УДК 517.926

©2012 р. Д.О. Мігуца

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНОГО ВИПАДКУ ПЛОСКОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА ПО ЕЛІПТИЧНІЙ ОРБІТІ З ВРАХУВАННЯМ ВІДЦЕНТРОВИХ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ

Досліджується плоский рух твердого тіла по коловій та еліптичній орбіті з врахуванням відцентрових моментів інерції.

The plane motion of a rigid body in circular and elliptical orbit taking into account centrifugal moments are studied.

В класичних задачах механіки, пов'язаних з її застосуванням до пристроїв, що функціонують поблизу або на поверхні Землі, сили притягання, прикладені до двох матеріальних точок однакових мас, вважаються рівними як за величиною, так і за напрямком. Внаслідок цього центр мас і центр ваги збігаються, тому дорівнює нулю головний момент сил тяжіння (гравітаційний момент) відносно центра мас. У звичайних умовах гравітаційні моменти малі порівняно з іншими силами дії, але в небесній механіці вони часто відіграють важливу роль.

Розглянемо задачу про рух вільного твердого тіла в центральному ньютонівському гравітаційному полі сил. Для отримання диференціальних рівнянь руху твердого тіла необхідно знайти головний вектор сил тяжіння і їх гравітаційний момент відносно центра мас тіла.

Нехай $OXYZ$ – система координат з початком в центрі мас тіла і віссю OZ, направленою по прямій, що з'єднує притягуючий центр O_* і центр мас O тіла (рис. 1).

Вісь OY направлено по бінормалі до траєкторії центра мас в той бік, звідкіля його рух видно таким, який здійснюється проти годинникової стрілки, вісь OX доповнює осі OX і OZ до правої прямокутної системи координат. Систему координат $OXYZ$ у більшості випадків називають орбітальною.

Нехай $\mathbf{R}$ – радіус-вектор центра мас тіла відносно притягуючого центра, а $\mathbf{r}$ – радіус-вектор виділеного в тілі малого елементу масою dm відносно притягуючого центра (рис. 2). Сила притягання елемента dm визначається за формулою

$$d\mathbf{F} = -(\gamma M dm/r^3)\mathbf{r}, \qquad (1)$$

де γ – гравітаційна стала, а M – маса притягуючого тіла O_*. Головний вектор $\mathbf{F}$ сил притягання тіла отримується з формули (1) шляхом інтегрування по всьому об'єму тіла. Здійснемо обчислення, вважаючи лінійні розміри тіла набагато меншими відстані від центра мас тіла до притягуючого центра.

Нехай $\boldsymbol{\rho}$ – радіус-вектор елемента dm, а X, Y, Z – його компоненти в орбітальній системі координат. Тоді

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}, \quad r = R\sqrt{1 + (2Z/R) + \rho^2/R^2}. \qquad (2)$$

Якщо знехтувати величинами порядку $(\rho/R)^2$ і вищих порядків, то з (2) отримаємо розклад величини $1/r^3$ у ряд Тейлора у вигляді

$$1/r^3 = (1 - 3Z/R)r^3. \qquad (3)$$

Підставляючи (2) і (3) у формулу (1), інтегруючи по всьому об'єму і враховуючи, що центр мас тіла знаходиться у початку координат, тобто

$$\int X dm = 0, \int Y dm = 0, \int Z dm = 0, \quad (4)$$

одержимо формулу для головного вектора

сил тяжіння у вигляді

$$\mathbf{F} = -(\gamma Mm/R^3)\mathbf{R},$$

де m – маса тіла.

