УДК 517.956

©2018 р. Г.П. Вережак, В.В. Городецький

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛОКАЛЬНОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Знайдено умови обмеженості розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі як функції часової змінної в околі точки $t = 0$.

Ключові слова: нелокальна багатоточкова за часом задача, узагальнені простори типу S, узагальнені функції.

The condition of the restriction of the solution of a nonlocal problem multipoint in time as a function of the time variable at the point $t = 0$ is found.

Keywords: a nonlocal multipoint by time problem, generalized spaces of type S, generalized functions.

У праці [1] встановлено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором Бесселя нескінченного порядку в класі початкових умов, який складається з узагальнених функцій нескінченного порядку. Розв'язок $u(t, x)$ такої задачі дається у вигляді згортки фундаментального розв'язку з узагальненою початковою функцією, при цьому $u(t, \cdot)$ є елементом основного простору при кожному $t \in (0, T]$. У той же час, як це випливає з властивостей фундаментального розв'язку, функція $u(t, x)$, як функція t при деяких значеннях аргумента x, є необмеженою функцією в околі точки $t = 0$: $\lim\limits_{t\to+0} u(t, x) = +\infty$ (див. приклад далі). Природньо постає задача: виділити клас X' узагальнених функцій (початкових функцій) та множини $M \subset \mathbb{R}$ зміни аргумента x такі, що $\sup\limits_{t\in(0,T]} |u(t, x)| \le c$, $c = c(M) > 0$. У даній роботі знайдено клас параболічних сингулярних рівнянь та клас фінітних узагальнених функцій, для яких поставлена задача має позитивне рішення.

1. Простори типу S та S'. І.М. Гельфанд та Г.Є. Шилов в [2] запропонували метод побудови функціональних просторів нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності і які задаються за допомогою нерівностей $|x^k\varphi^{(n)}(x)| \le c_{kn}$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $\{c_{kn}\}$ – подвійна послідовність додатних чисел. Якщо ці числа змінюються довільним чином, то маємо простір $S \equiv S(\mathbb{R})$ Л. Шварца швидко спадних на $\mathbb{R}$ функцій. Якщо $c_{kn} = l_k m_n$, то маємо простори, які називаються в [2] узагальненими просторами типу S. У випадку, коли $l_k = k^{k\alpha}$, $\alpha > 0$, $m_n = n^{n\beta}$, $\beta > 0$; відповідні простори називаються просторами типу S і позначаються символами S_α, S^β, S_α^β. Означимо деякі з них.

Для довільних $\alpha, \beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta := \{\varphi \in S \,|\, \exists c > 0\, \exists A > 0\, \exists B > 0$$

$$\forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+\ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)| \le cA^k B^n k^{k\alpha} n^{n\beta}\}.$$

Введені простори можна охарактеризувати так [2]. Простори S_α^β нетривіальні при $\alpha + \beta \ge 1$ і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини. S_α^β складається з тих й лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності $|\varphi^{(n)}(x)| \le cB^n n^{n\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$.

Простір S_α^1 складається з функцій φ, які допускають аналітичне продовження в деяку смугу $|Im\, z| < \delta$, $\delta > 0$, $z = x + iy$, залежну від φ і задовольняють нерівність $|\varphi(x + iy)| \le c\, exp(-a|x|^{1/\alpha})$, $c > 0$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \ge \beta$, то S_α^β складається з тих і лише тих функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в комплексну площину і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x+iy)| \le c\exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\},$$

$c,\ a,\ b > 0$.

Топологічна структура в просторі S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, $A, B > 0$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову:

$$\forall\delta>0\,\forall\rho>0\,\exists c_{\delta\rho}>0 : |x^k\varphi^{(n)}(x)| \le$$
$$\le c_{\delta\rho}(A+\delta)^k(B+\rho)^n k^{k\alpha} n^{n\beta},$$

$\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$. Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k\varphi^{(n)}(x)|}{(A+\delta)^k(B+\rho)^n k^{k\alpha} n^{n\beta}},$$

$\{\delta,\rho\} \subset \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$.

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup\limits_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$.

Із результатів, наведених в [2] випливає, що послідовність $\{\varphi_\nu,\ \nu \ge 1\} \subset S_\alpha^\beta$ збігається до нуля в цьому просторі, якщо функції φ_ν та їхні похідні довільного порядку збігаються до нуля рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$ і при цьому виконуються нерівності

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)| \le cA^kB^nk^{k\alpha}n^{n\beta}, \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

з деякими сталими $c, A, B > 0$ не залежними від ν.

Функція g називається мультиплікатором в просторі S_α^β, якщо $g\psi \in S_\alpha^\beta$ для довільної функції $\psi \in S_\alpha^\beta$ і відображення $\psi \to g\psi$ є лінійним і неперервним оператором в S_α^β. Мультиплікатором у просторі S_α^β є кожна функція $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, яка задовольняє умову $\forall\varepsilon>0\,\exists c_\varepsilon>0\,\forall m \in \mathbb{Z}_+\,\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|g^{(m)}(x)| \le c_\varepsilon \varepsilon^m m^{m\beta} \exp\{\varepsilon|x|^{1/\alpha}\}.$$

Зауважимо, що кожна функція з відповідного простору S_α^β задовольняє вказану умову і тому в просторах S_α^β операція множення функцій є визначеною і неперервною. При $\beta > 1$ простір S_α^β містить фінітні функції.

Простори типу S є також досконалими [2], тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні.

Символом $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ позначимо сукупність усіх парних функцій з простору S_α^β. Оскільки $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ утворює підпростір S_α^β, то в $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ природним способом вводиться топологія. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором, а його елементи – основними функціями. У просторі $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ визначені й неперервні оператори множення на x^2, $\frac{d^2}{dx^2}$, $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}$, а також оператор Бесселя $B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{d}{dx}$, $\nu > -\frac{1}{2}$ – фіксований параметр.

Із результатів, отриманих в [3] випливає, що якщо парна нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція задовольняє умови

$$\exists\, c, A, B > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall \{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$
$$|x^{2k}\varphi^{(2q)}(x)| \le cA^kB^qk^{2k\alpha}q^{2q\beta} \tag{А}$$

(сталі $c, A, B > 0$ залежать від функції φ), то

$$\exists\, c_1, A_1, B_1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall \{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$
$$|x^{2k}B_\nu^q\varphi(x)| \le c_1A_1^kB_1^qk^{2k\alpha}q^{2q\beta} \tag{Б}$$

і навпаки. Отже, кожна функція $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ задовольняє умову (А) та умову (Б).

