УДК 517.956

©2012 р. Г.М. Перун

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО СТОХАСТИЧНОГО РІВНЯННЯ

Для псевдодиференціального стохастичного рівняння встановлено теореми про коректність задачі Коші у просторах сумовних з квадратом функцій та гладких функцій, норми яких містять операцію математичного сподівання.

For pseudo-differential stochastic equation established the theorems about the correctness of the Cauchy problem in spaces of square summable functions and smooth functions, norms which include the operation of expected value.

Дослідження псевдодиференціальних рівнянь зі сталим (тобто незалежними від просторових координат і часової змінної $t>0$) однорідним символом будо розпочате С.Д. Ейдельманом та Я. М. Дрінем у праці [1] і продовжено в працях [2, 3]. Для такого символа фундаментальний розв'язок (ФР) задачі Коші виписується за допомогою перетворення Фур'є. У праці [4] М.В. Федорюк встановив точну асимптотику ФР при $|x|\to\infty$, яка є не експоненціальною, як у випадку диференціальних рівнянь, а степеневою.

А.Н. Кочубей у праці [6] при природних оцінках на степінь однорідності та гладкість, накладених на змінний символ $a(\rho,\beta;\sigma)$, доводить точні степеневі оцінки осцилюючих інтегралів для однорідного многочлена $P_\nu(\sigma)$ та однорідної функції з відповідними степенями однорідності під знаком інтеграла.

Праці [7, 8] присвячені вивченню коректності задачі Коші для лінійного стохастичного рівняння параболічного типу вищого порядку з коефіцієнтами, залежними від часу, і неперервними збуреннями, розв'язок якого у фіксовані моменти зазначає імпульсної дії.

Метою даної статті є отримання умов на символи рівняння та початкову функцію, за яких з імовірністю 1 буде сумовним квадрат норми розв'язку задачі Коші для псевдодиференціального стохастичного рівняння, а також існуватиме функція Гріна задачі Коші, розв'язок та його оцінки за нормою з математичним сподіванням.

У ймовірнісному просторі (Ω,F,P) з неспадним потоком σ-алгебр F_t, $t\in[0,T]$, $F_{t_1}\subset F_{t_2}$ при $t_1<t_2$ на $\Pi_t\times\Omega:=[0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega$ визначена випадкова функція $u(t,x,\omega)$. Вона є F_t-узгодженою, тобто при фіксованих (t,x) випадкова величина $u(t,x,\omega)$ є F_t-вимірною при всіх $(t,x)\in\Pi_t$. З імовірністю 1 є розв'язком псевдодиференціального стохастичного рівняння

$$d_tu=F^{-1}_{\sigma\to x}\Big[(-a(\sigma)dt+b(\sigma)dw+$$

$$+c(\sigma)\int\limits_{\mathbb{Z}}f(z)\nu(dt,dz))F_{x\to\sigma}u\Big] \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$u|_{t=0}=\varphi(x,\omega),x\in\mathbb{R},\omega\in\Omega. \qquad (2)$$

Тут $u=F^{-1}_{\sigma\to x}v(t,\sigma,\omega)$ – перетворення Фур'є; $a(\sigma)$, $b(\sigma)$, $c(\sigma)$ – сталі символи, однорідні за σ; $w(t)\equiv w(t,\omega)$ – одновимірний вінерівський процес, $\{\nu(t,A)\}$ – пуассонівська міра на $[0,T]\times\mathbb{Z}$ [10], які є незалежними між собою, крім того, для функції $f(z)$, $f\colon z\to\mathbb{R}$ виконується умова

$$K=\int\limits_{\mathbb{Z}}\frac{f^2(z)}{z^2}dz<+\infty,\quad \mathbb{Z}\subset\mathbb{R}.$$

Під розв'язком задачі (1), (2) будемо розуміти випадкову F_t-узгоджену функцію $u(t,x,\omega)$, яка з імовірністю 1 задовольняє інтегральне рівняння

$$u(t,x,\omega)=\varphi(x)+$$

$$+\int\limits_0^t F^{-1}_{\sigma\to x}\Big[\Big(-a(\sigma)ds+b(\sigma)dw+$$

$$+c(\sigma)\int\limits_{\mathbb{Z}} f(z)\nu(ds,dz)\Big)F_{x\to\sigma}u\Big]ds.$$

Через $\mathfrak{M}_T$ позначимо простір вимірних функцій $u(t,x,\omega)$, для яких

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} M\{|u(t,x,\omega)|^2\}dx<+\infty \qquad (3)$$

при будь-якому $t\in[0,T]$. Тут M – операція математичного сподівання (МС).