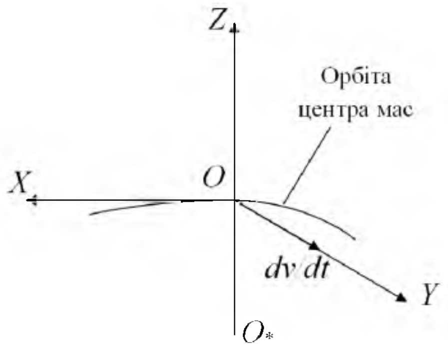

Рис. 1

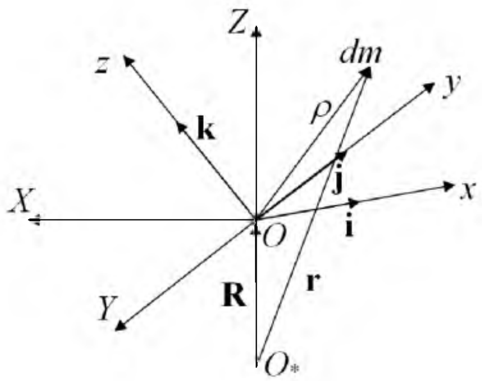

Рис. 2

Знаючи головний вектор сил тяжіння, знайдемо її гравітаційний момент. Нехай $Oxyz$ – система, яка жорстко зв'язана з твердим тілом, причому її вісі не направлені по головних осях інерції тіла (рис. 2). Орієнтацію тіла по відношенню до орбітальної системи координат ($OXYZ$) будемо визначати кутами Ейлера ψ, θ, φ (рис. 3).

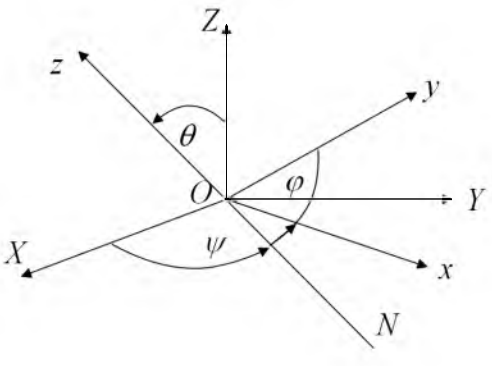

Рис. 3

Елементи a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ матриці переходу від системи координат $Oxyz$ до системи $OXYZ$ визначаються через кути Ейлера за формулами:

$$\begin{gathered}
a_{11} = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta,\\
a_{12} = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta,\\
a_{13} = \sin\psi\sin\theta,\\
a_{21} = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta,\\
a_{22} = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta,\\
a_{23} = -\cos\psi\sin\theta, \quad a_{31} = \sin\varphi\sin\theta,\\
a_{32} = \cos\varphi\sin\theta, \quad a_{33} = \cos\theta.
\end{gathered} \tag{5}$$

На підставі формули (1) для головного моменту $\mathbf{M}_0$ сил тяжіння відносно центра мас отримаємо вираз

$$\mathbf{M}_0 = \int(\boldsymbol{\rho}\times d\mathbf{F}) = -\gamma M\int[(\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{r})/r^3]dm, \tag{6}$$

де інтегрування проводиться по всьому об'єму тіла. Обчислення інтегралу (6) проведемо по відношенню до системи координат $Oxyz$, в якій виконуються такі співвідношення:

$$\begin{gathered}
\rho = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},\\
\mathbf{R} = R(a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}),\\
\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho} = (x + Ra_{31})\mathbf{i} + (x + Ra_{32})\mathbf{j} +\\
+(z + Ra_{33})\mathbf{k},\\
\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{r} = R[(ya_{33} - za_{32})\mathbf{i} + (za_{31} - xa_{33})\mathbf{j} +\\
+(xa_{32} - ya_{31})\mathbf{k}].
\end{gathered} \tag{7}$$

Якщо в розкладі величини $1/r^3$ в ряд Тейлора знехтувати величинами порядку $(\rho/R)^2$ і вищих порядків, то отримаємо:

$$1/r^3 = 1/R^3[1 - (3/R)(xa_{31} + ya_{32} + za_{33})]. \tag{8}$$

З формул (7) і (8) випливає, що

$$(\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{r})r^3 = (1/R^2)[1 - (3/R)(xa_{31} + ya_{32} + za_{33})]\times$$
$$\times[(ya_{33} - za_{32})\mathbf{i} + (za_{31} - xa_{33})\mathbf{j} + (xa_{32} - ya_{31})\mathbf{k}]. \tag{9}$$

Підставимо останній вираз у формулу (6) і проведемо інтегрування по всьому об'єму тіла. Оскільки вісі Ox, Oy, Oz не направлені по головним осям інерції твердого тіла, то правильні наступні співвідношення:

$$\int xydm = F, \quad \int xzdm = E,$$

$$\int (y^2 - z^2)dm = C - B, \quad \int yzdm = D,$$

$$\int (z^2 - x^2)dm = A - C,$$

$$\int (x^2 - y^2)dm = B - A, \qquad (10)$$

де A, B, C – центральні моменти інерції тіла, а D, E, F – відцентрові моменти.

