УДК 123.456

©2012 р. **Ю.І. Харкевич, І.В. Кальчук**

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З КЛАСУ $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ ІНТЕГРАЛАМИ ВЕЙЄРШТРАССА У РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

Розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського на класах (ψ,β)–диференційовних періодичних функцій при наближенні інтегралами Вейєрштрасса $W_\delta(f;x)$ в рівномірній метриці.

We solved the Kolmogorov–Nikolsky problem on the class of (ψ,β)–differentiable periodic functions at approximation of Weierstrass integrals $W_\delta(f;x)$ in uniform metric.

Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних істотно обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$; L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається рівністю $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

В роботі О. І. Степанця [1] введені класи періодичних функцій так.

Нехай $f \in L$ і

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ряд Фур'є функції f.

Нехай, далі, $\psi(k)$ — довільна фіксована функція натурального аргументу і β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\Big(a_k \cos\big(kx + \frac{\pi\beta}{2}\big) + b_k \sin\big(kx + \frac{\pi\beta}{2}\big)\Big)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то цю функцію називають (ψ,β)-похідною функції $f(x)$ і позначають через $f^{\psi}_{\beta}(x)$ $\quad(\varphi(x) = f^{\psi}_{\beta}(x))$. Множину усіх функцій $f(x)$, котрі задовольняють таку умову, позначають через L^{ψ}_{β}. Якщо $f \in L^{\psi}_{\beta}$, і, крім того, $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина функцій із L, то записують, що $f \in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Далі покладемо $L^{\psi}_{\beta} \cap C = C^{\psi}_{\beta}$ і $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} \cap C = C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Якщо в ролі $\mathfrak{N}$ виступає множина

$$S^0_\infty = \{\varphi \in L_\infty : \|\varphi\|_\infty \le 1,\ \varphi \perp 1\},$$

то клас $C^{\psi}_{\beta}S^0_\infty$ позначають через $C^{\psi}_{\beta,\infty}$.

При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ збігаються з класами $W^r_{\beta,\infty}$, які були введені Б.Надем [2], а $f^{\psi}_{\beta}(x) = f^{(r)}_{\beta}(x)$ — це (r,β)–похідна в розумінні Вейля–Надя. Якщо, крім цього, $\beta = r$, $r \in \mathbb{N}$, то f^{ψ}_{β} є похідною порядку r функції f і при цьому класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ є відомими класами Соболєва W^r_∞.

Послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, що визначають класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, зручно розглядати як звуження на множину натуральних чисел $\mathbb{N}$ деяких додатних неперервних функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \ge 1$, що належать до множини $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} := \Big\{\psi : \psi(t) > 0, \psi(t_1) - 2\psi\Big(\frac{t_1+t_2}{2}\Big) +$$

$$+\psi(t_2) \geqslant 0\ \forall t_1,\ t_2 \in [1;\infty),\ \lim_{t\to\infty}\psi(t) = 0\Big\}.$$

Як і О.І. Степанець (див., наприклад, [1, с. 160]), з множини $\mathfrak{M}$ виділимо підмножину

$$\mathfrak{M}_C := \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < K_1 \leqslant \mu(t) \leqslant K_2\ \forall t \geqslant 1\},$$

де $\mu(t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$, $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, $\psi^{-1}(\cdot)$ — обернена до $\psi(\cdot)$ функція, а константи K_1 і K_2, взагалі кажучи, можуть залежати від функції ψ.

Нехай $f \in L$ і $\delta > 0$. Величину

$$W_\delta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\delta}} \cos kt\Big\}dt$$

називають інтегралом Вейєрштрасса функції f.

Основним об'єктом досліджень будуть величини

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; W_\delta)_C = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \|f(\cdot) - W_\delta(f;\cdot)\|_C,$$

а головною метою — отримання для цих величин асимптотичних рівностей, тобто рівностей виду

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; W_\delta)_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta)), \quad \delta \to \infty,$$

де $\varphi(\delta)$ — деяка конкретна функція, що залежить від параметра δ. Якщо така рівність отримана, то услід за О.І. Степанцем [1, с. 198], будемо говорити, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського в рівномірній метриці для класу $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та інтеграла Вейєрштрасса.

