t) + f(t).$$

В координатній формі рівність (21) набуває вигляду:

$$x_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} g^*_{jk}(t,\tau) f_k(\tau) d\tau, \ j = 1, 2, ... \tag{22}$$

З рівностей (22), а також оцінок (7) дістанемо:

$$|x_j(t)| \le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g^*_{jk}(t,\tau)| \cdot |f_k(t)| d\tau \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_j e^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|} \sup_{\mathbb{R}} |f_k(\tau)| d\tau =$$

$$= K_j \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\gamma-\delta)|t-\tau|} d\tau \right) \sup_{\mathbb{R}} |f_k(t)| =$$

$$= K_j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma-\delta} \sup_{\mathbb{R}} |f_k(t)|, \ j = 1, 2, ...$$

З огляду на нерівність (8) і умову (19) звідси маємо, що вказаний розв'язок задовольняє умову (20). Єдиність розв'язку, що задовольняє цю умову, гарантується умовою 1) леми 1.

Розглянемо наступну злічення лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = (A(t) + \mu B(t))x, \tag{23}$$

$x = \mathrm{col}(x_1, x_2, ...)$, матриця $A(t)$ така ж сама, як в системі (6), $B(t) = (b_{jk}(t))_{j,k=1,2,...}$, $b_{jk} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b_{jk}(t) \in C(\mathbb{R}) \quad (j, k = 1, 2, \ldots)$,

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} \max_k \sup_{\mathbb{R}} |b_{jk}(t)| < +\infty, \tag{24}$$

$\mu \in \mathbb{R}^+$.

Теорема. *Нехай для зліченної лінійної трикутної системи (6) виконано всі умови леми 1. Тоді існують* $\Delta \in (0, \gamma - \delta)$ *(*δ *визначено в лемі 1),* $\mu_0 = \mu_0(\delta, \Delta)$ *такі, що* $\forall\ \mu \in (0, \mu_0)$ *система (23) має матрицю Гріна* $G(t,\tau,\mu) = (g_{jk}(t,\tau,\mu))_{j,k=1,2,...}$, *причому існують* $H_j = H_j(\delta, \Delta, \mu) \in (0, +\infty)$, *що не залежать від* t, τ, *і такі, що*

$$|g_{jk}(t,\tau,\mu)| \le H_j e^{-(\gamma-\delta-\Delta)|t-\tau|}, \ j, k = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

$\sum_{j=1}^{\infty} H_j < +\infty$.

Доведення. З огляду на лему 2 і рівність (21) визначимо матрицю Гріна системи (23) з матричного інтегрального рівняння:

$$G(t,\tau,\mu) =$$

$$= G^*(t,\tau) + \mu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G^*(t,s)B(s)G(s,\tau,\mu)ds, \tag{26}$$

де $G^*(t,\tau)$ – матриця Гріна системи (6). В координатній формі рівність (26) набуде вигляду зліченної системи інтегральних рівнянь:

$$g_{jk}(t,\tau,\mu) = g^*_{jk}(t,\tau) + \mu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[g^*_{jm}(t,s) \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{l=1}^{\infty} b_{ml}(s) g_{lk}(s,\tau,\mu) \right] ds, \ \ j,k = 1,2,\dots . \tag{27}$$

Розв'язок системи (27) шукатимемо методом послідовних наближень, покладаючи:

$$g_{jk0}(t,\tau,\mu) = g^*_{jk}(t,\tau),$$

$$g_{jk\nu}(t,\tau,\mu) = g^*_{jk}(t,\tau) + \mu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[g^*_{jm}(t,s) \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{l=1}^{\infty} b_{ml}(s) g_{lk,\nu-1}(s,\tau,\mu) \right] ds, \ \ j,k = 1,2,\dots . \tag{28}$$

$\nu = 1,2,\dots .$

З огляду на нерівності (7) матимемо:

$$|g_{jk1}(t,\tau,\mu) - g_{jk0}(t,\tau,\mu)| \le$$
$$\le \mu K_j \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \max_l \sup_{\mathbb{R}} |b_{ml}(s)| \sum_{l=1}^{\infty} K_l \right) \times$$
$$\times e^{-(\gamma-\delta)(|t-s|+|s-\tau|)} ds =$$
$$= \mu M K K_j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\gamma-\delta)(|t-s|+|s-\tau|)} ds <$$
$$< \mu M K K_j \frac{1}{\Delta} \ e^{-(\gamma-\delta-\Delta)|t-\tau|}, \ \ j,k = 1,2,\dots ,$$

де $\Delta \in (0, \gamma - \delta)$.

Далі методом математичної індукції нескладно встановлюються оцінки:

$$|g_{jk\nu}(t,\tau,\mu) - g_{jk,\nu-1}(t,\tau,\mu)| < \left(\frac{\mu M K}{\Delta} \right)^{\nu} \times$$
$$\times \left(\frac{2(\gamma-\delta)}{2(\gamma-\delta)-\Delta} \right)^{\nu-1} K_j e^{-(\gamma-\delta-\Delta)|t-\tau|},$$

$j,k = 1,2,\dots;\ \nu = 2,3,\dots .$

Звідси випливає, що умова

$$\frac{\mu M K \cdot 2(\gamma-\delta)}{\Delta(2(\gamma-\delta)-\Delta)} < 1$$

гарантує збіжність процесу (28) до функцій $g_{jk}(t,\tau,\mu)$ $(j,k = 1,2,\dots)$, що задовольняють нерівності (25), де покладено:

$$H_j = \left(1 + \frac{\mu M K}{\Delta - \frac{2(\gamma-\delta)\mu M K}{2(\gamma-\delta)-\Delta}} \right) K_j, \ \ j = 1,2,\dots .$$

Теорему доведено.

Висновки. Таким чином, для зліченної лінійної майже трикутної системи диференціальних рівнянь вигляду (23) встановлено достатні ознаки існування матриці Гріна, що задовольняє умови (2) – (5).

REFERENCES

1. *Valeev, K., & Zhautuikov, O.* (1962) Beskonechnye sistemy differencial'nyh uravneniy [Infinite Systems of Differential Equations]. Moskow: Foreign literature.
2. *Samoilenko, A., & Teplinskyi, Yu.* (1993). Schetnye sistemy differencial'nyh uravneniy [Countable Systems of Differential Equations]. Kiev: IM NAN Ukrainy.
3. *Daletskiy, Yu, & Krein, M.* (1970). Ustoichivost resheniy differencial'nyh uravneniy v banakhovom prostranstve [Stability of the Solutions of Differential Equations in the Banakh space]. Moskow: Nauka.
4. *Massera, J, & Schaffer, J.* (1970). Lineinye differencial'nye uravnenia i funcional'nye prostranstva [Linear Differential Equations and Function Spaces]. Moskow: Mir.
5. *Rosenvasser, Y.* (1977). Pokazately Lyapunova v teorii lineynyh sistem upravlenya [Lyapunov's indicators in the Theory of Linear Systems of Control]. Moskow: Nauka.
6. *Fikhtengoltz, G.* (1970). Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenya. T.2 [Course of Differential and Integral Calculus. V.2]. Moskow: Nauka.