УДК 512.534

©2018 р. Олег Гутік, Анатолій Савчук

Львівський національний університет імені Івана Франка

НАПІВГРУПА ЧАСТКОВИХ КОСКІНЧЕННИХ ІЗОМЕТРІЙ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Вивчається напівгрупа $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ усіх часткових коскінченних ізометрій множини натуральних чисел. Ми описуємо відношення Ґріна на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, її в'язку та доводимо, що $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ — проста E-унітарна F-інверсна напівгрупа. Описана найменша групова конгруенція $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ та доведено, що фактор-напівгрупа $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел. Наведено приклад конгруенції на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, яка не є груповою. Також доведено, що конгруенція на $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є груповою тоді і лише тоді, коли її звуження на довільну піднапігрупу S в $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі, є груповою конгруенцією на S.

Ключові слова: інверсна напівгрупа, відношення Ґріна, часткове перетворення, часткова бієкція, ізометрія, біциклічна напівгрупа, конгруенція.

The semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ of all partial co-finite isometries of positive integers is studied. We describe Green's relations on the semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, its band and proved that $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is a simple E-unitary F-inverse semigroup. We described the least group congruence $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ on $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ and proved that the quotient-semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ is isomorphic to the additive group of integers. An example of a non-group congruence on the semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is presented. Also we proved that a congruence on the semigroup $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is a group congruence if and only if its restriction onto an isomorphic copy of the bicyclic semigroup in $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ is a group congruence.

Keywords: inverse semigroup, Green relations, partial transformation, partial bijection, isometry, bicyclic semigroup, congruence.

У даній праці ми користуватимемося термінологією з [7, 9, 11]. Надалі у тексті множину натуральних чисел позначатимемо через $\mathbb{N}$.

Якщо визначене часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ з множини X у множину Y, то через $\operatorname{dom}\alpha$ і $\operatorname{ran}\alpha$ будемо позначати його *область визначення* та *область значень*, відповідно, а через $(x)\alpha$ та $(A)\alpha$ — образи елемента $x \in \operatorname{dom}\alpha$ та підмножини $A \subseteq \operatorname{dom}\alpha$ при частковому відображенні α, відповідно. Часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ називається *ко-скінченним*, якщо множини $X \setminus \operatorname{dom}\alpha$ та $Y \setminus \operatorname{ran}\alpha$ є скінченними.

Через $\mathscr{I}_\lambda$ позначимо множину усіх часткових взаємно однозначних перетворень множини X потужності λ разом з такою напівгруповою операцією: $(x)(\alpha\beta) = ((x)\alpha)\beta$, якщо $x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha\colon (y)\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}$, для $\alpha,\beta \in \mathscr{I}_\lambda$. Напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda$ називається *симеричним інверсним моноїдом* (або *симетричною інверсною напівгрупою*) над множиною X (див [7, §1.9]. Симетрична інверсна напівгрупа вперше введена В.В. Вагнером у праці [2] і вона відіграє дуже важливу роль в алгебраїчній теорії напівгруп.

Рефлексивне, антисиметричне та транзитивне відношення на множині X називається *частковим порядком* на X. Множина X із заданим на ній частковим порядком $\leqslant$ називається *частково впорядкованою множиною* і позначається $(X,\leqslant)$.

Елемент x частково впорядкованої множини $(X,\leqslant)$ називається *найбільшим* (*найменшим*) в $(X,\leqslant)$, якщо $y \leqslant x$ ($x \leqslant y$) для всіх $y \in X$.

У випадку, якщо $(X,\leqslant)$ — частково впорядкована множина й $x \leqslant y$, для деяких $x,y \in X$, то будемо говорити, що елементи x і y є *порівняльними* в $(X,\leqslant)$. Якщо ж для елементів x,y частково впорядкованої множини $(X,\leqslant)$ не виконується жодне з відношень $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то говоритимемо, що елементи x і y є *непорівняльними* в

$(X, \leqslant)$. Частковий порядок $\leqslant$ на X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. У цьому випадку ми будемо говорити, що $(X, \leqslant)$ є *лінійно впорядкованою множиною* або *ланцюгом*.

Відображення $h\colon X \to Y$ з частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ в частково впорядковану множину $(Y, \leqslant)$ називається *монотонним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає $(x)h \leqslant (y)h$. Монотонне бієктивне відображення $h\colon (X, \leqslant) \to (Y, \leqslant)$ частково впорядкованих множин, обернене до якого є монотонним, називається *порядковим ізоморфізмом*. Лінійно впорядкована множина, яка порядково ізоморфна $(\mathbb{N}, \geqslant)$ називається *ω-ланцюгом*.

Якщо S — напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через $E(S)$. Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ та $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ [2]. В інверсній напівгрупі S вище означений елемент x^{-1} називається *інверсним до* x. *В'язка* — це напівгрупа ідемпотентів, а *напівгратка* — це комутативна в'язка. Надалі через $(\mathscr{P}_\infty(X), \cup)$ позначатимемо *вільну напівгратку* з одиницею над непорожньою множиною X, тобто множину усіх скінченних (включно з порожньою) підмножин множини X з операцією "об'єднання".

Якщо S — напівгрупа, то ми позначатимемо відношення Ґріна на S через $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{H}$ і $\mathscr{J}$ (див. означення в [7, §2.1]. Напівгрупа S називається *простою*, якщо S не містить власних двобічних ідеалів, тобто S складається з одного $\mathscr{J}$-класу.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *конгруенцією*, якщо для елементів a та b напівгрупи S з того, що виконується умова $(a, b) \in \mathfrak{K}$ випливає, що $(ca, cb), (ad, bd) \in \mathfrak{K}$, для всіх $c, d \in S$. Відношення $(a, b) \in \mathfrak{K}$ ми також будемо записувати $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку будемо говорити, що *елементи a і b є $\mathfrak{K}$-еквівалентними*.

Якщо S — напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок: $e \preccurlyeq f$ тоді і лише тоді, коли $ef = fe = e$. Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним*.

Означимо відношення $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S так: $s \preccurlyeq t$ тоді і лише тоді, коли $s = te$. для деякого ідемпотента $e \in S$. Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [9]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$.

Часткове перетворення $\alpha\colon (X, d) \rightharpoonup (X, d)$ метричного простору (X, d) називається *ізометричним* або *частковою ізометрією*, якщо $d(x\alpha, y\alpha) = d(x, y)$ для довільних $x, y \in (X, d)$. Очевидно, що композиція двох часткових ізометрій метричного простору (X, d) є знову частковою ізометрією, а також, що обернене часткове відображення до часткової ізометрії є частковою ізометрією. Таким чином, часткові ізометрії метричного простору (X, d) стосовно операції композиції спсткових перетворень є інверсним підмоноїдом симетричного інверсного моноїда над множиною X.

Напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ усіх часткових коскінченних ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$ означена в праці Безущак [6], де описані її твірні та доведено, що вона має експоненціальний ріст. Зауважимо, що напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ є інверсною і є, очевидно, піднапівгрупою напівгрупи всіх часткових коскінченних бієкцій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$, а елементи напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ — це саме звуження ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$ на коскінченні підмножини в розумінні Лоусона (див. [9, с. 9]. У праці [1] описані відношення Ґріна та головні ідеали напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$. У [3] доведено, що фактор-напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ за мінімальною груповою конгруенцією $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ ізоморфна групі $\mathbf{Iso}(\mathbb{Z})$ усіх ізометрій множини $\mathbb{Z}$, напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ є F-інверсною напівгрупою, а також, що напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathbf{Iso}(\mathbb{Z}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z})$ вільної напівгратки з одиницею $(\mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z}), \cup)$ групою $\mathbf{Iso}(\mathbb{Z})$. Також, у [3] досліджувалась топологізація напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ та задача ізоморфного занурення дискретної напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ у гаусдорфові топологічні напівгрупи близькі до компактних.

Нехай $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ — множина усіх часткових коскінченних ізометрій множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ зі звичайною метрикою $d(n,m) = |n-m|$, $n,m \in \mathbb{N}$. Оскільки множина $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ замкнена стосовно операції композиції часткових відображень та взяття оберненого часткового відображення, то $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ — інверсний підмоноїд симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}_\omega$. Через $\mathbb{I}$ позначатимемо тотожне відображення множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Очевидно, що $\mathbb{I}$ — одиниця моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$.

У цій праці ми досліджуємо алгебраїчні властивості напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Зокрема, описуємо відношення Ґріна на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, її в'язку та доводимо, що $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ — проста E-унітарна F-інверсна напівгрупа. Описана найменша групова конгруенція $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ та доведено, що фактор-напівгрупа $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел. Наведено приклад конгруенції на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, яка не є груповою. Також доведено, що конгруенція на $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є груповою тоді і лише тоді, коли її звуження на довільну піднапігрупу S в $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі, є груповою конгруенцією на S.

Нехай $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Відображення $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, означене за формулою $(z)f = z + z_0$, де z_0 — деяке ціле число будемо називати *зсувом множини цілих чисел*. Часткове відображення $\alpha\colon \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ називається *звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел*, якщо існують зсув множини цілих чисел $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ і $A \subseteq \mathbb{N}$ такі, що $\operatorname{dom}\alpha = A$ і $(x)f = (x)\alpha$, для всіх $x \in \operatorname{dom}\alpha$. Якщо $\alpha\colon \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ — звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел і $B \subseteq \operatorname{dom}\alpha$, то про образ $(B)\alpha$ будемо називати *зсувом* множини B.

Лема 1. *Кожен елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є монотонною частковою біекцією лінійно впорядкованої множини $(\mathbb{N},\leqslant)$. Більше того, кожен елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел на коскінченну підмножину в $\mathbb{N}$.*

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент α напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Позаяк α — коскінченна часткова біекція множини $\mathbb{N}$ і $(\mathbb{N},\leqslant)$ — цілком впорядкована множина, то існує найменше натуральне число n_α таке, що $n \in \operatorname{dom}\alpha$ для всіх натуральних $n \geqslant n_\alpha$. Також, оскільки α — часткова коскінченна ізометрія множини натуральних чисел, то

$$d((n_\alpha+1)\alpha, (n_\alpha)\alpha) = |(n_\alpha+1)\alpha - (n_\alpha)\alpha| = 1,$$

а отже виконується одна з умов

$$(n_\alpha+1)\alpha = (n_\alpha)\alpha+1 \text{ або } (n_\alpha+1)\alpha = (n_\alpha)\alpha-1.$$

Припустимо, що $(n_\alpha+1)\alpha = (n_\alpha)\alpha - 1$. Тоді за індукцією, оскільки α — часткова коскінченна ізометрія множини натуральних чисел, то отримуємо, що $(n_\alpha+i)\alpha = (n_\alpha)\alpha - i$ для довільного натурального числа i, що суперечить тому, що множина натуральних чисел має найменший елемент. З отриманого протиріччя випливає, що виконується рівність $(n_\alpha+1)\alpha = (n_\alpha)\alpha+1$. Аналогічно, за індукцією, оскільки α — часткова коскінченна ізометрія множини натуральних чисел, то отримуємо, що $(n_\alpha+i)\alpha = (n_\alpha)\alpha+i$ для довільного натурального числа $i \geqslant 2$. Також з вище доведеного випливає, що $(n)\alpha = (n_\alpha)\alpha - n_\alpha + n$ для довільного $n \in \operatorname{dom}\alpha$, а отже виконується друге твердження леми.

Через $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ позначимо напівгрупу монотонних коскінченних часткових біекцій множини натуральних чисел (див. [8]). Оскільки існують монотонні коскінченні часткові біекції множини натуральних чисел, які не є частковими ізометріями, то з леми 1 випливає

Наслідок 1. $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ *— власний підмоноїд в $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$.*

Твердження 1. (*i*) *$E(\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty) = E(\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N}))$ в $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$, а отже напівгратка $E(\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty)$ ізоморфна вільній напівгратці з одиницею $(\mathscr{P}_\infty(\mathbb{N}),\cup)$, і цей ізоморфізм визначається відображенням $(\varepsilon)h = \mathbb{N} \setminus \operatorname{dom}\varepsilon$.*

(*ii*) *Якщо $\varepsilon, \iota \in E(\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty)$, то $\varepsilon \leqslant \iota$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{dom}\varepsilon \subseteq \operatorname{dom}\iota$.*

(*iii*) *Кожен максимальний ланцюг у напівгратці $E(\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty)$ є ω-ланцюгом.*

(*iv*) $\alpha\mathscr{L}\beta$ *в* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ *тоді і лише тоді, коли* $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$.

(*v*) $\alpha\mathscr{R}\beta$ *в* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ *тоді і лише тоді, коли* $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$.

(*vi*) $\alpha\mathscr{H}\beta$ *в* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ *тоді і лише тоді, коли* $\alpha = \beta$.

(*vii*) $\alpha\mathscr{D}\beta$ *в* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ *тоді і лише тоді, коли* $\operatorname{dom}\alpha$ ($\operatorname{ran}\alpha$) *є зсувом множини* $\operatorname{dom}\beta$ ($\operatorname{ran}\beta$).

Доведення. (*i*) Позаяк кожне часткове коскінченне тотожне перетворення множини натуральних чисел є частковою ізометрією, то за наслідком 1 маємо, що $E(\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty) = E(\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N}))$ в $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$. Останнє твердження є наслідком твердження 2.1(*vii*) з [8].

Твердження (*ii*)–(*vi*) є наслідками твердження 2.1 з [8].

(*vii*) Еквівалентність того, шо множина $\operatorname{dom}\alpha$ ($\operatorname{ran}\alpha$) є зсувом множини $\operatorname{dom}\beta$ ($\operatorname{ran}\beta$) випливає з другого твердження леми 1.