Скінченна норма у ньому вводиться так

$$\|u(t,x,\omega)\|^2_{\mathfrak{M}_T}=$$

$$=\int\limits_0^T M\Big\{\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|u(t,x,\omega)|^2dx\Big)^2\Big\}dt= \qquad (4)$$

$$=\int\limits_0^T \|u\|^2_{L_{2,M}}dt.$$

Шукатимемо розв'язок задачі (1), (2) за допомогою інтегрального перетворення Фур'є

$$u(t,x,\omega)=F^{-1}_{\sigma\to x}v(t,\sigma,\omega)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\sigma x}v(t,\sigma,\omega)d\sigma. \qquad (5)$$

Випишемо відповідну задачі (1), (2) задачу Коші в образах Фур'є

$$d_tv=[-a(\sigma)dt+b(\sigma)dw+$$

$$+c(\sigma)\int\limits_{\mathbb{Z}} f(z)\nu(dt,dz)]v(t,\sigma,\omega), \qquad (6)$$

$$v|_{t=0}=\tilde\varphi(\sigma),\sigma\in\mathbb{R},\omega\in\Omega. \qquad (7)$$

За формулою Іто для звичайного стохастичного рівняння з мірою Пуассона [11] існує розв'язок з імовірністю 1. За аналогією випишемо розв'язок задачі Коші (6), (7)

$$v(t,\sigma,\omega)=$$

$$=\tilde\varphi(\sigma)\exp\Big\{\Big(-a(\sigma)-\frac{1}{2}b^2(\sigma)\Big)t+b(\sigma)w(t)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{Z}}\ln|1+c(\sigma)|\,f(z)\nu(ds,dz)\Big\}. \qquad (8)$$

Теорема 1. *Нехай: 1) дійсний символ*

$$s(\sigma)=2a(\sigma)-3(b^2(\sigma)+c^2(\sigma)K)$$

є парною функцією, однорідною степеня γ ($s(\lambda\sigma)=\lambda^\gamma s(\sigma)$) і задовольняє нерівність

$$s(\sigma)\ge c_0|\sigma|^\gamma,\quad \text{де}\quad \gamma>1,c_0>0; \qquad (9)$$

2) початкова функція $\tilde\varphi(\sigma)$ з імовірністю 1 допускає перетворення Фур'є при кожному ω і належить $L_{2,M}$. Тоді існує розв'язок задачі (1), (2) з імовірністю 1, який належить класу $\mathfrak{M}_T$ і для нього виконується нерівність

$$\|u\|^2_{\mathfrak{M}_T}\le c(\gamma,c_0)\|\varphi(x)\|^2_{L_{2,M}}. \qquad (10)$$

Доведення. Нормальним розв'язком відповідного рівнянню (6) детермінованого рівняння є функція

$$H(t-\tau,\sigma)=e^{-a(\sigma)(t-\tau)}.$$

За допомогою нього поставимо у відповідність задачі (6), (7) інтегральне рівняння

$$v(t,\sigma,\omega)=\tilde\varphi(\sigma)e^{-a(\sigma)t}+\int\limits_0^t e^{-a(\sigma)(t-s)}\times$$

$$\times b(\sigma)v(s,\sigma,\omega)dw(s,\omega)+\int\limits_0^t e^{-a(\sigma)(t-s)}c(\sigma)\times$$

$$\times v(s,\sigma,\omega)\int\limits_{\mathbb{Z}} f(z)\nu(dz,ds)=$$

$$=\tilde\varphi(\sigma)e^{-a(\sigma)t}+\int\limits_0^t e^{-a(s)(t-s)}v(s,\sigma,\omega)\times$$

$$\times(b(\sigma)dw+c(\sigma)\int\limits_{\mathbb{Z}} f(z)u(ds,dz)). \qquad (11)$$

Домножимо обидві частини (11) на $e^{a(\sigma)t}$, піднесемо до квадрату модуль лівої і правої частин отриманого рівняння, скористаємося очевидною нерівністю $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$:

$$|\nu(t,\sigma,\omega)|^2 e^{2a(\sigma)t} \le 3\Big\{|\tilde{\varphi}(\sigma)|^2 + \Big|\int_0^t e^{a(\sigma)s}\times$$

$$\times b(s)v(s,\sigma,\omega)dw(s,\omega)\Big|^2 + \qquad (12)$$

$$+\Big|\int_0^t e^{a(\sigma)s}c(\sigma)v(s,\sigma,\omega)\int_{\mathbb{Z}} f(z)\nu(ds,dz)\Big|^2\Big\}.$$

