УДК 532.528

©2012 р. І.Г. Нестерук, Б.Д. Шепетюк

Інститут гідромеханіки НАН України
Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ В ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧАХ ГІДРОМЕХАНІКИ

Обернені нестаціонарні задачі високошвидкісної гідродинаміки досліджуються за допомогою інтегро-диференціального рівняння. Його розв'язок був представлений у вигляді асимптотичного ряду і дозволив отримати аналітичні формули для першого та другого наближення форми тонких стаціонарних осесиметричних каверн у важкій та невагомій рідинах для дота надзвукового обтікання, а також форми осесиметричних тіл із заданим розподілом тиску по поверхні. Запропоновано методику розрахунку опору тонких кавітаторів.Проаналізовано обмеження на параметри стаціонарних та нестаціонарних кавітаційних течій з точки зору стійкості задач математичної фізики. Для випадку часткової кавітації на тілі конус-циліндр вдалося виявити низку фізичних ефектів, зроблено класифікацію можливих форм тонких осесиметричних каверн. Розглянуто вплив піддуву газу на форму тонких осесиметричних стаціонарних каверн.

Inverse unsteady problems of high-speed hydromechanics were investigated with the use of integral-differential equation. Its solution was expressed as an asymptotic series and allowed obtaining analytic formulas for the first and second approximations both for the shape of slender axisymmetric cavities in ponderable and unponderable liquids for sub- and supersonic flows and for axisymmetric body shapes with the prescribed pressure distribution over the surface. Parameters limitations for the steady and the unsteady cavity flows were investigated with the use of stability principle for the mathematical physics problems. In the case of the partial cavitation on the conical-cylindrical bodies some physical effects were revealed; a classification of the possible axisymmetric cavity shapes was done. The gas ventilation influence on the slender axisymmetric steady cavities was investigated.

Розвиток чисельних методів з використанням моделі ідеальної рідини та CFD методів, що використовують моделі в'язкої двофазної течії, не знімає актуальності розрахунків форми осесиметричних каверн в постановці тонкого тіла, особливо у нестаціонарному випадку. Рівняння для потенціалу стаціонарного обтікання тонкого тіла потоком ідеальної нестисливої рідини були отримані в монографіях [1, 2]. Зокрема, в [2] методом зрощування асимптотичних розвинень в ньому буди виділені члени різного порядку малості. В статті [3] цей метод був узагальнений на нестаціонарний випадок і було отримано наступний вираз для потенціалу у зв'язаній з центром донного перерізу кавітатора циліндричній системі координат x, r:

$$\Phi(x,r,t,\varepsilon) = x + \varepsilon^2 \ln\varepsilon A(x,t) +$$

$$+\varepsilon^2 \left\{A(x,t)\ln r_* + B(x,t)\right\} + O(\varepsilon^4 \ln^2\varepsilon) \quad (1)$$

$$r_* = \frac{r}{\varepsilon}; \quad A(x,t) = F\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \tau\frac{\partial F}{\partial t}\right);$$

$$B(x,t) = -A(x,t)\ln 2 -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{l(t)} \frac{\partial A(\xi,t)}{\partial \xi} sign(x-\xi)\ln|x-\xi|\,d\xi \quad (2)$$

$$F(x,t) = \frac{R(x,t)}{\varepsilon}; \quad l(t) = \frac{l'(t)}{L'}.$$

Інтегрування у формулі (2) відбувається по всій довжині системи кавітатор-каверна-замикатель l, позначення зі штрихом використовуються для фізичних (розмірних) величин.

Підставляючи вираз (1) в інтеграл Коші-Лагранжа, можна отримати, [3]

$$\varepsilon^2 \ln\varepsilon Z(A) + \varepsilon^2 \Big[Z(A)\ln F + Z(B) +$$

$$+0,5A^2F^{-2}x\Big] + O(\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon) = \qquad (3)$$
$$= \pm xFr^{-2}(t) - 0,5Cp(x,t);$$

$$\mathrm{Z}(U) \equiv \tau \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + SU,$$
$$\Phi(x,r,t) = \frac{\Phi'(x,r,t)}{L'U'_\infty(t)}, \quad x = \frac{x'}{L'}, \quad r = \frac{r'}{L'},$$
$$t = \frac{t'}{t'_x}, \quad R(x,t) = \frac{R'(x,t)}{L'}, \quad \tau(t) = \frac{L'}{t'_x\, U'_\infty(t)},$$
$$S(t) = \frac{L'}{V'^2_\infty(t)} \frac{dU'_\infty}{dt'}, \quad Fr(t) = \frac{U'_\infty(t)}{\sqrt{g'L'}},$$
$$Cp(x,t) = \frac{2[p'(x,t) - p'_\infty(0,t)]}{\rho' U'^2_\infty(t)}$$