За означенням відношення Ґріна $\mathscr{D}$ маємо, що $\mathscr{D} = \mathscr{L}\circ\mathscr{R} = \mathscr{R}\circ\mathscr{L} = \mathscr{R}\bigvee\mathscr{L}$, і оскільки $\alpha\mathscr{L}\alpha\alpha^{-1}$ і $\beta\mathscr{R}\beta^{-1}\beta$, то $\alpha\mathscr{D}\beta$ в $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ тоді і лише тоді, коли $\alpha\alpha^{-1}\mathscr{D}\beta^{-1}\beta$,. Тоді за твердженням 3.2.5 з [9] існує елемент $\gamma \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ такий, що $\gamma\gamma^{-1} = \alpha\alpha^{-1}$ і $\gamma^{-1}\gamma = \beta^{-1}\beta$. Останні дві рівності виконуються тоді і лише тоді, коли $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\gamma$ і $\operatorname{ran}\gamma = \operatorname{ran}\beta$, а отже умова $\alpha\mathscr{D}\beta$ еквівалентна умові, що $\operatorname{dom}\alpha$ є зсувом множини $\operatorname{ran}\beta$.

Теорема 2. $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ — *проста напівгрупа.*

Доведення. Оскільки $\alpha = \alpha\mathbb{I} = \mathbb{I}\alpha$ для довільного елемента α напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, то нам достатньо довести, що для довільного елемента β напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ існують $\gamma, \delta \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ такі, що $\gamma\beta\delta = \mathbb{I}$.

Зафіксуємо довільний елемент β напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел на коскінченну підмножину в $\mathbb{N}$ і $(\mathbb{N}, \leqslant)$ — цілком впорядкована множина, то існує найменше натуральне число $n_\beta^{\mathbf{d}} \in \operatorname{dom}\beta$ таке, що $n \in \operatorname{dom}\beta$ для всіх натуральних $n \geqslant n_\beta^{\mathbf{d}}$ та існує найменше натуральне число $n_\beta^{\mathbf{r}} \in \operatorname{ran}\beta$ таке, що $n \in \operatorname{dom}\beta$ для всіх натуральних $n \geqslant n_\beta^{\mathbf{r}}$. Покладемо

$$\operatorname{dom}\gamma = \mathbb{N}, \qquad \operatorname{ran}\gamma = \left\{n \in \mathbb{N} \colon n \geqslant n_\beta^{\mathbf{d}}\right\},$$

$$(i)\gamma = i - 1 + n_\beta^{\mathbf{d}} \qquad \text{для всіх } i \in \operatorname{dom}\gamma$$

і

$$\operatorname{dom}\delta = \left\{n \in \mathbb{N} \colon n \geqslant n_\beta^{\mathbf{r}}\right\}, \quad \operatorname{ran}\delta = \mathbb{N},$$

$$(j)\delta = i - n_\beta^{\mathbf{r}} + 1 \qquad \text{для всіх } j \in \operatorname{dom}\delta.$$

Тоді з леми 1 випливає, що $\gamma\beta\delta = \mathbb{I}$.

Наступне очевидне твердження описує природний частковий порядок на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ і воно випливає з описання природного часткового порядку на симетричному інверсному моноїді, оскільки $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є інверсним підмоноїдом симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}_\omega$ над множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$.

Твердження 3. *Для елементів α і β напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ такі умови є еквівалентними:*

(*i*) $\alpha \preccurlyeq \beta$ *в* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$*;*

(*ii*) *часткове відображення α є звуженням часткового відображення β на* $\operatorname{dom}\alpha$*;*

(*iii*) *часткове відображення α є козвуженням*[1] *часткового відображення β на* $\operatorname{ran}\alpha$.

Нагадаємо [9], шо інверсна напівгрупа S називається *E-унітарною*, якщо ex – ідемпотент в S для деякого ідемпотента $e \in S$ та $x \in S$, то x – ідемпотент напівгрупи S. Тоді з твердження 3 і другої частини леми 1 випливає:

Наслідок 2. $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ — *E-унітарна інверсна напівгрупа.*

Найменша групова конгруенція $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ на інверсній напівгрупі S визначається так (див. [11, III.5]: $s\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}t$ в S тоді і лише тоді, коли існує ідемпотент $e \in S$ такий, що $es = et$.

Наступне твердження описує найменшу групову конгруенцію $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$.

[1] Нехай $\alpha \colon X \rightharpoonup Y$ — часткове відображення та B — підмножина в Y. Під козвуженням часткове відображення α будемо розуміти часткове відображення $\alpha\lfloor_B \colon X \rightharpoonup Y$ з $\operatorname{dom}\alpha\lfloor_B = \{x \in X : (x)\alpha \in B\}$ і $\operatorname{ran}\alpha\lfloor_B = B$.

Твердження 4. *Для елементів α та β напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ такі умови є еквівалентними:*

(*i*) $\alpha\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}\beta$;

(*ii*) *існує натуральне число* $i \in \operatorname{dom}\alpha \cap \operatorname{dom}\beta$ *таке, що* $(i)\alpha = (i)\beta$;

(*iii*) $(i)\alpha = (i)\beta$ *для всіх* $i \in \operatorname{dom}\alpha \cap \operatorname{dom}\beta$.

Доведення. Імплікація $(iii) \Rightarrow (ii)$ очевидна. Оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, то $(ii) \Rightarrow (iii)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Якщо $i\alpha = i\beta$ для всіх $i \in \operatorname{dom}\alpha \cap \operatorname{dom}\beta$, то поклавши $\varepsilon\colon \operatorname{dom}\alpha \cap \operatorname{dom}\beta \to \operatorname{dom}\alpha \cap \operatorname{dom}\beta$ — тотожне відображення, отримуємо, що $\varepsilon \in E(\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty)$ і $\varepsilon\alpha = \varepsilon\beta$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що $\varepsilon\alpha = \varepsilon\beta$ для деякого ідемпотента ε напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Оскільки ε — тотожне відображення коскінченної підмножини $\operatorname{dom}\varepsilon$ множини натуральних чисел, то з означення напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ випливає, що $\operatorname{dom}\alpha \cap \operatorname{dom}\beta \cap \operatorname{dom}\varepsilon \neq \varnothing$, а також, що $(i)\alpha = (i)\varepsilon\alpha = (i)\varepsilon\beta = (i)\beta$ для всіх $i \in \operatorname{dom}\alpha \cap \operatorname{dom}\beta \cap \operatorname{dom}\varepsilon$.

Надалі в цій праці через $(\mathbb{Z}, +)$ позначатимемо адитивну групу цілих чисел.

Теорема 5. *Фактор-напівгрупа* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ *ізоморфна групі* $(\mathbb{Z}, +)$.

Доведення. Зафіксуємо довільні елементи α та β напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ такі, що $\alpha\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}\beta$. Оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, то існують цілі числа $\mathbf{z}_\alpha$ та $\mathbf{z}_\beta$ такі, що $(i)\alpha = i + \mathbf{z}_\alpha$ і $(j)\beta = j + \mathbf{z}_\beta$ для довільних $i \in \operatorname{dom}\alpha$ та $j \in \operatorname{dom}\beta$. З твердження 4 випливає, що $\mathbf{z}_\alpha = \mathbf{z}_\beta$. Очевидно, з твердження 4 випливає, що виконується також обернене твердження: *якщо* $\mathbf{z}_\alpha = \mathbf{z}_\beta$ *для елементів α та β напівгрупи* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, *то* $\alpha\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}\beta$.