До обох частин нерівності (12) застосуємо операцію МС, враховуючи його дію на квадрати інтегралів Вінера-Іто та за пуассонівською мірою [11]

$$M\Big\{\Big(\int_0^t f(t,\omega)dw(t,\omega)\Big)^2\Big\} =$$

$$= \int_0^t M\{f^2(t,\omega)\}dt,$$

$$M\Big\{\Big(\int_0^t\int_{\mathbb{Z}} f(z)\nu(ds,dz)\Big)^2\Big\} =$$

$$= \int_0^t\int_{\mathbb{Z}}\Big\{\frac{f^2(z)}{z^2}\Big\}dsdz.$$

У результаті отримаємо

$$M\{|v(t,\sigma,\omega)|^2\}e^{2a(\sigma)t} \le 3\Big\{M\{|\tilde{\varphi}(\sigma)|^2\}+$$

$$+\int_0^t e^{2a(\sigma)s}M\{|v(s,\sigma,\omega)|^2\}\times$$

$$\times(b^2(\sigma)+c^2(\sigma)Kds)\Big\}. \qquad (13)$$

Згідно з лемою Гронуола [9] з нерівності $u(t) \le c + \int_{t_0}^t u(\tau)v(\tau)d\tau$ для інтегровних функцій $u(t)$ і $v(t) \ge 0$, $c > 0$, $t > t_0$ випливає, що $u(t) \le ce^{\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau}$.

Застосувавши її для $M\{|v(t,\sigma,\omega)|^2\}e^{2a(\sigma)t}$, знайдемо, що

$$M\{|v(t,\sigma,\omega)|^2\} \le M\{|\tilde{\varphi}(\sigma)|^2\}\times$$

$$\times e^{(-2a(\sigma)+3(b^2(\sigma)+c^2(\sigma)K))t} \equiv$$

$$\equiv M\{|\tilde{\varphi}(\sigma)|^2\}e^{-s(\sigma)t}. \qquad (14)$$

Зінтегрувавши останню нерівність і враховуючи оцінку (9) та умови теореми, дістанемо

$$|v(t,\sigma,\omega)|^2_{\mathfrak{M}_T} \le \int_0^T dt\int_0^{+\infty} M\{|\tilde{\varphi}(\sigma)|^2\}e^{-s(\sigma)t}d\sigma \le$$

$$\le \int_0^T dt\int_0^{+\infty} M\{|\tilde{\varphi}(\sigma)|^2\}e^{-c_0|\sigma|^{\gamma}t}d\sigma.$$

Звідси, внаслідок заміни $\sigma t^{1/\gamma} = \beta$ та зміни порядків інтегрування

$$|v|^2_{\mathfrak{M}_t} \le \int_0^{+\infty}\frac{M\{|\tilde{\varphi}(\sigma)|^2\}}{|\sigma|^{\gamma}}\Big(\int_0^{|\sigma|^{\gamma}T} e^{-c_0\beta}d\beta\Big)d\sigma =$$

$$= \int_0^{+\infty} M\{|\tilde{\varphi}(\sigma)|^2\}\Big(\frac{1-e^{-c_0|\sigma|^{\gamma}T}}{|\sigma|^{\gamma}}\Big)d\sigma.$$

Функція $\dfrac{1-e^{-|z|}}{|z|}$ обмежена для всіх $z \in (0;+\infty)$. Тому будемо мати

$$|v|^2_{\mathfrak{M}_T} \le c\int_0^{+\infty} M\{|\tilde{\varphi}(\sigma)|^2\}d\sigma =$$

$$= c\|\tilde{\varphi}(\sigma)\|_{L_{2,M}}. \qquad (15)$$

Скориставшись теоремою Планшереля [10], отримаємо нерівність

$$|u|^2_{\mathfrak{M}_T} \le c\|\varphi(x)\|_{L_{2,M}}.$$

Тепер уточнимо властивості розв'язку задачі (1), (2), вважаючи, що рівняння містить тільки неперервні збурення ($c(\sigma) \equiv 0$). Запишемо розв'язок задачі (1), (2) за допомогою функції Гріна задачі Коші для рівняння (1).