Прикладом мультиплікатора у просторі $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ може служити нормована функція Бесселя j_ν, $\nu > -1/2$, яка є розв'язком задачі Коші $B_\nu u + \lambda u = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$. У просторах $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ визначені пряме та обернене перетворення Бесселя [3]

$$\psi(\sigma) = F_{B_\nu}[\varphi](\sigma) = \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx,$$

$$\sigma \in \mathbb{R},$$

$$\varphi(x) = F_{B_\nu}^{-1}[\psi](x) = c_\nu \int\limits_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

$$x \in \mathbb{R},\ c_\nu = 2^{-2\nu}\Gamma^{-2}(\nu+1),$$

при цьому має місце формула $F_{B_\nu}\left[\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta\right] = \overset{\circ}{S}{}_\beta^\alpha$ [3], оператор F_{B_ν} є неперервним.

Символом T_x^ξ позначимо оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору Бесселя [4]:

$$T_x^\xi\varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega})\cdot$$

$$\cdot \sin^{2\nu}\omega d\omega,\ \varphi\in \overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta,$$

$b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$. Операція узагальненого зсуву $\varphi\to T_x^\xi\varphi$ визначена і є диференційовною (навіть нескінченно диференційовною) в просторі $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ у тому розумінні, що граничні співвідношення $\frac{1}{\Delta\xi}\left[T_x^{\xi+\Delta\xi}\varphi - T_x^\xi\varphi\right]\to\frac{\partial}{\partial\xi}T_x^\xi\varphi$, $\Delta\xi\to 0$, справджуються в просторі $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ [5].

Згортка двох функцій з простору $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ визначається формулою

$$(\varphi*\psi)(x) = \int\limits_0^\infty T_x^\xi\varphi(x)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi,$$

при цьому $\varphi*\psi\in\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$, $F_{B_\nu}[\varphi*\psi] = F_{B_\nu}[\varphi]\cdot F_{B_\nu}[\psi]$, $\forall\{\varphi,\psi\}\subset\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ (див. [5]).

Символом $(\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta)'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на відповідному просторі основних функцій зі слабкою збіжністю. Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називатимемо лінійні неперервні функціонали, дія яких на основні функції $\varphi\in\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ визначається формулою

$$\langle f,\varphi\rangle = \int\limits_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx.$$

Кожна локально інтегровна з вагою $x^{2\nu+1}$ парна функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ породжує регулярну узагальнену функцію $F_f\in(\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta)'$: $\langle F_f,\varphi\rangle = \int\limits_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx$, $\forall\varphi\in\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$. Оскільки в просторі $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ визначена операція узагальненого зсуву аргумента, то згортку узагальненої функції $f\in(\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta)'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f*\varphi)(x) = \langle f_\xi, T_x^\xi\varphi(x)\rangle = \langle f_\xi, T_\xi^x\varphi(\xi)\rangle, \varphi\in\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$$

(індекс ξ у f_ξ означає, що функціонал f діє на основну функцію $T_\xi^x\varphi(\xi)$ як функцію аргумента ξ).

Нехай $f\in(\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta)'$. Якщо $f*\varphi\in\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$, $\forall\varphi\in\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ і із співвідношення $\varphi_\nu\to 0$ при $\nu\to\infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ випливає, що $f*\varphi_\nu\to 0$ при $\nu\to\infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$. Символом $(\overset{\circ}{S}{}_{\alpha,*}^\beta)'$ позначатимемо сукупність узагальнених функцій $f\in(\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta)'$, які є згортувачами у просторі $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$.

Перетворення Бесселя узагальненої функції $f\in(\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta)'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F_{B_\nu}[f],\varphi\rangle = \langle f, F_{B_\nu}[\varphi]\rangle,\ \forall\varphi\in\overset{\circ}{S}{}_\beta^\alpha.$$

Отже, перетворення Бесселя узагальненої функції f, заданої на $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$, є узагальненою функцією на просторі $\overset{\circ}{S}{}_\beta^\alpha$. Якщо узагальнена функція $f\in(\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta)'$ – згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$, то для довільної функції $\varphi\in\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ правильною є формула [5]: $F_{B_\nu}[f*\varphi] = F_{B_\nu}[f]F_{B_\nu}[\varphi]$, при цьому $F_{B_\nu}[f]$ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}_\beta^\alpha$.

2.Нелокальна за часом задача. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{dt} = (-1)^{b-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2\nu+1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^b u(t,x),$$

$$(t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}_+, \qquad (1)$$

де $b\in\mathbb{N}$, $\nu\in\{3/2,\ 5/2,\ 7/2,...\}$ – фіксовані параметри. Для (1) поставимо задачу: знайти розв'язок $u\in C^1((0,T],\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta)$ рівняння (1), який задовольняє умову

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k\lim_{t\to t_k}u(t,\cdot) = f,$$

$$f\in(\overset{\circ}{S}{}_{\alpha,*}^\beta)', \qquad (2)$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, ..., \mu_m\} \subset (0, T]$, $\{t_1, ..., t_m\} \subset (0, T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > m \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq T$. Співвідношення (2) розглядається в просторі $(\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta})'$, тобто (2) трактується в тому сенсі, що

$$\mu \lim_{t \to +0} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

$\forall \varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}$ (конкретні значення параметрів $\alpha, \beta > 0$ вкажемо пізніше). Зазначимо, що задачу (1), (2) можна розуміти як узагальнення задачі Коші, коли початкова умова $u(t, \cdot)|_{t=0} = f$ замінюються умовою (2) (якщо $\mu = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_m = 0$, то, маємо, очевидно, задачу Коші). Задача (1), (2) відноситься до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними (див. [6-12]).