Означимо відображення $\mathfrak{F}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to (\mathbb{Z}, +)$ за формулою $(\alpha)\mathfrak{F} = \mathbf{z}_\alpha$. З леми 1 і твердження 4 випливає, що відображення $\mathfrak{F}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to (\mathbb{Z}, +)$ визначено коректно. Тоді для довільних елементів α та β напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ маємо, що $(i)\alpha\beta = (i + \mathbf{z}_\alpha)\beta = i + \mathbf{z}_\alpha + \mathbf{z}_\beta$, для всіх $i \in \operatorname{dom}(\alpha\beta)$. Таким чином, ми отримуємо, що $(\alpha\beta)\mathfrak{F} = \mathbf{z}_\alpha + \mathbf{z}_\beta = (\alpha)\mathfrak{F} + (\beta)\mathfrak{F}$, а отже $\mathfrak{F}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to (\mathbb{Z}, +)$ — гомоморфізм. Очевидно, що так визначене відображення $\mathfrak{F}$ є сюр'єктивним.

Також, з твердження 4 випливає, що $(\alpha)\mathfrak{F} = (\beta)\mathfrak{F}$ тоді і лише тоді, коли $\alpha\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}\beta$. Таким чином, найменша групова конгруенція $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ на інверсній напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ породжує гомоморфізм $\mathfrak{F}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to (\mathbb{Z}, +)$ і конгруенція $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ є ядром цього гомоморфізму, а отже виконується твердження теореми.

Нагадаємо, що інверсна напівгрупа S називається *F-інверсною*, якщо $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$-клас $s_{\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}}$ кожного елемента s має найбільший елемент стосовно природного часткового порядку $\preccurlyeq$ в S [10].

Теорема 6. $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ — *F-інверсна напівгрупа.*

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент α напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Означимо часткове відображення $\alpha_{\mathbf{m}}\colon \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ наступним чином. Нехай $\mathbf{z}_\alpha$ — ціле число, означене для елемента α в тексті доведення теореми 5. Тоді можливі такі випадки:

$$(i)\ \mathbf{z}_\alpha < 0; \quad (ii)\ \mathbf{z}_\alpha = 0 \quad \text{або} \quad (iii)\ \mathbf{z}_\alpha > 0.$$

Покладемо:

(*i*) якщо $\mathbf{z}_\alpha < 0$, то
$$\operatorname{dom}\alpha_{\mathbf{m}} = \{i \in \mathbb{N}\colon i \geqslant -\mathbf{z}_\alpha + 1\},$$
$\operatorname{ran}\alpha_{\mathbf{m}} = \mathbb{N}$ і $(j)\alpha_{\mathbf{m}} = j + \mathbf{z}_\alpha$ для всіх $j \in \operatorname{dom}\alpha_{\mathbf{m}}$;

(*ii*) якщо $\mathbf{z}_\alpha = 0$, то $\alpha_{\mathbf{m}}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — тотожне відображення;

(*iii*) якщо $\mathbf{z}_\alpha > 0$, то $\operatorname{dom}\alpha_{\mathbf{m}} = \mathbb{N}$,
$$\operatorname{ran}\alpha_{\mathbf{m}} = \{i \in \mathbb{N}\colon i \geqslant -\mathbf{z}_\alpha + 1\}$$
і $(j)\alpha_{\mathbf{m}} = j + \mathbf{z}_\alpha$ для всіх $j \in \operatorname{dom}\alpha_{\mathbf{m}}$.

Очевидно, що так визначене часткове відображення $\alpha_{\mathbf{m}}\colon \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ є частковою ізометрією, а отже $\alpha_{\mathbf{m}} \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Тоді з твердження 4 випливає, що $\alpha\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}\alpha_{\mathbf{m}}$, а з твердження 3, що виконується відношення $\alpha \preccurlyeq \alpha_{\mathbf{m}}$.

Зауважимо, що за виконання умов:

(i) якщо $\mathbf{z}_\alpha < 0$, то $\operatorname{ran}\alpha_{\mathbf{m}} = \mathbb{N}$;

(ii) якщо $\mathbf{z}_\alpha = 0$, то $\operatorname{dom}\alpha_{\mathbf{m}} = \operatorname{ran}\alpha_{\mathbf{m}} = \mathbb{N}$;

(iii) якщо $\mathbf{z}_\alpha > 0$, то $\operatorname{dom}\alpha_{\mathbf{m}} = \mathbb{N}$,

з того, що $\alpha_{\mathbf{m}} \preccurlyeq \beta$ для деяких $\alpha, \beta \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, з твердження 3 випливає рівність $\alpha_{\mathbf{m}} = \beta$. Таким чином, $\alpha_{\mathbf{m}}$ — найбільший елемент $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$-класу елемента α стосовно природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$.

Нагадаємо (див. наприклад [7, §1.12]), що *біциклічною напівгрупою* (або *біциклічним моноїдом*) $\mathscr{C}(p,q)$ називається напівгрупа з одиницею, породжена двоелементною множиною $\{p,q\}$ і визначена одним визначальним співвідношенням $pq = 1$. Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль в теорії напівгруп. Так, зокрема, класична теорема Олафа Андерсена [4] стверджує, що (0-)проста напівгрупа з ідемпотентом є цілком (0-)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфну копію біциклічної напівгрупи. Стабільні напівгрупи не містять ізоморфної копії біциклічного моноїда [5].

Зауваження 1. *1. Добре відомо (див. [7, §1.12]), що біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p,q)$ ізоморфний напівгрупі $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$, породженій частковими перетвореннями α та β множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, які визначаються наступним чином:*

$$\operatorname{dom}\alpha = \mathbb{N}, \quad \operatorname{ran}\alpha = \mathbb{N}\setminus\{1\}, \quad (n)\alpha = n+1$$

і

$$\operatorname{dom}\beta = \mathbb{N}\setminus\{1\}, \quad \operatorname{ran}\beta = \mathbb{N}, \quad (n)\beta = n-1.$$

Оскільки композиція $\alpha\beta$ — тотожне відображення множини натуральних чисел, то з результатів про біциклічний моноїд, отриманих у [7, §1.12] випливає, що кожен елемент напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ однозначно зображається у вигляді $\beta^i\alpha^j$, де i та j — деякі невід'ємні цілі числа, $\beta^0 = \alpha^0$ — тотожне перетворення множини натуральних чисел, а також ізоморфізм $\mathfrak{I}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{N}} \to \mathscr{C}(p,q)$ визначається за формулою $(\beta^i\alpha^j)\mathfrak{I} = q^ip^j$. Таким чином, напівгрупа $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ містить ізоморфну копію біциклічної напівгрупи.

2. Легко бачити, що для довільного елемента $\beta^i\alpha^j$ напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$, де i та j — деякі невід'ємні цілі числа, виконуються такі умови:

(1) $\operatorname{dom}(\beta^i\alpha^j) = \mathbb{N}\setminus\{1,\ldots,i\}$,

(2) $\operatorname{ran}(\beta^i\alpha^j) = \mathbb{N}\setminus\{1,\ldots,j\}$,

(3) $(n)\beta^i\alpha^j = n - j + i$, *для* $n \in \operatorname{dom}(\beta^i\alpha^j)$.