Розглянемо розв'язок з формули (8), який визначається за формулою

$$v(t,\sigma,\omega) = \tilde{\varphi}(\sigma)e^{-(a(\sigma)+\frac{1}{2}b^2(\sigma))t+b(\sigma)w(t)}. \qquad (16)$$

Нормальний розв'язок рівняння в образах Фур'є при $c(\sigma) \equiv 0$ має вигляд

$$Q(t, \tau, \sigma, \omega) = e^{-(a(\sigma)+\frac{1}{2}b^2)(t-\tau)+b(\sigma)(w(t)-\omega(\tau))}. \tag{17}$$

Розглянемо його перетворення Фур'є

$$G(t, \tau, x, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} Q(t, \tau, \sigma, \omega) d\sigma. \tag{18}$$

Якщо скористатися теоремою про перетворення Фур'є згортки двох функцій, то з формули (16) отримаємо зображення розв'язку вихідної задачі

$$u(t, x, \omega) = F^{-1}_{\sigma \to x} v(t, \sigma, \omega) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, 0, x-\xi, \omega)\varphi(\xi, \omega) d\xi. \tag{19}$$

Правильною є теорема про властивість функції Гріна та розв'язку задачі Коші.

Теорема 2. *1) Припустимо, що функція $a(\sigma + ip)$ комплексного аргументу є однорідною з цілим показником γ, нескінченно диференційовною і задовольняє нерівність*

$$\mathrm{Re} a(\sigma + ip) \geq c_0|\sigma|^\gamma - c_1|p|^\gamma, c_0, c_1 > 0. \tag{20}$$

Тоді функція Гріна, яка визначена формулою (18), є цілою функцією відносно $(x + iy)t^{-1/\gamma}$ і для неї справджується оцінка

$$|MD^k_x G(t, 0, x + iy, \omega)| \leq$$

$$\leq c_k t^{-\frac{k}{\gamma}} e^{-c_2(xt^{-1/\gamma})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + c_3(yt^{-1/\gamma})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}. \tag{21}$$

2) Якщо символ $a(\sigma)$ є однорідною функцією порядку γ, $\gamma > 1$ і не ціле, при $\sigma \neq 0$ існують похідні

$$|D^k_\sigma a(\sigma)| \leq c_k|\sigma|^{\gamma-k},$$

$$k = 0, 1, \ldots, N; N \geq 3 + 2[\gamma],$$

тоді для $G(t, 0, x, \omega)$ справджується оцінка

$$|MD^k_x G(t, x, \omega)| \leq c_k \frac{t^{\frac{[\gamma]}{\gamma}}}{(t^{1/\gamma} + |x|)^{1+[\gamma]+k}}. \tag{22}$$

Розв'язок задачі (1), (2) *визначається формулою* (19).

3) Якщо $\varphi \in C_M(\mathbb{R})$ зі скінченною нормою

$$\|\varphi(x)\|_{C_M(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |M\{\varphi(x, \omega)\}|,$$

то для розв'язку є правильною оцінка

$$|MD^k_x u(t, x, \omega)| \leq c_k t^{-\frac{k}{\gamma}} \|\varphi(x)\|_{C_M(\mathbb{R})}. \tag{23}$$

Якщо ж $\varphi \in C^{(m)}_M(\mathbb{R})$, то

$$|MD^m_x u(t, x, \omega)| \leq c|MD^m \varphi(x, \omega)|. \tag{24}$$

Доведення. Розглянемо перетворення Фур'є від функції $Q(t, \tau, \sigma, \omega)$, яка визначена формулою (17). Покажемо, що вона абсолютно сумовна при майже всіх $\omega \in \Omega$. Скористаємося нерівністю для дійсних функцій $a(\sigma)$ та $b(\sigma)$ у показнику $Q(t, \tau, \sigma, \omega)$. Маємо

$$-\frac{1}{2}b^2(\sigma)(t-\tau) + b(\sigma)(w(t) - w(\tau)) =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(b(\sigma)\sqrt{t-\tau} - \frac{w(t) - w(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\Big)^2 +$$

$$+\Big(\frac{w(t) - w(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\Big)^2 \leq \frac{(w(t) - w(\tau))^2}{t-\tau}.$$

Отже, за умови $a(\sigma) \geq c_0|\sigma|^\gamma$, отримуємо нерівність

$$|Q(t, \tau, \sigma, \omega)| \leq c \exp\Big\{-c_0|\sigma|^\gamma(t-\tau) +$$

$$+\frac{(w(t) - w(\tau))^2}{t-\tau}\Big\}, \tag{25}$$

яка гарантує існування інтеграла Фур'є для $Q(t, \tau, \sigma, \omega)$.