Із результатів, наведених в [1] випливає, що символом оператора $A_\psi = (-1)^{b-1} B_\nu^b$ в (1) є функція $\psi(\sigma) = -\sigma^{2b}$, $\sigma \in \mathbb{R}$; задача (1), (2) коректно розв'язна (у вказаному сенсі) за умови, що $f \in (\overset{\circ}{W}{}_{\Omega}^{M})'$, $M(x) = x^p/p$, $\Omega(y) = y^q/q$, $p = 2b$, $1/p + 1/q = 1$. Простір W_{Ω}^{M} відноситься до просторів типу W, введених в [13], при цьому $\overset{\circ}{W}{}_{y^q/q}^{x^p/p} = \overset{\circ}{S}{}_{1/q}^{1/p} = \overset{\circ}{S}{}_{1-1/p}^{1/p}$. Розв'язок задачі (1), (2) дається формулою $u(t, x) = f * G(t, x) = \langle f_\xi, T_\xi^x G(t, \xi) \rangle$, де $G(t, \xi) = F_{B_\nu}^{-1}[Q(t, \sigma)](\xi)$, $Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma) Q_2(\sigma)$, $Q_1(t, \sigma) = \exp\{-t\sigma^{2b}\}$,

$$Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k \sigma^{2b}\}\right)^{-1}, \sigma \in \mathbb{R}.$$

$Q(t, \cdot) \in \overset{\circ}{W}{}_{x^p/p}^{y^q/q} = \overset{\circ}{S}{}_{1/p}^{1-1/p}$, $p = 2b$, $G(t, \cdot) \in \overset{\circ}{W}{}_{y^q/q}^{x^p/p} = \overset{\circ}{S}{}_{1-1/p}^{1/p}$, $t \in (0, T]$, $Q_1(t, \cdot) \in \overset{\circ}{S}{}_{1/p}^{1-1/p}$ при кожному $t > 0$.

Проаналізувавши доведення теореми 3 з [2, с. 259], безпосередньо переконуємося в тому, що для функції $Q_1(t, \sigma)$ та її похідних (за змінною σ) справджуються оцінки

$$|D_\sigma^q Q_1(t, \sigma)| \leq c B^q t^{q/(2b)} q^{q(1-1/(2b))} \exp\{-t\sigma^{2b}\},$$
$$q \in \mathbb{Z}_+, \, t \in (0, 1), \tag{3}$$

де сталі c, B, > 0 не залежать від t. Оцінимо, далі, похідні функції $Q_2(\sigma)$. Оскільки $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, то $\frac{1}{\mu} \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k \sigma^{2b}\} \leq \frac{1}{\mu} \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k < 1$. Скориставшись поліноміальною формулою, знайдемо, що

$$Q_2(\sigma) = \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-r} \left(\sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k \sigma^{2b}\}\right)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1 + \cdots + r_m = r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!} \cdot$$

$$\cdot \left(\mu_1 \exp\{-t_1 \sigma^{2b}\}\right)^{r_1} \ldots \left(\mu_m \exp\{-t_m \sigma^{2b}\}\right)^{r_m} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1 + \cdots + r_m = r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!} \mu_1^{r_1} \ldots \mu_m^{r_m} \cdot$$

$$\cdot \exp\{-\omega \sigma^{2b}\},$$

де $\omega = t_1 r_1 + \cdots + t_m r_m$. Тоді

$$D_\sigma^q Q_2(\sigma) = \sum_{r=1}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1 + \ldots r_m = r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!} \cdot$$

$$\cdot \mu_1^{r_1} \ldots \mu_m^{r_m} D_\sigma^q e^{-\omega \sigma^{2b}}.$$

З урахуванням (3)

$$|D_\sigma^q e^{-\omega \sigma^{2b}}| \leq c_1 B_1^q q^{q(1-1/(2b))} e^{-\omega \sigma^{2b}}, c_1, B_1 > 0.$$

Зауважимо, що $\omega < t_m r$, $\omega > t_1 r$. Оскільки $0 < t_1 < 1$, а $r \geq 1$, то $\omega > t_1^2$. Отже, правильною є нерівність

$$|D_\sigma^q e^{-\omega \sigma^{2b}}| \leq c_1 B_2^q q^{q(1-1/(2b))} r^q \exp\{-t_1^2 \sigma^{2b}\},$$

$q \in \mathbb{N}$, $B_2 = B_1 t_m^{1/(2b)}$. Тоді

$$|D_\sigma^q Q_2(\sigma)| \leq c_1 \mu^{-1} B_2^q q^{q(1-1/(2b))} \sum_{r=1}^{\infty} \mu^{-r} \mu_0^r r^q \cdot$$

$$\cdot \sum_{r_1 + \ldots r_m = r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!} \exp\{-t_1^2 \sigma^{2b}\},$$

де $\mu_0 = \max\{\mu_1, ..., \mu_m\}$. Скориставшись формулою

$$\sum_{r_1 + \ldots r_m = r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!} = m^r,$$

знайдемо, що

$$|D_\sigma^q Q_2(\sigma)| \le c_1 \mu^{-1} B_2^q q^{q(1-1/(2b))} \sum_{r=1}^{\infty} \mu^{-r} \mu_0^r r^q \cdot$$

$$\cdot \exp\{-t_1^2 \sigma^{2b}\}.$$

Оскільки $\tilde{\mu} = \mu^{-1}\mu_0 m < 1$, то звідси випливає збіжність ряду $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \tilde{\mu}^r r^q = \alpha < +\infty$. Отже,

$$|D_\sigma^q Q_2(\sigma)| \le c_2 B_2^q q^{q(1-1/(2b))} \exp\{-t_1^2 \sigma^{2b}\},$$

$$c_2 = c_1 \mu^{-1} \alpha,\ q \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Зауважимо, що сама функція Q_2 є обмеженою на $\mathbb{R} : |Q_2(\sigma)| = Q_2(\sigma) \le (\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k)^{-1}$. Із оцінок (4) та обмеженості функції Q_2 на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{1-1/(2b)}_{1/(2b)}$. Введемо позначення: $\nu = n + 1/2$, $n \in \mathbb{N}$ і скористаємося зображенням бесселевих функцій півцілого порядка [14]: $J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin(x - \frac{n\pi}{2}) P_n(\frac{1}{x}) + \cos(x - \frac{n\pi}{2}) Q_n(\frac{1}{x}) \right\}$, $x > 0$, де $P_n(\frac{1}{x})$ – многочлен степеня n відносно $\frac{1}{x}$, $Q_n(\frac{1}{x})$ – многочлен степеня $n-1$; при цьому $P_n(0) = 1$, $Q_n(0) = 0$. Наприклад,