Також очевидно, що кожен частковий зсув $\mu\colon \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$, $n \mapsto n+k$ нескінченного променя $\{l, l+1, l+2, \ldots\}$ множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ збігається з частковим перетворенням $\beta^{l-1}\alpha^{k+l-1}$, яке є елементом напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$.

З нижче викладеного прикладу випливає, що на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ існують конгруенції, які не є груповими.

Приклад 1. *Означимо відображення $\mathfrak{H}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ наступним чином. Нехай η — довільний елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел, то існує найменше натуральне число $n_\eta^{\mathbf{d}} \in \operatorname{dom}\eta$ таке, що $n \in \operatorname{dom}\eta$ для всіх натуральних $n \geqslant n_\eta^{\mathbf{d}}$ та існує ціле число $\mathbf{z}_\eta$ таке, що $(i)\eta = i + \mathbf{z}_\eta$ для довільних $i \in \operatorname{dom}\eta$. Покладемо $(\eta)\mathfrak{H} = \overline{\eta}$ — звуження часткового перетворення η множини натуральних чисел на множину $\left\{i \in \mathbb{N}\colon i \geqslant n_\eta^{\mathbf{d}}\right\}$. Тоді із зауваження 1(2) випливає, що часткове перетворення $\overline{\eta}$ збігається з частковим перетворенням $\beta^{n_\eta^{\mathbf{d}}-1}\alpha^{\mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}}-1}$, яке є елементом напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$.*

Твердження 7. *Відображення $\mathfrak{H}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ є сюр'єктивним гомоморфізмом моноїдів.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що з означення відображення $\mathfrak{H}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ випливає, що $(\beta^i\alpha^j)\mathfrak{H} = \beta^i\alpha^j$ для довільного елемента $\beta^i\alpha^j$ напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$.

Нехай η та μ — довільні елементи напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел, то існують найменші натуральні числа

$n_\eta^{\mathbf{d}} \in \operatorname{dom}\eta$ і $n_\mu^{\mathbf{d}} \in \operatorname{dom}\mu$ такі, що $n \in \operatorname{dom}\eta$ та $m \in \operatorname{dom}\mu$ для всіх натуральних $n \geqslant n_\eta^{\mathbf{d}}$ і $m \geqslant n_\mu^{\mathbf{d}}$, та існують цілі числа $\mathbf{z}_\eta$ і $\mathbf{z}_\mu$ такі, що $(i)\eta = i+\mathbf{z}_\eta$ і $(j)\mu = j+\mathbf{z}_\mu$ для довільних $i \in \operatorname{dom}\eta$ та $j \in \operatorname{dom}\mu$.

З означення відображення $\mathfrak{H}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathscr{C}_\mathbb{N}$, використавши зауваження 1(1), отримуємо:

$$(\eta)\mathfrak{H}(\mu)\mathfrak{H} = \beta^{n_\eta^{\mathbf{d}}-1}\alpha^{\mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}}-1}\beta^{n_\mu^{\mathbf{d}}-1}\alpha^{\mathbf{z}_\mu+n_\mu^{\mathbf{d}}-1} =$$
$$= \begin{cases} \beta^{n_\eta^{\mathbf{d}}-1}\alpha^{\mathbf{z}_\eta+\mathbf{z}_\mu+n_\eta^{\mathbf{d}}-1}, & \text{якщо } \mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}} > n_\mu^{\mathbf{d}};\\ \beta^{n_\eta^{\mathbf{d}}-1}\alpha^{\mathbf{z}_\mu+n_\mu^{\mathbf{d}}-1}, & \text{якщо } \mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}} = n_\mu^{\mathbf{d}};\\ \beta^{n_\mu^{\mathbf{d}}-\mathbf{z}_\eta-1}\alpha^{\mathbf{z}_\mu+n_\mu^{\mathbf{d}}-1}, & \text{якщо } \mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}} < n_\mu^{\mathbf{d}}. \end{cases}$$

Оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел, то $\mathbf{z}_{\eta\mu} = \mathbf{z}_\eta + \mathbf{z}_\mu$. Далі визначимо найменше натуральне число $n_{\eta\mu}^{\mathbf{d}} \in \operatorname{dom}\eta$ таке, що $n \in \operatorname{dom}(\eta\mu)$ для всіх натуральних $n \geqslant n_{\eta\mu}^{\mathbf{d}}$. Знову, оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел, то отримуємо, що

$$n_{\eta\mu}^{\mathbf{d}} = \max\left\{\mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}}, n_\mu^{\mathbf{d}}\right\} - \mathbf{z}_\eta.$$

Тоді

$$(\eta\mu)\mathfrak{H} = \beta^{n_{\eta\mu}^{\mathbf{d}}-1}\alpha^{\mathbf{z}_{\eta\mu}+n_{\eta\mu}^{\mathbf{d}}-1} =$$
$$=\beta^{\max\{\mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}},n_\mu^{\mathbf{d}}\}-\mathbf{z}_\eta-1}\alpha^{\mathbf{z}_\eta+\mathbf{z}_\mu+\max\{\mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}},n_\mu^{\mathbf{d}}\}-\mathbf{z}_\eta-1}$$
$$=\beta^{\max\left\{\mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}},n_\mu^{\mathbf{d}}\right\}-\mathbf{z}_\eta-1}\alpha^{\mathbf{z}_\mu+\max\left\{\mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}},n_\mu^{\mathbf{d}}\right\}-1} =$$
$$= \begin{cases} \beta^{n_\eta^{\mathbf{d}}-1}\alpha^{\mathbf{z}_\eta+\mathbf{z}_\mu+n_\eta^{\mathbf{d}}-1}, & \text{якщо } \mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}} > n_\mu^{\mathbf{d}};\\ \beta^{n_\eta^{\mathbf{d}}-1}\alpha^{\mathbf{z}_\mu+n_\mu^{\mathbf{d}}-1}, & \text{якщо } \mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}} = n_\mu^{\mathbf{d}};\\ \beta^{n_\mu^{\mathbf{d}}-\mathbf{z}_\eta-1}\alpha^{\mathbf{z}_\mu+n_\mu^{\mathbf{d}}-1}, & \text{якщо } \mathbf{z}_\eta+n_\eta^{\mathbf{d}} < n_\mu^{\mathbf{d}}. \end{cases}$$

Таким чином, виконується рівність $(\eta\mu)\mathfrak{H} = (\eta)\mathfrak{H}(\mu)\mathfrak{H}$ для всіх елементів η і μ напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, а отже відображення $\mathfrak{H}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathscr{C}_\mathbb{N}$ є гомоморфізмом моноїдів.

Очевидно, що ядро

$$\ker\mathfrak{H} = \left\{(\eta,\mu) \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \times \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \colon (\eta)\mathfrak{H} = (\mu)\mathfrak{H}\right\},$$

вище означеного гомоморфізму $\mathfrak{H}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathscr{C}_\mathbb{N}$ є конгруенцією на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, яка не є груповою.