де $t\prime_x$ – характерний час нестаціонарності, наприклад, період пульсацій. Нелінійне інтегро-диференціальне рівняння (3) зв'язує невідомий радіус тонкого тіла (або каверни) з розподілом тиску на поверхні $Cp(x,t)$. В диференціальних рівняннях Григоряна та Якимова [4, 5] врахована лише частина членів порядку ε^2.

Розв'язок інтегродиференціального рівняння (3) знайдено в [6] у вигляді асимптотичного ряду

$$F^2(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\varepsilon) f_i(x,t);$$
$$1 \equiv \mu_1 >> \mu_2 >> \ldots >> \mu_i >> \ldots,$$
$$A(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\varepsilon) A_i(x,t);$$
$$B(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\varepsilon) B_i(x,t);$$
$$A_i(x,t) = 0.5\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} + \tau \frac{\partial f_i}{\partial t}\right);$$
$$B_i(x,t) = -A_i(x,t)\ln 2 -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^{l(t)} \frac{\partial A_i(\xi,t)}{\partial \xi} sign(x-\xi) \ln|x-\xi|\, d\xi.$$

Підстановка цих розвинень в (3) і виділення членів різного порядку малості дає рівняння першого, другого та $i+1$ наближень:

$$\varepsilon^2 \ln\varepsilon\ Z(A_1) = \pm xFr^{-2}(t) - 0.5\ Cp(x,t) \quad (4)$$

$$Z(A_2) = -0,5Z(A_1)\ln f_1 - -Z(B_1) - 0,5A_1^2 f_1^{-1}; \qquad (5)$$

$$Z(A_{i+1}) = H_{i+1}(A_1, \ldots, A_i, f_1, \ldots, f_i) - Z(B_i),$$
$$\mu_i(\varepsilon) = (\ln\varepsilon)^{1-i}$$

де H_{i+1} - нелінійні функціонали.

Таким чином, інтегруючи лінійне диференціальне рівняння першого порядку (4), можна знайти $A_1(x,t)$. Після цього можна знайти функції $B_1(x,t)$та $f_1(x,t)$. Тоді права частина рівняння (5) стає відомою і з нього можна знайти A_2, а потім f_2та B_2. Процес можна продовжувати як завгодно довго, збільшуючи відповідно точність розв'язку, але нелінійний функціоналH_{i+1} сильно ускладнюється при збільшенні номера i.

Рівняння першого наближення (4) має досить обмежену точність порядку $|\ln\varepsilon|^{-1}$, і, наприклад, для ε*=0,1* вона становить лише 44%, а для ε*=0,01* - лише 22%. Разом з тим, більше як тридцятилітній досвід його використання для розрахунків стаціонарних і нестаціонарних каверн, суперкавітаційного опору та форми осесиметричних тіл із заданим розподілом тиску на поверхні показав, що воно описує всі основні якісні особливості осесиметричних течій з невідомими частинами поверхонь. Деякі цікаві результати використання рівняння першого наближення (4) та виявлені фізичних ефекті будуть наведені нижче.

Варто зауважити, що рівняння першого наближення (4) не містить інтегрального члена (2), тому воно узгоджується з принципом незалежності розширення каверни, сформульованого Г.В. Логвиновичом ще 1959 р. (див., наприклад, [7]), за яким кожний переріз видовженої тривимірної суперкаверни еволюціонує незалежно від її поведінки в інших перерізах. Відповідно зміни радіуса каверни залежать лише від різниці тисків всередині кавітаційної порожнини та далеко від неї та початковими умовами в момент створення заданого перерізу каверни. 2013 року ми відзначаємо 100 років з дня народження цього видатного вченого, життя і творчість якого тісно пов'язані з Україною та Інститутом гідромеханіки НАНУ.