Апроксимативні властивості інтегралів Вейєрштрасса вперше досліджувались в роботі П. П. Коровкіна [3] у 1959 році, а саме ним була розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для класу Зиґмунда Z_1 та інтеграла Вейєрштрасса, де

$$Z_\alpha = \{f \in C : |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \le \le 2|h|^\alpha, 0 < \alpha \le 2\}.$$

Також ним було доведено, що інтеграли Вейєрштрасса здійснюють найкраще асимптотичне наближення на класі Z_2 серед операторів виду

$$L(\rho, f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Big\{\frac{1}{2} + \rho\cos t + + \sum_{k=2}^{\infty}\lambda_k(\rho)\cos kt\Big\}dt, 0 < \rho < 1,$$

і зазначено, що, наприклад, інтеграл Пуассона апроксимує клас Z_2 приблизно в три рази повільніше ніж інтеграл Вейєрштрасса.

Далі Л. І. Баусовим [4] у 1961 році результат П. П. Коровкіна був поширений на класи Z_α, $0 < \alpha \le 2$, а у 1965 році в роботі [5] — на класи Вейля–Надя $W^r_{\beta,\infty}$. У 1975 році В. А. Баскаков [6] отримав асимптотичні рівності для величини $\mathcal{E}\left(W^1_\infty; W_\delta\right)_C$ при $\delta \to \infty$. А у 2001 році Л. П. Фалалєєв [7] уточнив результат Л. І. Баусова, знайшовши точніший щодо порядку залишковий член.

Метою даної роботи є знаходження асимптотичних рівностей для точних верхніх меж відхилень інтегралів Вейєрштрасса від функцій з класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ при $\beta \in \mathbb{R}$ у випадку, коли функції $\psi \in \mathfrak{M}_C$ і спадають до нуля при $t \to \infty$ швидше за функцію $\frac{1}{t^2}$, яка визначає клас насичення інтеграла Вейєрштрасса.

Покладемо

$$\tau(u) = \begin{cases} (1 - e^{-u^2})\frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}, & 0 \le u \le \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \\ (1 - e^{-u^2})\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, & u \ge \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \end{cases} \qquad (1)$$

де $\psi(u)$ — функція, визначена і неперервна при всіх $u \ge 1$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати функцію $\psi(u)$ такою, що має неперервну другу похідну на $[1, \infty)$.

Домовимося впродовж подальшої роботи через K, K_i позначати сталі, взагалі кажучи, різні в різних співвідношеннях.

Теорема. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_C$, функція $g(u) = u^2\psi(u)$ опукла на $[b;\infty)$, $b \ge 1$, і*

$$\int_1^\infty u\psi(u)du < \infty. \qquad (2)$$

Тоді при $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; W_\delta)_C = \frac{1}{\delta}\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \|f''(x)\|_C + +O\left(\frac{1}{\delta^2}\int_1^{\sqrt{\delta}} t^3\psi(t)dt + \frac{1}{\delta}\int_{\sqrt{\delta}}^\infty t\psi(t)dt\right). \qquad (3)$$

Доведення. Подамо функцію $\tau(u)$, задану за допомогою співвідношення (1) у вигляді $\tau(u) = \varphi(u) + \mu(u)$, де

$$\varphi(u) = \begin{cases} u^2\frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}, & 0 \le u \le \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \\ u^2\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, & u \ge \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \end{cases} \qquad (4)$$

$$\mu(u)=\begin{cases}(1-e^{-u^2}-u^2)\frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}, 0\le u\le\frac{1}{\sqrt{\delta}},\\(1-e^{-u^2}-u^2)\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, u\ge\frac{1}{\sqrt{\delta}}.\end{cases}\tag{5}$$

Переконаємося в сумовності перетворень Фур'є $\hat{\varphi}_\beta(t)$ і $\hat{\mu}_\beta(t)$ функцій $\varphi(u)$ та $\mu(u)$ виду

$$\hat{\varphi}_\beta(t)=\hat{\varphi}(t,\beta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\varphi(u)\cos\Big(ut+\frac{\beta\pi}{2}\Big)du,$$

$$\hat{\mu}_\beta(t)=\hat{\mu}(t,\beta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\mu(u)\cos\Big(ut+\frac{\beta\pi}{2}\Big)du.$$

Покажемо збіжність інтеграла

$$A(\varphi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^\infty\varphi(u)\cos\Big(ut+\frac{\beta\pi}{2}\Big)du\right|dt.$$