Здійснюючи інтегрування виразу (9) і враховуючи рівності (4), (6), (10) отримаємо наступні вирази для проекцій M_x, M_y, M_z гравітаційоного момента на осі Ox, Oy, Oz зв'язаної з тілом системи координат:

$$M_x = (3\gamma M/R^3)[(C - B)a_{33}a_{32} + Fa_{31}a_{33}],$$

$$M_y = (3\gamma M/R^3)[(A - C)a_{33}a_{31} - Fa_{32}a_{33}], \qquad (11)$$

$$M_z = (3\gamma M/R^3)[(B - A)a_{31}a_{32} - F(a_{31}^2 - a_{32}^2)].$$

У формулах (11) враховано випадок, коли два відцентрових моменти інерції рівні нулю ($D = E = 0$), причому величина R визначається за формулою

$$R = b/(1 + e\cos\nu),$$

де b і e – параметр та ексцентриситет орбіти.

Величина істинної аномалії ν задовольняє рівняння

$$d\nu/dt = (\sqrt{k}(1 + e\cos\nu)^2)/b^{3/2}.$$

Оскільки маса тіла m набагато менша за масу притягуючого центра, то можна вважати, що $k = \gamma M$.

Необхідно відзначити і той факт, що вирази (11) є наближеними, оскільки в даних формулах відкинуті члени, порядок яких не нижче за $(\rho/R)^2$.

Надалі в даній роботі будемо вивчати плоский рух твердого тіла по коловій та еліптичній орбітах з врахуванням того, що одна з осей інерції тіла весь час є перпендикулярною площині орбіти центра мас тіла. При дослідженні даного руху будемо використовувати динамічні рівняння Ейлера відносно неголовних осей інерції $Oxyz$. Дані рівняння мають вигляд [3, 4]:

$$Adp/dt - Fdq/dt - Edr/dt + (C - B)qr+$$
$$+Fpr - D(q^2 - r^2) - Epq = M_x,$$
$$-Fdp/dt + Bdq/dt - Ddr/dt + (A - C)pr+$$
$$+Fqr + E(p^2 - r^2) + Dpq = M_y, \qquad (12)$$
$$-Edp/dt - Ddq/dt + Cdr/dt + (B - A)qp-$$
$$-Dpr + F(q^2 - p^2) - Erq = M_z,$$

де p, q, r – проекції кутової швидкості тіла; M_x, M_y, M_z – проекції головного момента центральних гравітаційних сил, які обчисляються за формулами (11).

Система рівнянь (12) замикається кінематичним рівнянням Ейлера[1, 3]:

$$p = (d\psi/dt)\sin\theta\sin\varphi + (d\theta/dt)\cos\varphi+$$
$$+a_{21}(d\nu/dt),$$
$$q = (d\psi/dt)\sin\theta\cos\varphi - (d\theta/dt)\cos\varphi+$$
$$+a_{22}(d\nu/dt), \qquad (13)$$
$$r = (d\psi/dt)\cos\theta + (d\varphi/dt) + a_{23}(d\nu/dt),$$

де a_{ij} ($i = 2$, $j = 1, 2, 3$) – напрямні косинуси, які визначаються згідно з формулами [2]:

$$a_{21} = \cos\gamma\sin\psi, \quad a_{22} = \cos\gamma\cos\psi,$$

$$a_{23} = -\sin\gamma.$$

Використовуючи системи рівнянь (12) і (13) отримаємо диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла відносно неголовних осей інерції тіла. Враховуючи припущення перпендикулярності осі Oz до площини орбіти, матимемо, що $\theta = \pi/2$, $\psi = \pi$. У даному випадку рівняння (13) набудуть вигляду:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = (d\varphi/dt) + (d\nu/dt), \qquad (14)$$