Суттєве покращання точності може бути одержане лише з використанням інтегро-диференціального рівняння (3), тобто з врахуванням як членів порядку $\varepsilon^2 ln\varepsilon$, так і членів порядку ε^2. Принцип незалежності розширення для цього рівняння не діє (через наявність інтегрального члена $B_(x,t)$). Так само він перестає бути справедливим вже в другому наближенні (5) (через наявність інтегрального члена $B_1(x,t)$). Слід відзначити, що для плоских течій з видовженою вільною поверхнею не існує старшого члена порядку $\varepsilon^2 ln\varepsilon$, тому рівняння для форми каверни є інтегро-диференціальним (див., наприклад [8]), і принципом незалежності розширення користуватись не можна.

Таким чином, було запропоновано математично замкнену постановку стаціонарної та нестаціонарной задач [3-5, 9] визначення форми тонкої осесиметричної каверни та асимптотичний розв'язок [6], незалежні від емпіричних констант. Зокрема, така постановка дозволяє обчислити опір тиску кавівітатора при стаціонарному та нестаціонарному обтіканні (див. [10, 11]).

В стаціонарному випадку рівняння першого наближення набуває дуже простого вигляду:

$$\frac{d^2R^2}{dx^2} = \frac{-Cp(x) \pm 2xFr^{-2}}{\ln\varepsilon} \tag{6}$$

Для кавітаційних течій його розв'язок отримано і проаналізовано ще в 1979 р., [9]. Подвійне інтегрування (6) з врахуванням початкових умов

$$\tilde{R}(0) = 1, \quad \frac{d\tilde{R}}{d\tilde{x}}\,|_{x=0} = \beta \tag{7}$$

(всі довжини віднесені до радіусу кавітатора в точці сходу струменів, β- похідна від радіуса в цій же точці) приводить до простої аналітичної формули для радіуса тонкої осесиметричної стаціонарної каверни

$$\tilde{R}^2 = \frac{\sigma\tilde{x}^2}{2\ln\varepsilon} \pm \frac{\tilde{x}^3}{3Fr^2\ln\varepsilon} + 2\beta\tilde{x} + 1 \tag{8}$$

Для випадку невагомоЇ рідини (дуже великих чисел Фруда) розв'язок рівняння першого наближення (8) набуває вигляду

$$\tilde{R}^2 = \alpha\tilde{x}^2 + 2\beta\tilde{x} + 1, \quad \alpha = \frac{\sigma}{2\ln\varepsilon} \tag{9}$$

Рівняння (9) свідчить, що при $\sigma > 0$ каверна має еліптичну форму, що відповідає експериментальним даним Райхардта [12], отриманим ще в 1946 р. (див. також [13, 14]). Але формула (9) може описувати також параболу, гіперболу та пряму лінію. Значення чисел кавітаці, що відповідають різним формам каверн, проаналізовано в [15]. При цьому дуже актуальним стає питання про те, в яких випадках різні форми каверн існують в реальних течіях. Для такого аналізу був застосований принцип стійкості задач математичної фізики, за яким малі зміни параметрів, що визначають течію, мусять викликати малі зміни розв'язку. Приклади втрати стійкості та відповідні обмеження на параметри суперкавітаційних течій можна знайти в [9, 15, 16].

Для зменшення опору корпусів високошвидкісних підводних апаратів та кораблів можна використовувати піддув газу, що дозволяє знизити опір тертя шляхом зменшення площі контакту з водою [7, 14]. При цьому ефективність суперкавітаційного режиму обтікання вимагає зменшення числа кавітації та максимального використання об'єму каверни [17]. Тому дуже актуальними є дослідження форми штучних каверн та впливу інтенсивності їх газом, що рухається у вузькому каналі між поверхнями тіла та каверни.

Зокрема, в роботах [18 -20] використовувалась дуже проста модель одновимірного потоку ідеального нестисливого газу в кільцевому каналі між поверхнями тіла та каверни, що дозволяє за допомогою рівняння першого наближення (6) отримати звичайне диференціальне рівняння для радіуса тонкої осесиметричної стаціонарної вентильованої каверни в невагомій рідині [18]: Був розглянутий вплив різних інтенсивностей піддуву газу на форму каверн [18-20].