Для цього, згідно з теоремою 1 роботи Л. І. Баусова [5, с. 24], досить показати збіжність інтегралів

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}u\left|d\varphi'(u)\right|,\quad\int\limits_{\frac{1}{2}}^\infty|u-1|\left|d\varphi'(u)\right|,\tag{6}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left|\int\limits_0^\infty\frac{|\varphi(u)|}{u}du,\int\limits_0^1\frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u}du.\right.\tag{7}$$

Із (4) випливає, що $d\varphi'(u)=2\frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}du$ при $u\in[0;1/\sqrt{\delta}]$. Тому

$$\int\limits_0^{1/\sqrt{\delta}}u\left|d\varphi'(u)\right|=\frac{\psi(1)}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}.\tag{8}$$

Врахувавши, що

$$\int\limits_{1/\sqrt{\delta}}^{1/2}u\left|d\varphi'(u)\right|\le\int\limits_{1/\sqrt{\delta}}^{\infty}u\left|d\varphi'(u)\right|,$$

$$\int\limits_{1/2}^{\infty}|u-1|\left|d\varphi'(u)\right|\le\int\limits_{1/\sqrt{\delta}}^{\infty}u\left|d\varphi'(u)\right|,$$

знайдемо оцінку інтеграла $\int\limits_{1/\sqrt{\delta}}^{\infty}u\left|d\varphi'(u)\right|$ на кожному із проміжків $[1/\sqrt{\delta};b/\sqrt{\delta}]$ та $[b/\sqrt{\delta};\infty)$ (при $\delta>4b^2$).

Із (4) при $u\ge1/\sqrt{\delta}$ маємо

$$\varphi''(u)=2\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}+4u\frac{\sqrt{\delta}\psi'(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}+$$
$$+u^2\frac{\delta\psi''(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}.$$

Тоді

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}u\left|d\varphi'(u)\right|\le\frac{\delta}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}u^3\psi''(\sqrt{\delta}u)\,du+$$

$$+\frac{4\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}u^2|\psi'(\sqrt{\delta}u)|du+\frac{2}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}u\psi(\sqrt{\delta}u)du.$$

Проінтегрувавши частинами перший інтеграл з правої частини останньої нерівності двічі, а другий — один раз, і врахувавши, що функція $\psi(u)$ спадна на $[1;\infty)$, одержимо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}u\left|d\varphi'(u)\right|\le\frac{\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})}u^3\psi'\left(\sqrt{\delta}u\right)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}-$$

$$-\frac{7}{\psi(\sqrt{\delta})}u^2\psi(\sqrt{\delta}u)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}+$$

$$+\frac{16}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}u\psi(\sqrt{\delta}u)du\le\frac{K}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}.\tag{9}$$

Враховуючи опуклість функції $g(u)=u^2\psi(u)$ на $[b;\infty)$, а також рівності $\lim\limits_{u\to\infty}u^2\psi(u)=0$ та $\lim\limits_{u\to\infty}u^3\psi'(u)=0$, в справедливості яких неважко переконатися, матимемо

$$\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}}u|d\varphi'(u)|=\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}}ud\varphi'(u)=$$

$$= (u\varphi'(u)-\varphi(u))\Big|_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac12} \le \frac{K}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}. \qquad (10)$$

Отже, із співвідношень (8), (9) та (10) випливають оцінки

$$\int_0^{\frac12} u\,|d\varphi'(u)| = O\Big(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\Big), \qquad (11)$$

$$\int_{\frac12}^{\infty} |u-1|\,|d\varphi'(u)| = O\Big(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\Big). \qquad (12)$$

Враховуючи (4) та умову теореми $\int\limits_1^{\infty} u\psi(u)du < \infty$, отримаємо

$$\int_0^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u}du = \frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}\int_0^{1/\sqrt{\delta}} udu +$$

$$+\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int_{1/\sqrt{\delta}}^{\infty} u\psi(\sqrt{\delta}u)du = \frac{\psi(1)}{2\delta\psi(\sqrt{\delta})}+$$

$$+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int_1^{\infty} u\psi(u)du \le \frac{K}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}. \qquad (13)$$

Оцінимо другий інтеграл з (7). Як і при встановленні співвідношення (58) з роботи [8], можна показати, що має місце рівність

$$\int_0^1 |\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|\frac{du}{u} =$$

$$= \int_0^1 |\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|\frac{du}{u} + O(H(\varphi)), \quad (14)$$