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{x}\cos(x - \frac{\pi}{2}) \right\},$$

$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \{ (1 - \frac{3}{x^2}) \sin(x - \pi) +$$

$$+ \frac{3}{x} \cos(x - \pi) \}.$$

Оскільки нормована функція Бесселя j_ν пов'язана з функцією Бесселя J_ν формулою (див. [4]) $j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1/2)}{x^\nu} J_\nu(x)$, $x > 0$, то маємо таке зображення функції $j_{n+1/2}$:

$$j_{n+1/2}(x) = \frac{\alpha_n}{x^{n+1/2}} \{ \sin(x - \frac{n\pi}{2}) P_n(\frac{1}{x}) +$$

$$+ \cos(x - \frac{n\pi}{2}) Q_n(\frac{1}{x}) \},\ n \in \mathbb{N},\ x > 0.$$

Нехай $P_n(\frac{1}{x}) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x_k}$, $Q_n(\frac{1}{x}) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{d_k}{x_k}, x > 0$,

$$\tilde{G}_{2s}(t,x) = F_{B_\nu}^{-1}[\sigma^{2s} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma)] =$$

$$= c_\nu \int_0^\infty \sigma^{2s} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= \tilde{c}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^{2s} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

$\tilde{c}_\nu = \frac{1}{2} c_\nu$, $s \in \mathbb{Z}$ – фіксоване. Урахувавши вигляд нормованої функції Бесселя j_ν, $\nu \in \{3/2, 5/2, ...\}$ знайдемо, що $\tilde{G}_{2s}(t,x) = \Psi_1(t,x) + \Psi_2(t,x)$, $x \ne 0$, де

$$\Psi_1(t,x) = \tilde{\alpha}_n \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x^{n+k+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-k+1+2s} \cdot$$

$$\cdot \sin(x\sigma - \frac{n\pi}{2}) d\sigma,\ x \ne 0,$$

$$\Psi_2(t,x) = \tilde{\alpha}_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d_k}{x^{n+k+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-k+1+2s} \cdot$$

$$\cdot \cos(x\sigma - \frac{n\pi}{2}) d\sigma,\ x \ne 0,$$

$$\Psi_1(t,x) = \tilde{\alpha}_n \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x^{n+k+1}} I_{1,k}(t,x),$$

$$I_{1,k}(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-k+1+2s} \cdot$$

$$\cdot \sin(x\sigma - \frac{n\pi}{2}) d\sigma,\ x \ne 0,$$

$$\Psi_2(t,x) = \tilde{\alpha}_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d_k}{x^{n+k+1}} I_{2,k}(t,x),$$

$$I_{2,k}(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-k+1+2s} \cdot$$

$$\cdot \cos(x\sigma - \frac{n\pi}{2}) d\sigma,\ x \ne 0,$$

Оцінимо $I_{1,k}(t,x), x \ne 0$, зінтегрувавши частинами q разів відповідний інтеграл, де $q = n - k + 2 + 2s + p$, $p \in \mathbb{N}$ – довільно фіксований параметр. У результаті прийдемо до нерівностей

$$|I_{1,k}(t,x)| \le$$

$$\leq \frac{1}{|x|^q}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|D_\sigma^q(Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s})|d\sigma \leq$$

$$\leq \frac{1}{|x|^q}[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|D_\sigma^q Q_1(t,\sigma)||Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s}|d\sigma+...+$$

$$+C_q^l\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|D_\sigma^{q-l}Q_1(t,\sigma)||D_\sigma^l Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s}|d\sigma+...+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q_1(t,\sigma)|\cdot|D_\sigma^q Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s}|d\sigma].$$

Зауважимо, що позаінтегральні доданки рівні нулеві, оскільки функція $Q_1(t,\sigma)$ та всі її похідні (за змінною σ) прямують до нуля при $x \to \pm\infty$ (див. [3]). Скориставшись ще один раз формулою диференціювання добутку двох функцій та оцінками (4), прийдемо до нерівності

$$|D_\sigma^l(Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s})| \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=0}^{l}C_l^\nu|D_\sigma^\nu Q_2(\sigma)||D_\sigma^{l-\nu}\sigma^{n-k+1+2s}| =$$

$$= Q_2(\sigma)|D_\sigma^l\sigma^{n-k+1+2s}| + \sum_{\nu=1}^{l}C_l^\nu|D_\sigma^\nu Q_2(\sigma)|\cdot$$

$$\cdot|D_\sigma^{l-\nu}\sigma^{n-k+1+2s}| \leq Q_2(\sigma)|D_\sigma^l\sigma^{n-k+1+2s}|+$$

$$+c_2\sum_{\nu=1}^{l}C_l^\nu B_2^\nu \nu^{\nu(1-1/(2b))}(n+1+2s)^{l-\nu}\cdot$$

$$\cdot\sup_{|\sigma|}\left(|\sigma|^{n-k+1+2s}\exp\left\{-\frac{t_1^2}{2}|\sigma|^{2b}\right\}\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{t_1^2}{2}|\sigma|^{2b}\right\}.$$

Зауважимо, що

$$\sup_{|\sigma|}\left(|\sigma|^{n-k+1+2s}\exp\left\{-\frac{t_1^2}{2}|\sigma|^{2b}\right\}\right) \leq$$

$$\leq B_3^{n+1+2s}(n+1+2s)^{(n+1+2s)/(2b)} \leq B_4B_5s^{2s/(2b)},$$

$$B_4 = B_4(n) > 0,\ B_5 = B_5(n) > 0.$$

Отже,

$$|D_\sigma^l(Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s})| \leq$$

$$(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k)^{-1}|D_\sigma^l\sigma^{n-k+1+2s})|+$$

$$+L_1B_5^s s^{2s/(2b)}L_2^l l^{l(1-1/(2b))}\exp\{-\frac{t_1^2}{2}|\sigma|^{2b}\}, \quad (5)$$

де L_1, B_5, L_2 – додатні сталі. Для проведення подальших досліджень оцінимо інтеграл вигляду

$$\int\limits_0^\infty\sigma^j e^{-t\sigma^{2b}}d\sigma = \int\limits_0^\infty\sigma^j e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}}e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}}d\sigma.$$