Гомоморфною ретракцією називається відображення з напівгрупи S в S, яке є одночасно ретракцією та гомоморфізмом [7]. Образ напівгрупи S при її гомоморфній ретракції називається *гомоморфним ретрактом.* Тобто гомоморфний ретракт напівгрупи S — це така піднапівгрупа T в S, що існує гомоморфізм з S в S, для якого піднапівгрупа T є множиною всіх його нерухомих точок.

З твердження 7 випливає

Наслідок 3. *Напівгрупа $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$.*

Зауваження 2. *Нехай S — напівгрупа, T — піднапівгрупа напівгрупи S і $\mathfrak{C}_S$ — конгруенція на S. Тоді з означення поняття конгруенція випливає, що звуження $\mathfrak{C}_T = \mathfrak{C}_S|_{T\times T}$ відношення $\mathfrak{C}_S$ на декартовий добуток $T \times T$ є конгруенцією на напівгрупі T*

Виявляється, що піднапівгрупа $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ дає можливість отримати критерій, коли конгруенція на $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є груповою.

Теорема 8. *Конгруенція $\mathfrak{C}$ на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є груповою тоді і лише тоді, коли її звуження $\mathfrak{C}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}} = \mathfrak{C}|_{\mathscr{C}_\mathbb{N}\times\mathscr{C}_\mathbb{N}}$ на піднапівгрупу $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ не є тотожною конгруенцією на $\mathscr{C}_\mathbb{N}$.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Із зауваження 2 випливає, якщо $\mathfrak{C}$ — групова на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, то її звуження $\mathfrak{C}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}$ на піднапівгрупу $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є також конгруенцією, а оскільки всі ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними, то всі ідемпотенти піднапівгрупи $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є також $\mathfrak{C}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}$-еквівалентними. За зауваженням 1(1) напівгрупа $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ ізоморфна біциклічному моноїдові, то з наслідку 1.32 [7] випливає, що конгруенція $\mathfrak{C}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}$ на $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є також груповою, а отже $\mathfrak{C}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}$ не є відношенням рівності на $\mathscr{C}_\mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Припустимо, що конгруенція $\mathscr{C}$ на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є такою, що її звуження $\mathfrak{C}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}$ на піднапівгрупу $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ не є відношенням рівності на $\mathscr{C}_\mathbb{N}$. Оскільки за зауваженням 1(1) напівгрупа $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ ізоморфна біциклічному моноїдові, то з наслідку 1.32 [7] випливає, що конгруенція $\mathfrak{C}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}$ на $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є груповою, а отже всі ідемпотенти напівгрупи $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є $\mathfrak{C}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}$-еквівалентними.

Нехай ε — довільний ідемпотент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Оскільки ε є тотожним відображенням коскінченної підмножини $\operatorname{dom}\varepsilon$

множини натуральних чисел і $(\mathbb{N}, \leqslant)$ — цілком впорядкована множина, то існує найменше натуральне число $n_{\varepsilon}^{\mathbf{d}} \in \operatorname{dom} \varepsilon$ таке, що $n \in \operatorname{dom} \varepsilon$ для всіх натуральних $n \geqslant n_{\varepsilon}^{\mathbf{d}}$. Нехай $\overline{\varepsilon}$ — тотожне відображення множини $\left\{n \in \mathbb{N} \colon n \geqslant n_{\varepsilon}^{\mathbf{d}} + 1\right\}$. Тоді очевидно, що $\overline{\varepsilon}$ — ідемпотент підмоноїда $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$, а оскільки конгруенція $\mathfrak{C}_{\mathscr{C}_{\mathbb{N}}}$ на $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ є груповою, то $\mathbb{I}\mathfrak{C}_{\mathscr{C}_{\mathbb{N}}}\overline{\varepsilon}$, а отже й $\mathbb{I}\mathfrak{C}\overline{\varepsilon}$. Також, легко бачити, що $\overline{\varepsilon} \preccurlyeq \varepsilon \preccurlyeq \mathbb{I}$, де $\preccurlyeq$ — природний частковий порядок на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$, і тоді з відношення $\mathbb{I}\mathfrak{C}\overline{\varepsilon}$ випливає, що $\varepsilon = (\varepsilon\mathbb{I})\mathfrak{C}(\varepsilon\overline{\varepsilon}) = \overline{\varepsilon}$, а отже $\varepsilon\mathfrak{C}\mathbb{I}$. З довільності вибору ідемпотента ε в $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ випливає, що всі ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ є $\mathscr{C}$-еквівалентними. Тоді з твердження 1.4.21(3) з монографії [9] випливає, що $\mathscr{C}$ — групова конгруенція на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$.

З теореми 8 випливає такий наслідок:

Наслідок 4. *Для довільної конгруенції $\mathfrak{C}$ на моноїді $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ виконується лише одна з умов:*

(1) $\mathfrak{C}$ *— групова конгруенція на $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$;*

(2) *звуження природного гомоморфізму $\mathfrak{C}^{\sharp} \colon \mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty} \to \mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}/\mathfrak{C}$ на підмоноїд $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ є тотожним відображенням.*

Також з теорем 5 і 8 випливає наслідок 5.

Наслідок 5. *Нехай напівгрупа не містить ізоморфної копії біциклічного моноїда. Тоді для довільного гомоморфізму $\mathfrak{F} \colon \mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty} \to S$ існує єдиний гомоморфізм $\mathfrak{H} \colon (\mathbb{Z}, +) \to S$ такий, що наступна діаграма*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty} \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d, "\mathfrak{C}^{\sharp}_{\mathbf{mg}}"'] & S \\
(\mathbb{Z}, +) \arrow[ur, "\mathfrak{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

є комутативною.

Лема 2. *Нехай $\mathfrak{C}$ — конгруенція на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$, яка відмінна від групової та тотожної. Тоді існують два різні $\mathfrak{C}$-еквівалентні ідемпотенти ε і ι напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ такі, що $n_{\varepsilon}^{\mathbf{d}} = n_{\iota}^{\mathbf{d}}$.*

Доведення. Оскільки конгруенція $\mathfrak{C}$ на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ відмінна від тотожної, то існують два різні $\mathfrak{C}$-еквівалентні елементи $\gamma, \delta \in \mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$. За твердженням 1 кожен $\mathscr{H}$-клас напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ є одноелементним, то виконується хоча б одна з умов: $\gamma\gamma^{-1} \neq \delta\delta^{-1}$ або $\gamma^{-1}\gamma \neq \delta^{-1}\delta$. Отже, існують два різні $\mathfrak{C}$-еквівалентні ідемпотенти $\varepsilon, \iota \in \mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$. За теоремою 8 елементи ε і ι не можуть одночасно бути ідемпотентами підмоноїда $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$, оскільки конгруенція $\mathfrak{C}$ на $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ не є груповою.