Тепер розглянемо функцію $Q(t, \tau, \sigma, \omega)$ і врахуємо, що для сумовних з квадратом функцій $f(s, \omega)$ маємо [11]

$$M\Big\{e^{\int_0^t f(s,\omega)dw(s,\omega) - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s,\omega)ds}\Big\} = 1.$$

Отже,

$$MG(t, \tau, \sigma, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} MQ(t, \tau, \sigma, \omega) d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x - a(\sigma)(t-\tau)} d\sigma. \qquad (26)$$

За умови 1) теореми 2 функція

$$Q(t, \sigma + ip) = e^{-a(\sigma+ip)t}$$

є цілою відносно аргументу $(\sigma + ip)t^{-1/\gamma}$ і задовольняє нерівність

$$Q(t, \sigma + ip) \leq e^{(-c_0|\sigma|^\gamma + c_1|p|^\gamma)t}.$$

Згідно з лемою 1.1 [9] про перетворення Фур'є для цілих функцій, функція $MG(t, x + iy)$ є цілою відносно аргументу $(z + iy)t^{-1/\gamma}$ і задовольняє нерівність (21).

Інтеграл Фур'є (26) при обмеженнях 2) теореми 2 на символ $a(\sigma)$ оцінюється за допомогою методики, розвинутої у працях [1 – 6]. При цьому для похідних функції Гріна з операцією математичного сподівання, на відміну від першого випадку з аналітичним символом, отримуються степеневі оцінки (22).

На закінчення оцінимо розв'язок задачі Коші. Для цього продиференціюємо інтеграл (19) і скористаємося оцінкою (22).

Якщо $\varphi \in C_M(\mathbb{R})$, то

$$|MD_x^k u(t, x, \omega)| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |MD_x^k G(t, 0, x - \xi, \omega)\varphi(\xi, \omega)| d\xi \leq$$

$$\leq c_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{\frac{[\gamma]}{\gamma}} M\{\varphi(\xi)\}}{(t^{1/\gamma} + |x - \xi|)^{[\gamma]+1+k}} d\xi.$$

Зробимо заміну $x - \xi = t^{1/\gamma} z$, тоді при $t > 0$ отримаємо

$$|MD_x^k u(t, x, \omega)| \leq c_k \|\varphi(x)\|_{C_M(\mathbb{R})} \times$$

$$\times t^{-\frac{k}{\gamma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1 + |z|)^{[\gamma]+1+k}}.$$

Звідси, враховуючи збіжність останнього інтеграла, випливає (23).

Якщо $\varphi \in C^{(m)}(\mathbb{R})$, то зробивши заміну $x - \xi = z$, одержимо

$$MD_x^k u = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, z) M\{D_x^k \varphi(x - z, \omega)\} dz.$$

Звідси, як і в попередньому випадку, отримаємо оцінку (24) для похідних розв'язку (19) для всіх $t \in [0, T]$.

Зауваження. Теореми 1, 2 правильні для випадку псевдодиференціального рівняння з n-вимірним інтегралом Фур'є і символами, залежними від t.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д., Дринь Я.М.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 3. – С. 198-203.

2. *Дрінь Я.М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних рівнянь операторів у просторах гільбертових функцій // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 1. – С. 19-21.

3. *Дринь Я.М.* ФР задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 3. – С. 198-203.

4. *Федорюк М.В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения // Диф. уравнения. – 1978. – № 7. – С. 1296-1301.

5. *Городецький В.В.* Еволюційні рівняння в зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. – Чернівці: Рута, 2008. – 400 с.

6. *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН УССР, серия матем. Том 52, № 5. – 1988. – С. 909-934.

7. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. – Чернівці: ЧНУ, 2010. – 248 с.

8. *Перун Г.М.* Задача з імпульсною дією для лінійного стохастичного параболічного рівняння вищого порядку // Укр. мат. журн. – Том. 60, № 10. – 2008. – С. 1427-1428.

9. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 445 с.

10. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 612 с.

11. *М.Л. Свердан, С.Д. Царков, В.К. Ясинський* Стохастичні динамічні системи із скінченною післядією. – Чернівці: Зелена Буковина, 2000. – 560 с.