де $\lambda(u) = 1-u^2$,

$$H(\varphi) = |\varphi(0)| + |\varphi(1)| + \int_0^{1/2} u|d\varphi'(u)| +$$

$$+\int_{1/2}^{\infty} |u-1||d\varphi'(u)|.$$

Враховуючи співвідношення (4), (11), (12), те, що $\int\limits_0^1 |\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|\frac{du}{u} \le K$ і $\lim\limits_{u\to\infty} u^2\psi(u) = 0$, отримаємо оцінку

$$\int_0^1 |\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|\frac{du}{u} = O\Big(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\Big). \quad (15)$$

Отже, за теоремою 1 з роботи [5], інтеграл $A(\varphi)$ збіжний.

Покажемо тепер збіжність інтеграла

$$A(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{\infty}\mu(u)\cos\Big(ut+\frac{\beta\pi}{2}\Big)du\right|dt. \qquad (16)$$

Згідно з теоремою 1 роботи Л. І. Баусова [5, с. 24] для збіжності інтеграла (16) необхідно і достатньо, щоб збігалися інтеграли

$$\int_0^{\frac12} u\,|d\mu'(u)|, \quad \int_{\frac12}^{\infty} |u-1|\,|d\mu'(u)|, \qquad (17)$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^{\infty}\frac{|\mu(u)|}{u}du, \int_0^1 \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u}du. \qquad (18)$$

Для оцінки першого інтеграла з (17) розіб'ємо проміжок $[0;1/2]$ на дві частини $[0;1/\sqrt{\delta}]$ та $[1/\sqrt{\delta};1/2]$.

Із (5) випливає, що при $u\in[0;1/\sqrt{\delta}]$

$$\mu''(u) = 2(e^{-u^2} - 2u^2e^{-u^2} - 1)\frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})},$$

тому, враховуючи нерівність

$$2u^2e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1 \le 3u^2, \quad u\in\mathbb{R}, \qquad (19)$$

отримаємо

$$\int_0^{1/\sqrt{\delta}} u|d\mu'(u)| =$$

$$= \frac{2\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}\int_0^{1/\sqrt{\delta}} u(2u^2e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1)du \le$$

$$\leq \frac{6\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_0^{1/\sqrt{\delta}} u^3 du \leq \frac{K}{\delta^2 \psi(\sqrt{\delta})}. \qquad (20)$$

Із (5) випливає, що при $u \geq 1/\sqrt{\delta}$

$$\mu''(u) = \left(1 - e^{-u^2} - u^2\right) \frac{\delta\psi''(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})} +$$

$$+4u\left(e^{-u^2} - 1\right) \frac{\sqrt{\delta}\psi'(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})} +$$

$$+2\left(e^{-u^2} - 2u^2 e^{-u^2} - 1\right) \frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}. \qquad (21)$$

Врахувавши нерівність (19) та нерівності

$$e^{-u^2} + u^2 - 1 \leq \frac{u^4}{2},\ 1 - e^{-u^2} \leq u^2,\ u \in \mathbb{R}, \qquad (22)$$

матимемо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u|d\mu'(u)| \leq \frac{\delta}{2\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^5 \psi''(\sqrt{\delta}u) du +$$

$$+\frac{4\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^4 |\psi'(\sqrt{\delta}u)| du +$$

$$+\frac{6}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^3 \psi(\sqrt{\delta}u) du.$$

Проінтегрувавши перший інтеграл у правій частині останньої нерівності частинами та скориставшись теоремами 3.12.1 [1, с. 161] та 3.16.1 [1, с. 175], отримаємо

$$\int\limits_{1/\sqrt{\delta}}^{1/2} u|d\mu'(u)| \leq$$

$$\leq K_1 + \frac{K_2}{\delta^2 \psi(\sqrt{\delta})} + \frac{K_3}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{1/\sqrt{\delta}}^{1/2} u^3 \psi(\sqrt{\delta}u) du \leq$$

$$\leq K_1 + \frac{K_2}{\delta^2 \psi(\sqrt{\delta})} + \frac{K_3}{\delta^2 \psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_1^{\sqrt{\delta}} u^3 \psi(u) du. \qquad (23)$$