Припустимо, що $n_{\varepsilon}^{\mathbf{d}} > n_{\iota}^{\mathbf{d}}$. Нехай $\overline{\varepsilon}$ — тотожне відображення множини $\left\{k \in \mathbb{N} \colon k \geqslant n_{\iota}^{\mathbf{d}} - 1\right\}$ і $\overline{\iota}$ — тотожне відображення множини $\left\{k \in \mathbb{N} \colon k \geqslant n_{\iota}^{\mathbf{d}}\right\}$. Тоді, очевидно, що $\overline{\varepsilon}, \overline{\iota} \in E(\mathscr{C}_{\mathbb{N}})$ і $\overline{\varepsilon} \neq \overline{\iota}$. Позаяк $\varepsilon\mathfrak{C}\iota$, то $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon\overline{\varepsilon})\mathfrak{C}(\iota\overline{\varepsilon}) = \overline{\iota}$, а отже два різні ідемпотенти підмоноїда $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними. Тоді за теоремою 8 конгруенція $\mathfrak{C}$ є груповою, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що нерівність $n_{\varepsilon}^{\mathbf{d}} > n_{\iota}^{\mathbf{d}}$ не виконується для двох різних $\mathfrak{C}$-еквівалентних ідемпотентів ε і ι напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$.

Аналогічно доводиться, що нерівність $n_{\varepsilon}^{\mathbf{d}} < n_{\iota}^{\mathbf{d}}$ не виконується для двох різних $\mathfrak{C}$-еквівалентних ідемпотентів ε і ι напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$.

Лема 3. *Для елемента ξ моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ наступні умови є еквівалентними:*

(1) $\xi \in \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$;

(2) $n_{\xi}^{\mathbf{d}} = \min\{n \in \mathbb{N} \colon n \in \operatorname{dom} \xi\}$;

(3) $n_{\xi}^{\mathbf{r}} = \min\{n \in \mathbb{N} \colon n \in \operatorname{ran} \xi\}$.

Доведення. Імплікації (1) $\Rightarrow$ (2) та (1) $\Rightarrow$ (3) випливають з означення напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ (див. зауваження 1(1).

Імплікація (2) $\Rightarrow$ (1) випливає із зауваження 1(2). Справді, за лемою 1 елемент ξ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел на коскінченну підмножину в $\mathbb{N}$, а отже маємо. що $(n)\xi = n - n_{\xi}^{\mathbf{d}} + n_{\xi}^{\mathbf{r}}$ для всіх $n \in \operatorname{dom} \xi$. Тоді із зауваження 1(2) випливає, що $\xi = \beta^{n_{\xi}^{\mathbf{d}} - 1}\alpha^{n_{\xi}^{\mathbf{r}} - 1}$.

Еквівалентність умов (2) та (3) є наслідком леми 1, оскільки елемент ξ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел на коскінченну підмножину в $\mathbb{N}$.

Означення 1. *Нехай ξ — довільний елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ такий, що $\xi \notin \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$. Означимо*

$$\underline{n}_\xi^{\mathbf{d}} = \min\{n \in \mathbb{N}\colon n \in \operatorname{dom}\xi\},$$
$$\underline{n}_\xi^{\mathbf{r}} = \min\{n \in \mathbb{N}\colon n \in \operatorname{ran}\xi\},$$
$$\overline{n}_\xi^{\mathbf{d}} = \max\left\{n \in \operatorname{dom}\xi\colon n < n_\xi^{\mathbf{d}}\right\},$$
$$\overline{n}_\xi^{\mathbf{r}} = \max\left\{n \in \operatorname{ran}\xi\colon n < n_\xi^{\mathbf{r}}\right\}.$$

Очевидно, що виконуються наступні умови: $\underline{n}_\xi^{\mathbf{d}} \leqslant \overline{n}_\xi^{\mathbf{d}} < n_\xi^{\mathbf{d}}$, $\underline{n}_\xi^{\mathbf{r}} \leqslant \overline{n}_\xi^{\mathbf{r}} < n_\xi^{\mathbf{r}}$, $(\underline{n}_\xi^{\mathbf{d}})\xi = \underline{n}_\xi^{\mathbf{r}}$ і $(\overline{n}_\xi^{\mathbf{d}})\xi = \overline{n}_\xi^{\mathbf{r}}$, для довільного $\xi \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \setminus \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$. Також, елемент $\xi \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \setminus \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ є ідемпотентом тоді і лише тоді, коли $\underline{n}_\xi^{\mathbf{d}} = \underline{n}_\xi^{\mathbf{r}}$ і $\overline{n}_\xi^{\mathbf{d}} = \overline{n}_\xi^{\mathbf{r}}$.

Лема 4. *Кожен ідемпотент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є одиницею піднапівгрупи в $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі.*

Доведення. Нехай ε — довільний ідемпотент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Якщо $\varepsilon \in \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ і оскільки напівгрупа $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі, то не зменшуючи загальності можемо вважати, що ідемпотент ε можна ототожнити з ідемпотентом q^ip^i біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$, для деякого невід'ємного цілого числа i. Тоді

$$\begin{aligned}
&q^ip^{i+1} \cdot q^{i+1}p^i = q^ip^i,\\
&q^{i+1}p^i \cdot q^ip^{i+1} = q^{i+1}p^{i+1},\\
&q^ip^{i+1} \cdot q^ip^i = q^ip^{i+1},\\
&q^ip^i \cdot q^ip^{i+1} = q^ip^{i+1},\\
&q^{i+1}p^i \cdot q^ip^i = q^{i+1}p^i,\\
&q^ip^i \cdot q^{i+1}p^i = q^{i+1}p^i
\end{aligned}$$

і $q^{i+1}p^{i+1} \neq q^ip^i$, а отже за лемою 1.31 з [7] піднапівгрупа в $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, породжена елементами q^ip^{i+1} і $q^{i+1}p^i$ ізоморфна біциклічній напівгрупі.

Припустимо, що $\varepsilon \notin \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$. Тоді для ідемпотента ε виконуються умови $\underline{n}_\varepsilon^{\mathbf{d}} \leqslant \overline{n}_\varepsilon^{\mathbf{d}} < n_\varepsilon^{\mathbf{d}}$. Означимо часткову біекцію $\gamma\colon \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ так: $\operatorname{dom}\gamma = \operatorname{dom}\varepsilon$,

$$\operatorname{ran}\gamma = \left\{i - \underline{n}_\varepsilon^{\mathbf{d}} + \overline{n}_\varepsilon^{\mathbf{d}}\colon i \in \operatorname{dom}\varepsilon\right\}$$

і $(n)\gamma = n - \underline{n}_\varepsilon^{\mathbf{d}} + \overline{n}_\varepsilon^{\mathbf{d}}$, для всіх $n \in \operatorname{dom}\gamma$. Тоді, очевидно, що $\gamma \in \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ і виконуються такі співвідношення:

$$\varepsilon\gamma = \gamma\varepsilon = \gamma,$$
$$\gamma^{-1}\varepsilon = \gamma^{-1}\varepsilon^{-1} = (\varepsilon\gamma)^{-1} = \gamma^{-1},$$
$$\varepsilon\gamma^{-1} = \varepsilon^{-1}\gamma^{-1} = (\gamma\varepsilon)^{-1} = \gamma^{-1},$$
$$\gamma\gamma^{-1} = \varepsilon \quad \text{і} \quad \gamma^{-1}\gamma \neq \varepsilon,$$

а отже за лемою 1.31 з [7] піднапівгрупа в $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, породжена елементами γ і γ^{-1} ізоморфна біциклічній напівгрупі.