де ν – кут істинної аномалії, причому [2, 3]

$$d\nu/dt = (n(1 + e\cos\nu)^2)/(1 - e^2)^{3/2},$$

$$n = (\gamma M)^{1/2}/a^{3/2}. \qquad (15)$$

Формули (5) при вищенаведених припущеннях набувають вигляду:

$$a_{11} = -\cos\varphi, \quad a_{12} = \sin\varphi, \quad a_{13} = 0,$$

$$a_{21} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} =, \qquad (16)$$

$$a_{31} = \sin\varphi, \quad a_{32} = \cos\varphi, \quad a_{33} = 0.$$

Для руху $\theta = \pi/2$, $\psi = \pi$ осі інерції тіла Ox і Oy розташовані у площині орбіти.

Проекції головного момента центральних гравітаційних сил в цьому випадку набувають вигляду [2, 3]:

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, M_z = \{(3n^2(1+e\cos\nu)^3)\times$$

$$\times[(B-A)\sin\varphi\cos\varphi - F\cos 2\varphi]\}/(1-e^2)^3. \qquad (17)$$

Підставляючи (14), (16) і (17) у систему рівнянь (12), враховуючи (11) і (15), а також те, що $E = D = 0$, отримаємо, що перших два рівняння системи (12) задовольняються тотожно, а третє рівняння запишеться у вигляді

$$C(d^2\varphi/dt^2 + d^2\nu/dt^2) = \{(3n^2(1+e\cos\nu)^3)\times$$

$$\times[(B-A)\sin\varphi\cos\varphi - F\cos 2\varphi]\}/(1-e^2)^3. \qquad (18)$$

Рівняння (18) сумісно з рівнянням (15) утворюють систему двох диференціальних рівнянь, що описують плоский рух твердого тіла по відношенню до неголовних осей інерції тіла. Зручно, однак, замість двох рівнянь (18), (19) розглядати одне диференціальне рівняння, яке отримується з рівняння (18), якщо замість t ввести нову незалежну змінну – істинну аномалію ν. Величини $d^2\varphi/dt^2$ і $d^2\nu/dt^2$ через змінну ν записуються наступним чином:

$$d^2\varphi/dt^2 = \{[n^2(1+e\cos\varphi)^3]/(1-e^2)^3\}\times$$

$$\times[(1+e\cos\nu)d^2\varphi/d\nu^2 - 2e\sin\nu d\varphi/d\nu], \quad (19)$$

$$d^2\nu/dt^2 = [-2n^2 e\sin\nu(1+e\cos\nu)^3]/(1-e^2)^3. \qquad (20)$$

Підставляючи (19), (20) у рівняння (18) і поділивши ліву та праву частини на вираз $C(1+e\cos\nu)$ отримаємо наступне диференціальне рівняння плоского руху твердого тіла в гравітаційному полі сил

$$d^2\varphi/d\nu^2 - [2e\sin\nu/(1+e\cos\nu)]d\varphi/d\nu +$$

$$+3[(A-B)\cos\varphi\sin\varphi - F\cos 2\varphi]/(C(1+$$

$$+e\cos\nu)) = 2e\sin\nu/(1+e\cos\nu). \qquad (21)$$

Рівняння (21) описує плоский рух твердого тіла на еліптичній орбіті у центральному ньютонівському полі сил. Якщо орбіта руху є коловою, тобто коли $e = 0$, то рівняння плоского руху запишеться так:

$$d^2\alpha/d\nu^2 + 3[(A-B)/(2C)]\sin\alpha -$$

$$-3(F/C)\cos\alpha = 0, \qquad (22)$$

де $\alpha = 2\varphi$.

Якщо у рівнянні (22) вважати $F = 0$, то отримаємо відомі результати інших авторів, які досліджували плоский рух твердого тіла по відношенню до головних осей інерції твердого тіла [1 – 3].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 364 с.

2. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. – М.: Наука, 1972. – 360 с.

3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416 с.

4. *Мігуца Д.О.* Дослідження рівнянь з однозначними інтегралами руху твердого тіла відносно неголовних осей інерції // Наук. вісник Черінвецького ун-ту: Збірник наук. праць. Вип. 485. Математика. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 62–70.