Поєднуючи (20) та (23) і враховуючи, що

$$\lim_{\delta\to\infty} \frac{1}{\delta^2 \psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_1^{\sqrt{\delta}} u^3 \psi(u) du = \infty,$$

і те, що $\lim\limits_{\delta\to\infty} \int\limits_1^{\sqrt{\delta}} u^3 \psi(u) du = K$, або $\lim\limits_{\delta\to\infty} \int\limits_1^{\sqrt{\delta}} u^3 \psi(u) du = \infty$, дістанемо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u\,|d\mu'(u)| = O\left(\frac{1}{\delta^2 \psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_1^{\sqrt{\delta}} u^3 \psi(u) du\right). \qquad (24)$$

Оцінимо другий інтеграл з (17). Використовуючи формулу (21), те, що $|u-1| \leq u$, $u \in \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$ та нерівності

$$e^{-u^2} + u^2 - 1 \leq u^2, 1 - e^{-u^2} \leq 1,$$

$$2u^2 e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1 \leq 2, u \in \mathbb{R},$$

отримаємо

$$\int\limits_{1/2}^{\infty} |u-1|\,|d\mu'(u)| \leq \frac{\delta}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{1/2}^{\infty} u^3 \psi''(\sqrt{\delta}u) du +$$

$$+\frac{4\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{1/2}^{\infty} u^2 |\psi'(\sqrt{\delta}u)| du + \frac{4}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{1/2}^{\infty} u\psi(\sqrt{\delta}u) du.$$

Проінтегрувавши частинами перший інтеграл із правої частини останньої рівності двічі, а другий інтеграл — один раз, та використавши теореми 3.12.1 [1, с. 161] та 3.16.1 [1, с. 175], а також той факт, що функція $\psi(\sqrt{\delta}u), \delta \geq 4$, є спадною при $u \in [1/2; \infty]$, одержимо

$$\int\limits_{1/2}^{\infty} |u-1|\,|d\mu'(u)| \leq K_1 + \frac{K_2}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{1/2}^{1} u\psi(\sqrt{\delta}u) du +$$

$$+\frac{K_2}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_1^{\infty} u\psi(\sqrt{\delta}u) du \leq K_1 + \frac{K_3 \psi(\sqrt{\delta}/2)}{\psi(\sqrt{\delta})} +$$

$$+\frac{K_2}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty} u\psi(u) du \leq K_4 + \frac{K_2}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty} u\psi(u) du. \qquad (25)$$

Таким чином, із (25) отримуємо оцінку

$$\int\limits_{1/2}^{\infty}|u-1|\,|d\mu'(u)| = O\bigg(1+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty}u\psi(u)du\bigg). \tag{26}$$

Для того, щоб оцінити перший інтеграл з (18), розділимо проміжок $[0;\infty)$ на три частини: $[0;1/\sqrt{\delta}]$, $[1/\sqrt{\delta};1]$ і $[1;\infty)$. Використовуючи першу нерівність з (22), матимемо

$$\int\limits_{0}^{1/\sqrt{\delta}}\frac{|\mu(u)|}{u}du \le \frac{K}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})},$$

$$\int\limits_{1/\sqrt{\delta}}^{1}\frac{|\mu(u)|}{u}du \le \frac{K_1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta}u)}\int\limits_{1/\sqrt{\delta}}^{1}u^3\psi(\sqrt{\delta}u)du \le$$

$$\le \frac{K_1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\sqrt{\delta}}u^3\psi(u)du,$$

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{|\mu(u)|}{u}du=\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\infty}\psi(\sqrt{\delta}u)\Big(\frac{e^{-u^2}-1}{u}+u\Big)du\le$$

$$\le\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\infty}u\psi(\sqrt{\delta}u)du \le \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty}u\psi(u)du.$$

Звідси

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{|\mu(u)|}{u}du = O\bigg(\frac{1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\sqrt{\delta}}u^3\psi(u)du+$$

$$+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty}u\psi(u)du\bigg). \tag{27}$$

Міркуючи аналогічно як і при відшуканні оцінки (15), можна показати справедливість оцінки

$$\int\limits_{0}^{1}|\mu(1-u)-\mu(1+u)|\frac{du}{u} =$$

$$= O\bigg(\frac{1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\sqrt{\delta}}u^3\psi(u)du+$$

$$+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty}u\psi(u)du\bigg). \tag{28}$$