Теорема 9. *Для конгруенції $\mathfrak{C}$ на піднапівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ наступні умови є еквівалентними:*

(1) *$\mathfrak{C}$ — групова конгруенція на $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$;*

(3) *існує піднапівгрупа S в $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі та два різні елементи напівгрупи S є $\mathfrak{C}$-еквівалентними;*

(3) *для довільної піднапівгрупи T в $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі, два різні елементи напівгрупи T є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.*

Доведення. Імплікація (1) $\Rightarrow$ (2) випливає з теореми 8, а імплікації (1) $\Rightarrow$ (3) і (3) $\Rightarrow$ (2) є очевидними.

Доведемо, що виконується імплікація (2) $\Rightarrow$ (1). Припустимо, що S — піднапівгрупа в $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі та два різні елементи напівгрупи S є $\mathfrak{C}$-еквівалентними. Тоді за наслідком 1.32 з [7] усі ідемпотенти напівгрупи S є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.

Нехай ε — одиниця напівгрупи S. З теореми 8 випливає, що не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\varepsilon \notin \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$. Справді, припустивши, що $\varepsilon \in \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$, то, оскільки за лемою 1 кожен елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел, існує елемент $\gamma \in S \cap \mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ такий, що $\operatorname{dom}\varepsilon = \operatorname{dom}\gamma$ і $\gamma \neq \varepsilon$. Тоді $\gamma\gamma^{-1} = \varepsilon$, $\gamma^{-1}\gamma \neq \varepsilon$ і $\gamma, \gamma^{-1}, \gamma^{-1}\gamma \in \mathscr{C}_{\mathbb{N}} \cap S$. А отже, два ідемпотента напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними. Тоді за наслідком 1.32 з [7] і теоремою 8, $\mathfrak{C}$ — групова конгруенція на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$.

Зафіксуємо довільний елемент γ напівгрупи S такий, що $\gamma\mathscr{L}\varepsilon$. Для довільного натурального числа i покладемо

$$\varepsilon_i = \underbrace{\gamma^{-1}\ldots\gamma^{-1}}_{i\text{-разів}}\underbrace{\gamma\ldots\gamma}_{i\text{-разів}}.$$

Тоді, очевидно, що ε_i — ідемпотент напівгрупи S і

$$\underbrace{\gamma\ldots\gamma}_{i\text{-разів}}\underbrace{\gamma^{-1}\ldots\gamma^{-1}}_{i\text{-разів}}=\varepsilon,$$

бо $\gamma\gamma^{-1}=\varepsilon$. Також, оскільки всі $\mathscr{H}$-класи в біциклічному моноїді є тривіальними та його напівгрупа ідемпотентів є ω-ланцюгом, то

$$\operatorname{dom}\varepsilon_{i+1}\subsetneqq\operatorname{dom}\varepsilon_i\subsetneqq\operatorname{dom}\varepsilon$$

для довільного натурального числа i. З $\varepsilon\notin\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ випливає, що

$$\underline{n}^{\mathbf{d}}_{\varepsilon}=\underline{n}^{\mathbf{r}}_{\varepsilon}\leqslant\overline{n}^{\mathbf{d}}_{\varepsilon}=\overline{n}^{\mathbf{d}}_{\gamma^i}<n^{\mathbf{d}}_{\varepsilon}=n^{\mathbf{d}}_{\gamma^i},$$

$$\underline{n}^{\mathbf{d}}_{\varepsilon}=\underline{n}^{\mathbf{r}}_{\varepsilon}<\underline{n}^{\mathbf{r}}_{\gamma^i}\leqslant\overline{n}^{\mathbf{r}}_{\gamma^i}<n^{\mathbf{r}}_{\gamma^i},$$

$$\underline{n}^{\mathbf{r}}_{\gamma^i}<\underline{n}^{\mathbf{r}}_{\gamma^{i+k}},\quad \overline{n}^{\mathbf{r}}_{\gamma^i}<\overline{n}^{\mathbf{r}}_{\gamma^{i+k}}\quad\text{і}\quad n^{\mathbf{r}}_{\gamma^i}<n^{\mathbf{r}}_{\gamma^{i+k}},$$

для довільних натуральних чисел i та k.

Тоді існує таке натуральне число j, що $n^{\mathbf{r}}_{\gamma}\leqslant\underline{n}^{\mathbf{r}}_{\gamma^j}$. Означимо: φ_0,φ_1 і φ_2 — тотожні відображення множин $\left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant\underline{n}^{\mathbf{d}}_{\varepsilon}\right\}$, $\left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n^{\mathbf{d}}_{\varepsilon}\right\}$ і $\left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant\underline{n}^{\mathbf{d}}_{\gamma^j}\right\}$, відповідно. Тоді φ_0,φ_1 і φ_2 — різні ідемпотенти напівгрупи $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$, і оскільки

$$\varepsilon_j\preccurlyeq\varphi_2\preccurlyeq\varphi_1\preccurlyeq\varepsilon\preccurlyeq\varphi_0,$$

то з умови $\varepsilon_j\mathfrak{C}\varepsilon$ випливає, що $\varphi_2\mathfrak{C}\varphi_1$. Оскільки напівгрупа $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}$ ізоморфна біциклічному моноїдові, то за наслідком 1.32 з [7] та теоремою 8, $\mathfrak{C}$ — групова конгруенція на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Безущак, О.О.* (2008). Відношення Ґріна інверсної напівгрупи частково визначених коскінченних ізометрій дискретної лінійки. Вісник Київського університету. Серія фізико-математична, 1, 12–16.

2. *Вагнер, В.В.* (1952). Обобщённые группы. Доклады АН СССР, 84, 1119–1122.

3. *Гутік, О., Савчук, А.* (2017). Про напівгрупу $\mathbf{ID}_{\infty}$. Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична, 83, 5–19.

4. *Andersen, O.* (1952). Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen. PhD Thesis. Hamburg,

5. *Anderson, L.W., Hunter, R.P., & Koch, R.J.* (1965). Some results on stability in semigroups. Transactions of the American Mathematical Society, 117, 521–529. DOI: 10.1090/S0002-9947-1965-0171869-7

6. *Bezushchak, O.* (2004). On growth of the inverse semigroup of partially defined co–finite automorphisms of integers. Algebra and Discrete Mathematics, 2, 45–55.

7. *Clifford, A.H., & Preston, G.B.* (1961, 1972). The algebraic theory of semigroups. Vols. 1 and 2. Providence, RI: American Mathematical Society.

8. *Gutik, O., & Repovš, D.* (2011). Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of $\mathbb{N}$ having cofinite domain and image. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 48(3), 342–353. DOI: 10.1556/SScMath.48.2011.3.1176

9. *Lawson, M.* (1998). Inverse semigroups. The theory of partial symmetries. Singapore: World Scientific.

10. *McFadden, R., & O'Carroll, L.* (1971). *F*-inverse semigroups. Proceedings of the London Mathematical Society, III Serie, 22(4), 652–666. DOI: 10.1112/plms/s3-22.4.652

11. *Petrich, M.* (1984). Inverse semigroups. New York, NY: John Wiley & Sons.