Зауважимо, що $\sigma^j \leq j!e^\sigma$, $\sigma \geq 0$; $\sigma \leq \varepsilon\sigma^{2b}+c_1$ для довільного $\varepsilon > 0$ і $c_1 > 1$. Тоді

$$\sigma^j e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}} \leq j!e^{c_1}e^{\varepsilon\sigma^{2b}}e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}} = j!e^{c_1}e^{-\frac{t}{4}\sigma^{2b}},$$

якщо покласти $\varepsilon = t/2$. Далі скористаємося формулою

$$e^{-\frac{t}{4}\sigma^{2b}} = -\int\limits_\sigma^{+\infty}(e^{-\frac{t}{4}y^{2b}})'_y dy =$$

$$= \frac{tb}{2}\int\limits_\sigma^{+\infty}y^{2b-1}e^{-\frac{t}{4}y^{2b}}dy \leq \frac{tb}{2}\int\limits_0^{+\infty}y^{2b-1}e^{-\frac{t}{4}\sigma^{2b}}dy.$$

Маємо, що

$$y^{2b-1}e^{-\frac{t}{4}y^{2b}} \leq (2b-1)!e^y e^{-\frac{t}{4}y^{2b}} \leq$$

$$\leq (2b-1)!e^{c_1}e^{\varepsilon y^{2b}-\frac{t}{4}y^{2b}} = (2b-1)!e^{c_1}e^{-\frac{t}{8}y^{2b}},$$

якщо покласти $\varepsilon = t/8$. Тоді

$$\sigma^j e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}} \leq j!e^{c_1}\frac{tb}{2}(2b-1)!e^{c_1}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t}{8}y^{2b}}dy =$$

$$\overset{t^{1/(2b)}y=z}{=\!=\!=} \frac{(2b)!}{4}j!e^{2c_1}tt^{-1/(2b)}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^\infty\exp\{-\frac{1}{8}z^{2b}\}dz = \alpha t^{1-1/(2b)}.$$

Отже,

$$\int\limits_0^\infty\sigma^j e^{-t\sigma^{2b}}d\sigma \leq \alpha t^{1-1/(2b)}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}}d\sigma =$$

$$= \alpha_1 t^{1-1/(2b)}t^{-1/(2b)} = \alpha_1 t^{1-1/(2b)} \leq \alpha_1 \quad (6)$$

для $t \in (0,1)$ $(1-1/(2b) \geq 0$, оскільки $b \geq 1)$. З урахуванням (3), (5), (6) прийдемо до нерівностей

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |D_\sigma^{q-l} Q_1(t,\sigma)| \cdot |D_\sigma^l (Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s})| d\sigma \leq$$

$$\leq \alpha_0 L_3 t^{1-1/(2b)} B_5^s s^{2s/(2b)} B_6^q q^{q(1-1/(2b))}\cdot$$

$$\cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\frac{t_1^2}{2}|\sigma|^{2b}\} d\sigma \leq$$

$$\leq \alpha_1 B_5^s s^{2s/(2b)} B_6^q q^{q(1-1/(2b))} t^{1-1/(2b)},$$

$1 \leq l \leq q$, $t \in (0,1)$. Окремо оцінимо інтеграл

$$I := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |D_\sigma^q Q_1(t,\sigma)| |Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s}| d\sigma,$$

оскільки в цьому випадку $Q_2(\sigma)$ є лише обмеженою на $\mathbb{R}$ функцією. Для цього в оцінках (3) похідних функції $Q_1(t,\sigma)$ врахуємо множник $t^{q/(2b)}$, оскільки тут $q \geq 1$. Тоді

$$I = c\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\right)^{-1} t^{q/(2b)} q^{q(1-1/(2b))}\cdot$$

$$\cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\sigma|^{n-k+1+2s} \exp\{-t|\sigma|^{2b}\} \overset{t^{1/(2b)}\sigma=y}{=\!=\!=\!=}$$

$$= \tilde{c} B^q t^{q/(2b)} q^{q(1-1/(2b))} t^{-1/(2b)} t^{-(n-k+1+2s)/(2b)}\cdot$$

$$\cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|^{n-k+1+2s} \exp\{-|y|^{2b}\} dy.$$

Нагадаємо, що $q = n-k+2+2s+p$, $p \in \mathbb{N}$, тому $t^{q/(2b)} t^{-(n-k+2+2s)/(2b)} = t^{p/(2b)} \leq 1$, $t \in (0,1)$. Крім того,

$$\Lambda := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|^{n-k+1+2s} \exp\{-|y|^{2b}\} dy \leq$$

$$\leq 2\sup_{y\geq 0}\left(y^{n-k+1+2s}\exp\left\{-\frac{1}{2}y^{2b}\right\}\right)\cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^{2b}\right\} dy.$$

Урахувавши співвідношення $\sup\limits_{y\geq 0}\left(y^m \exp\left\{-\frac{1}{2}y^{2b}\right\}\right) \leq (\frac{2m}{b})^{m/(2b)} e^{-m/b}$, $m = n-k+1+2s \leq n+1+2s$, знайдемо, що $\Lambda \leq F_1 F_2^s s^{2s/(2b)}$, де $F_1 = F_1(n) > 0$, $F_2 = F_2(n) > 0$. Тоді $I \leq \tilde{F}_1 \tilde{F}_2^s s^{2s/(2b)} F_3^q q^{q(1-1/(2b))}$. Урахувавши всі ці нерівності, прийдемо до оцінки

$$|I_{1,k}(t,x)| \leq \beta_1 |x|^{-q} \beta_2^s \beta_3^q s^{2s/(2b)} q^{q(1-1/(2b))},$$
$$t \in (0,1),\ x \neq 0, \tag{7}$$

$q = n-k+2+2s+p$, $p \in \mathbb{N}$ – довільно фіксоване. Нерівністю (7) скористаємося при оцінюванні $|\Psi_1(t,x)|$:

$$|\Psi_1(t,x)| \leq \tilde{\beta}_1 |x|^{-2(\nu+1)-2s-p} \tilde{\beta}_2^s \tilde{\beta}_3^p\cdot$$
$$\cdot s^{2s/(2b)} s^{2s/(1-1/(2b))} p^{p(1-1/(2b))} =$$
$$= \tilde{\beta}_1 |x|^{-2(\nu+1)-2s-p} \tilde{\beta}_2^s \tilde{\beta}_3^p s^{2s} p^{p(1-1/(2b))},$$
$$t \in (0,1), x \neq 0.$$

Функція $\Psi_2(t,x)$, $x \neq 0$, оцінюється аналогічно. Підсумуємо отримані результати у вигляді наступного твердження.