Згідно з теоремою 1 роботи Л.І. Баусова [5] переконуємося в збіжності інтеграла $A(\mu)$, а також із нерівностей (2.14) і (2.15) тієї ж роботи [5] з урахуванням формул (24), (26), (27)та (28) знаходимо оцінку

$$A(\mu) = O\bigg(\frac{1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\sqrt{\delta}}u^3\psi(u)du+$$

$$+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty}u\psi(u)du\bigg). \tag{29}$$

Аналогічно до [1, с. 183] можна показати, що для будь-якої функції $f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ при всіх $x\in\mathbb{R}$ справедлива рівність

$$f(x)-W_\delta(f,x) = \psi(\sqrt{\delta})\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\psi}_{\beta}\Big(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\Big)\hat{\tau}_\beta(t)dt.$$

Звідси

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty};W_\delta)_C =$$

$$= \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\bigg\|\psi(\sqrt{\delta})\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\psi}_{\beta}\Big(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\Big)\hat{\tau}_\beta(t)dt\bigg\|_C =$$

$$= \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\bigg\|\psi(\sqrt{\delta})\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\psi}_{\beta}\Big(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\Big)(\hat{\varphi}_\beta(t)+\hat{\mu}_\beta(t))dt\bigg\|_C =$$

$$= \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\bigg\|\psi(\sqrt{\delta})\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{\psi}_{\beta}\Big(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\Big)\hat{\varphi}_\beta(t)dt\bigg\|_C +$$

$$+O\Big(\psi(\sqrt{\delta})A(\mu)\Big). \tag{30}$$

Повторюючи міркування, що наведені в роботі [9, с. 12], легко переконатися, що для довільного $\delta > 0$ ряд Фур'є функції $f_\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right)\hat{\varphi}_\beta(t)dt$ має вигляд:

$$S\left[f_\varphi\right](x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{\delta}\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right),$$

де a_k, b_k — коефіцієнти Фур'є функції f. Тому

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right)\hat{\varphi}_\beta(t)dt = -\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}f''(x). \tag{31}$$

Підставляючи (31) в (30), при $\delta \to \infty$ одержимо

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty}; W_\delta)_C = \frac{1}{\delta}\sup_{f\in C^\psi_{\beta,\infty}} \|f''(x)\|_C + $$
$$+O\left(\psi(\sqrt{\delta})A(\mu)\right). \tag{32}$$

Підставляючи (29) в (32) отримаємо рівність (3). Теорему доведено.

Прикладом функцій, для яких має місце теорема є функції виду: $\psi(u) = \frac{1}{u^2\ln^\alpha(u+K)}$, $K > 0$, $\alpha > 1$; $\psi(u) = \frac{1}{u^r}\ln^\alpha(u+K)$, $\psi(u) = \frac{1}{u^r}\operatorname{arctg} u$, $\psi(u) = \frac{1}{u^r}(K+e^{-u})$, $u \geq 1, K > 0, r > 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближения. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч.І. — 427 с.
2. *Nagy B.* Über gewise Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen,I.//Periodischer Fall, Berichte der math. phys. KL. Akademie. zu — Leipzig, 1938. — **90**. — С. 103–134.
3. *Коровкин П.П.* О наилучшем приближении функций класса Z_2 некоторыми линейными операторами // Докл. АН СССР. — 1959. — **127**, № 3. — С. 143–149.
4. *Баусов Л.И. О* приближении функций класса Z_α положительными методами суммирования рядов Фурье//Успехи мат. наук. — 1961. — **16**. № 3. — С. 143–149.
5. *Баусов Л.И.* Линейные методы сумирования рядов Фурье с задаными прямоугольными матрицами. I //Изв. вузов. — 1965. — **46**, № 3. — С. 15–31.
6. *Баскаков В.А.* О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля-Пуассона // Мат. заметки. — 1975. — **17**, № 2. — С. 169–180.
7. *Фалалеев Л.П.* О приближении функций обобщенными операторами Абеля–Пуассона. — Сибирский математический журнал, 2001. — **1**, № 4 — С. 926–936.
8. *Жигалло Т.В., Харкевич Ю.І.* Наближення (ψ, β)–диференційовних функцій інтегралами Пуассона у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 11. — С. 1497–1515.
9. *Степанец А.И.* Классификация периодических функций и приближение их суммами Фурье. — Киев, 1983. – 57 с. — (Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 83.69).