Проаналізовано випадки різних форм кавітаторів, зокрема вплив парамера β. Показано, що при $\beta > 0$ (наприклад, конічні кавітатори) піддув газу може значно збільшувати розміри каверн [18] і робити їх необмеженими при деякому критичному значенні параметра Ve - відношення швидкісних напорів газу у фіксованому перерізі каверни та в потоці рідини. Для донних каверн ($\beta \leq 0$) вентиляція зменшує розміри каверн [19]. Отримані теоретичні результати дозволяють пояснити виявлені в експериментах факти як слабкої залежністі довжини каверни від піддуву, так і її стрибкоподібного зростання, а також гістерезисного характеру залежності довжини каверни від інтенсивності вентиляції.

Розв'язок диференціального рівняння роботи [18] при малих значеннях інтенсивності піддуву може бути представлений у вигляді асимптотичного ряду [20] . Показано, що в цьому випадку форма вентильованої каверни наближається до парової з певним ефективним числом кавітації. Якщо значення параметра Ve має один порядок з числом кавітаціїї, то слід використовувати нелінійне рівняння [18]. Виконано розрахунки довжини вентильованої каверни, що замикається на тілах конус-циліндр параметра [20] . Показано, що значення інтенсивності вентиляції в цьому випадку також є обмеженими.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Франкль Ф.И., Карпович Е.А. Газодинамика тонких тел. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 175 с.

2. Cole J.D., 1968, Perturbation Methods in Applied Mathematics, Blaisdell Publishing Company: Waltham, Massachusetts; Toronto; London.

3. Нестерук И.Г. О форме тонкой осесимметричной нестационарной каверны // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1980. – № 4. – С. 38-47.

4. Григорян С.С. Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела // ПММ. – 1959. – Т. 23, вып. 5. – С. 351-353.

5. Якимов Ю.Л. Об осесимметричном срывном обтекании тела вращения при малых числах кавитации // ПММ. – 1968. – Т. 32, вып.3. – С. 499-501.

6. Нестерук И.Г. Об определении формы тонкой осесимметричной каверны на основе интегродифференциального уравнения // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1985. – № 5. – С.83-90.

7. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами. – К.: Наук. думка, 1969. – 208 с.

8. Tulin M.P. Supercavitating flows. – In Handbook of Fluid Dynamics. – New York: McGraw–Hill Book Company, 1961.

9. Нестерук И.Г. К вопросу о форме тонкой осесимметричной каверны в весомой жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1979. – № 6. – С. 133-136.

10. Нестерук И.Г. Некоторые задачи осесимметричных кавитационных течений // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1982. – № 1. – С. 28-34.

11. Нестерук И.Г. К расчету сопротивления тонких осесимметричных кавитаторов. – В сб.: Аэродинамика нестационарных процессов. – Изд-во Томского университета, Томск, 1988. – С. 69-75.

12. Reichardt H. The Lows of Cavitation Bubbles at Axially Symmetric Bodies in a Flow. Ministry of Aircraft Production (Britain), Rept. and Transl. 766. – 1946.

13. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. – М.: Мир. – 1974. – 687 с.

14. Garabedian P.R. Calculation of axially symmetric cavities and jets // Pacif. J. Math. – 1956. – V. 6, N 4. – P. 611-689.

15. Нестерук І.Г. Часткова кавітація на видовжених тілах // Прикладна гідромеханіка. – 2004. – Т. 6(78). – № 3. – С. 64-75.

16. Нестерук И.Г. Об ограничениях на параметры кавитационных течений // Прикладная математика и механика. – Т.50, вып. 4. – 1986. – С. 584-588.

17. Nesteruk, I. 2012 Drag Effectiveness of Supercavitating Underwater Hulls, I. Nesteruk (ed.). Supercavitation, Springer. – Pp. 79-106.

18. Манова З.І., Нестерук І. Г., Шепетюк Б. Д. Оцінки впливу вентиляції на форму тонких осесиметричних каверн // Прикладна гідромеханіка. – 2011. – Т. 13 (85). – No. 2. – С. 44-50.

19. Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д. Особливості форми донних штучних осесиметричних каверн // Прикладна гідромеханіка. – 2011. – Т. 13 (85), № 3. – С. 69-75.

20. Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д. Форма штучних осесиметричних каверн при до- та надкритичних значеннях інтенсивності піддуву // Прикладна гідромеханіка. – 2012. – Т. 14(86). – № 2. – С. 53-60.