Лема 1. *Функція $\tilde{G}_{2s}(t,x)$, $x \neq 0$, $t \in (0,1)$, задовольняє нерівність*

$$|\tilde{G}_{2s}(t,x)| \leq M_1 |x|^{-2(\nu+1)-2s-p} M_1^s M_2^p\cdot$$
$$\cdot s^{2s} p^{p(1-1/(2b))}, s \in \mathbb{Z}_+ \tag{8}$$

де сталі $M_1, M_2, M_3 > 0$ не залежать від t, $p \in \mathbb{N}$ – довільно фіксований параметр.

Наслідок 1. *Якщо $|x-\xi| \geq a_0 > 0$, $x \geq 0$, $\xi \geq 0$, то правильними є оцінки*

$$|B_{\nu,\xi}^s T_\xi^x G(t,\xi)| \leq L_0 |x-\xi|^{-2(\nu+1)-2s-p} L_1^s L_2^p\cdot$$
$$\cdot s^{2s} p^{p(1-1/(2b))}, t \in (0,1), s \in \mathbb{Z}_+ \tag{9}$$

де сталі $L_0, L_1, L_2 > 0$ не залежать від t, $p \in \mathbb{N}$ – довільно фіксований параметр.

Доведення. Згідно з властивостями операторів Бесселя та узагальненого зсуву [15, 4] маємо

$$B_{\nu,\xi}^s T_\xi^x F_{B_\nu}[\varphi](\xi) = T_\xi^x (\int\limits_0^\infty \varphi(\sigma)(-\sigma^2)^s\cdot$$

$$\cdot j_\nu(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1}d\sigma) = (-1)^s T_\xi^x F_{B_\nu}[\sigma^{2s}\varphi(\sigma)](\xi).$$

Тоді

$$B_{\nu,\xi}^s T_\xi^x G(t,\xi) = (-1)^s T_\xi^x F_{B_\nu}^{-1}[\sigma^{2s} Q(t,\sigma)] =$$

$$= (-1)^s T_\xi^x \tilde{G}_{2s}(t,\xi),\ Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma).$$

Зауважимо, що

$$T_\xi^x \tilde{G}_{2s}(t,\xi) = c_\nu T_\xi^x(\int\limits_0^\infty \sigma^{2s} Q(t,\sigma) j_\nu(\sigma\xi)\cdot$$

$$\cdot\sigma^{2\nu+1}d\sigma) = c_\nu b_\nu \int\limits_0^\pi (\int\limits_0^\infty \sigma^{2s} Q(t,\sigma)\cdot$$

$$\cdot j_\nu(\sigma\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega})\sigma^{2\nu+1}d\sigma)\sin^{2\nu}\omega d\omega.$$

Оцінку інтеграла

$$\int\limits_0^\infty \sigma^{2s} Q(t,\sigma) j_\nu(\sigma\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega})\sigma^{2\nu+1}d\sigma$$

здійснюємо за схемою оцінювання функції $F_{B_\nu}^{-1}[\sigma^{2s}Q(t,\sigma)] = \tilde{G}_{2s}(t,\xi)$, $\xi \neq 0$. Урахувавши (8), а також нерівність $\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega} \geq |x-\xi|$, $x \geq 0$, $\xi \geq 0$, $\omega \in [0,\pi]$, прийдемо до оцінки (9).

Зауваження 1. *З наслідку 1 та умов (А), (Б) випливає, що правильною є нерівність*

$$|D_\xi^{2s} T_\xi^x G(t,\xi)| \leq$$

$$\leq \tilde{L}_0|x-\xi|^{-2(\nu+1)-2s-p}\tilde{L}_1^s\tilde{L}_2^p s^{2s}p^{p(1-1/(2b))} \quad (10)$$

з деякими сталими $\tilde{L}_0, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2 > 0$, не залежними від t, якщо $|x-\xi| \geq a_0 > 0$, де $p \in \mathbb{N}$ – довільно фіксований параметр.

Нехай узагальнена функція f в умові (2) є елементом простору $(\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)})' \subset (S^{1/(2b)}_{1-1/(2b)})', \beta > 1$. Оскільки в основному просторі $S^{\beta}_{1-1/(2b)}$ при $\beta > 1$ є фінітні функції [2], то в просторі $(S^{\beta}_{1-1/(2b)})', \beta > 1$ є фінітні узагальнені функції, тобто функції, носіями яких є обмежені множини. Зазначимо, що кожна фінітна узагальнена функція є згортувачем у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}, \beta > 1$. Ця властивість випливає із загального результату, який відноситься до теорії досконалих просторів (див. [2]): якщо Φ – досконалий простір із диференційовною операцією зсуву, то кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі Φ. Відповідно, якщо $\overset{\circ}{\Phi}$ – досконалий простір, який складається з парних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій з диференційовною операцією узагальненого зсуву аргумента, то кожна фінітна узагальнена функція з простору $(\overset{\circ}{\Phi})'$ є згортувачем у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$. Фінітні узагальнені функції утворюють досить широкий клас; зокрема, кожна обмежена замкнена множина $F \subset \mathbb{R}$ є носієм деякої узагальненої фінітної функції.

Теорема 1. *Нехай $u(t,x)$ – розв'язок задачі (1), (2) з функцією f в умові (2), яка є елементом простору $(\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)})' \subset (S^{1/(2b)}_{1-1/(2b)})', \beta > 1$, $supp f$ – обмежена множина в $\mathbb{R}$, $[c,d] \cap supp f = \emptyset$. Тоді*

$$\exists\alpha > 0 : \sup_{t\in[0,T]} |u(t,x)| \leq \alpha,\ \alpha = \alpha(c,d).$$

Доведення. Нехай $[c,d] \subset [a_1,b_1] \subset (a,b)$, $(a,b) \cap supp\ f = \emptyset$. Розглянемо функцію $\psi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$ таку, що $\psi(x) = 1$ для $x \in [a_1,b_1]$, $supp\,\psi \subset (a,b)$. Така функція існує, оскільки простір $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$ містить фінітні функції при $\beta > 1$. Функції $\psi(\xi)T_\xi^x G(t,\xi)$, $(1-\psi(\xi))T_\xi^x G(t,\xi)$, як функції ξ, є елементами простору $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$ при кожному $t \in (0,T]$ і $x \in \mathbb{R}$, тому правильним є співвідношення

$$u(t,x) = \langle f_\xi, \psi(\xi)T_\xi^x G(t,\xi)\rangle + \langle f_\xi, \eta(\xi)T_\xi^x G(t,\xi)\rangle,$$

де $\eta = 1-\psi$. Перший доданок у цій рівності рівний нулю, оскільки $supp\ f \cap supp\ (\psi(\xi)T_\xi^x G(t,\xi)) = \emptyset$. Отже, $u(t,x) = \langle f_\xi, \eta(\xi)T_\xi^x G(t,\xi)\rangle$. Оскільки $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)})' = \bigcap\limits_{A,B>0}(\overset{\circ}{S}{}^{\beta,B}_{1-1/(2b),A})'$ і в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$ виконується перша аксіома зліченності [2], то функціонал f є неперервним тоді й лише тоді, коли він обмежений на кожній обмеженій множині з простору

$\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$. Отже, для доведення теореми досить показати, що сім'я функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = \eta(\xi)T^x_\xi G(t,x)$ обмежена в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$ рівномірно по t, для досить малих значень t, і $x \in [c,d]$, тобто, що

$$|\xi^{2k}D^{2s}_\xi \Phi_{t,x}(\xi)| \le cA^k B^s k^{2k(1-1/(2b))}s^{2\beta s},$$
$$\{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+,\ \xi \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

де сталі c, A, $B > 0$ не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним способом. Оскільки $\Phi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in [a_1, b_1]$, то оцінку (11) досить встановити для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [a_1, b_1]$.

Функція ψ є елементом простору $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$. Отже,

$$|\xi^{2k}D^{2s}_\xi \psi(\xi)| \le c_1 A_1^k B_1^s k^{2k(1-1/(2b))}s^{2\beta s},$$
$$\xi \in \mathbb{R},\ \{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+. \tag{12}$$

Скориставшись формулою диференціювання добутку двох функцій, знайдемо, що

$$|\xi^{2k}D^{2s}_\xi \Phi_{t,x}(\xi)| = |\xi^{2k}\sum_{l=0}^{2s} C^l_{2s} D^l_\xi \eta(\xi) D^{2s-l}_\xi T^x_\xi \cdot$$
$$\cdot G(t,\xi)| \le \Psi^1_{t,x}(\xi) + \Psi^2_{t,x}(\xi),$$

де

$$\Psi^1_{t,x}(\xi) = \sum_{l=0}^{2s} C^l_{2s}|\xi^{2k}D^l_\xi \psi(\xi)| \cdot |D^{2s-l}_\xi T^x_\xi G(t,\xi)|,$$
$$\Psi^2_{t,x}(\xi) = |\xi^{2k}D^{2s}_\xi T^x_\xi G(t,\xi)|.$$

Оскільки $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)} \subset S^{\beta}_{1-1/(2b)}$, то для функції $\psi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$ справджуються нерівності

$$|D^l_\xi \psi(x)| \le c_2 B_2^l l^{l\beta} \exp\{-a|\xi|^{2b/(2b-1)}\}, l \in \mathbb{Z}_+,$$

з деякими додатними сталими $c_2, B_2, a > 0$. Тоді

$$|\xi^{2k}D^l_\xi \psi(\xi)| \le$$
$$\le c_2 B_2^l l^{l\beta} \sup_{|\xi|}\{|\xi|^{2k}\exp\{-a|\xi|^{2b/(2b-1)}\} \le$$
$$\le c_3 B_2^l l^{l\beta} A_2^k k^{2k(1-1/(2b))} \le c_3 B_2^l l^{2l\beta} A_2^k k^{2k(1-1/(2b))}.$$

Оцінимо $\Psi^1_{t,x}(\xi)$ скориставшись нерівностями (12) та нерівностями (10), в яких покладемо $p = 1$; врахуємо також те, що $|x-\xi| \ge a_0 > 0$, де $a_0 = \min\{c-a_1, b_1-a\}$. Отже,

$$\Psi^1_{t,x}(\xi) \le c_3 \tilde{L}_0 \tilde{L}_2 a_0^{-2(\nu+1)-1} A_2^k k^{2k(1-1/(2b))}\cdot$$
$$\cdot \sum_{l=0}^{2s} C^l_{2s} B_2^l l^{2\beta l} a_0^{-2(s-l)} \tilde{L}_1^{s-l}(s-l)^{2(s-l)} \le$$
$$\le \tilde{L} A_2^k A_3^s k^{2k(1-1/(2b))}s^{2\beta s}, \tag{13}$$

де $\tilde{L} = c_3 \tilde{L}_0 \tilde{L}_2 a_0^{-2(\nu+1)-1}$, $A_3 = 2\max\{B_2, \tilde{L}_1 a_0^{-2}\}$, сталі $\tilde{L}, A_2, A_3 > 0$ не залежать від t, x, ξ.

При оцінці $\Psi^2_{t,x}(\xi)$ врахуємо те, що

$$\exists d > 0\, \forall x \in [c,d]\, \forall \xi \in \mathbb{R}\setminus[a_1,b_1] : |\xi|/|x-\xi| \le d.$$

Поклавши в (10) $p = 2k$, прийдемо до нерівностей

$$\Psi^2_{t,x} \le \tilde{L}_1 |\xi|^{2k}|x-\xi|^{-2(\nu+1)-2s-2k}\tilde{L}_1^s \tilde{L}_2^k\cdot$$
$$\cdot s^{2s}k^{2k(1-1/(2b))} \le \tilde{L}_1 a_0^{-2(\nu+1)} a_0^{-2s} d^{2k} \tilde{L}_1^s \tilde{L}_2^k\cdot$$
$$\cdot s^{2s}k^{2k(1-1/(2b))} \le \tilde{\tilde{L}}_1 A_4^k A_5^s k^{2k(1-1/(2b))}s^{2s} \le$$
$$\le \tilde{\tilde{L}}_1 A_4^k A_5^s k^{2k(1-1/(2b))}s^{2\beta s}, \tag{14}$$

де $\tilde{\tilde{L}} = \tilde{L}_1 a_0^{-2(\nu+1)}$, $A_4 = d^2\tilde{L}_2$, $A_5 = a_0^{-2}\tilde{L}_1$, сталі $\tilde{\tilde{L}}, A_4, A_5 > 0$ не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним способом. З нерівностей (13), (14) випливає нерівність (11). Теорема доведена.

Як приклад, розглянемо двоточкову задачу (1), (2) ($m = 1, \mu > \mu_1, t_1 = T$) для рівняння (1) з параметром $b = 1$ та $f = \delta$ (δ – дельта-функція Дірака) в умові (2). В [1] встановлено, що розв'язок $u(t,x)$ такої задачі подається у вигляді

$$u(t,x) = \delta * G(t,x) = G(t,x) =$$
$$= 2^{-(2\nu+1)}\mu^{-1}\Gamma^{-1}(\nu+1)[t^{-(\nu+1)}\exp\{-\frac{x^2}{4t}\}+$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}(\frac{\mu_1}{\mu})^r \frac{1}{(t+rT)^{\nu+1}}\exp\{-\frac{x^2}{4(t+rT)}\}].$$

Тоді

$$u(t,0) = 2^{-(2\nu+1)}\mu^{-1}\Gamma^{-1}(\nu+1)[t^{-(\nu+1)}+$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}(\frac{\mu_1}{\mu})^r \frac{1}{(t+rT)^{\nu+1}}].$$

Звідси дістаємо, що $u(t,0) \to +\infty$ при $t \to +0$. Оскільки $supp\,\delta = \{0\}$ (δ – функція – фінітний функціонал), то, внаслідок доведеної теореми, наприклад, для всіх $x \in [c,d] \subset [a_1,b_1] \subset (0,b)$, знайдеться стала $\alpha = \alpha(c,d) > 0$ така, що справджується нерівність $\sup\limits_{t\in[0,T]} |u(t,x)| \le \alpha$. У даному випадку в цьому можна переконатися безпосередньо, оскільки

$$\sup_{t\in[0,T]} (t^{-(\nu+1)} \exp\{-\frac{x^2}{4t}\}) \le \sup_{t\in[0,T]} (t^{-(\nu+1)}\cdot$$

$$\cdot \exp\{-\frac{c^2}{4t}\}) \le (\frac{4(\nu+1)}{c^2})^{\nu+1}, x \ge c$$

(тут враховано, що $\lim\limits_{t\to+0} t^{-(\nu+1)} \exp\{-\frac{c^2}{4t}\} = 0$). Отже, для всіх $x \in [c,d]$ справджується нерівність $\sup\limits_{t\in[0,T]} |u(t,x)| \le \alpha$, де

$$\alpha = 2^{-(2\nu+1)}\mu^{-1}\Gamma^{-1}(\nu+1)((\frac{4(\nu+1)}{c^2})^{\nu+1}+$$

$$+\frac{1}{T^{\nu+1}}\sum_{r=1}^{\infty}(\frac{\mu_1}{\mu})^r) = 2^{-(2\nu+1)}\mu^{-1}\Gamma^{-1}(\nu+1)\cdot$$

$$\cdot((\frac{4(\nu+1)}{c^2})^{\nu+1} + \frac{\mu_1}{T^{\nu+1}(\mu-\mu_1)}).$$

У даному випадку отриманий результат можна сформулювати ще й так: для довільно фіксованого $\varepsilon > 0$ знайдеться стала $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ така, що $\sup\limits_{t\in[0,T]} |u(t,x)| \le \alpha$ для всіх $x : |x| \ge \varepsilon$.

REFERENCES

1. *Gorodetsky, V. V., Martynyuk, O. V. & Shyrokovskykh, A. O.* (2016). On a generalization of a Cauchy problem for singular parabolic type evolution equations. Neliniini kolyvannia, 19, No. 4, pp. 435-457. (in Ukrainian)

2. *Gel'fand, I. M. & Shylov, G. E.* (1958). The spaces of basic and generalized functions. Moscow: Fizmatgiz. (in Russian)

3. *Gorodetskyi, V. V. & Gotinchan, T. I.* (2017). Transformation of Bessel in spaces of type $\overset{\circ}{S}$. Bukovyn. matem. zhurn., 5, No. 3-4, pp. 50-55. (in Ukrainian)

4. *Levitan B. I.* (1951). Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. Uspekhi Mat. Nauk., 6, Iss. 2, pp. 102–143. (in Russian)

5. *Gorodetskyi, V. V. & Verezhak, G. P.* (2017). Generalized of $\overset{\circ}{S}$ type spaces. Bukovyn. matem. zhurn., 5, No. 1-2, pp. 49-61. (in Ukrainian)

6. *Nahushev, A. M.* (1995). The equations of mathematical biology. Moscow: Vysshaya shkola (in Russian).

7. *Belavin, I. A., Kapitsa, S. P. & Kurdyumov, S. P.* (1998). The mathematical model of global demographic proccesses with considering of space distribution. Zhurn. vychisl. matem. mat. fiz., 38, No. 6, pp. 885-902 (in Russian).

8. *Dezin, A. A.* (1980). General questions of the theory of boundary-value problems. Moscow: Nauka (in Russian)

9. *Romanko, V. K.* (1985). Nonlocal boundary value problems for certain systems of equations. Matem. zametki, 37, No. 7, pp. 727-733 (in Russian).

10. *Makarov, A. A.* (1994). The existence of a correct two-point boundary-value problem in a layer for systems of pseudodifferential equations. Differents. uravneniya, 30, No. 1, pp. 144-150 (in Russian).

11. *Chesalin, V. I.* (1979). The problem with nonlocal boundary conditions for some abstract hyperbolic equations. Differents. uravneniya, 15, No. 11, pp. 2104-2106 (in Russian).

12. *Il'kiv, V. S. & Ptashnyk, B. I.* (2005). A nonlocal two-point problem for systems of partial differential equations. Sibir. mat. zhurn., 46, No. 11, pp. 119-129 (in Russian).

13. *Gel'fand, I. M. & Shylov, G. E.* (1958). Some questions in the theory of differential equations. Moscow: Fizmatizd. (in Russian)

14. *Tikhonov, A. N. & Samarskii, A. A.* (1977). Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka (in Russian)

15. *Zhytomyrskiy, Ya. I.* (1955). The Cauchy problem for systems of linear partial differential equations with a differential Bessel operator. Matem. sb., 36, No. 2, pp. 299-310 (in Russian).