УДК 519.6

©2012 р. І.В. Малик

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НАПІВМАРКОВСЬКІ ВИПАДКОВІ ЕВОЛЮЦІЇ З МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕННЯМИ

Одержано достатні умови слабкої збіжності напівмарковських випадкових еволюцій у схемі усереднення з параметром $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$) до розв'язку диференціального рівняння при обмеженнях на локальні характеристики напівмарковського процесу $\eta(t;x), t \geq 0, x \in E$, неперервної складової $\gamma(t), t \geq 0$ та марковського процесу переключень $x(t), t \geq 0$. Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій реалізується із використанням проблеми сингулярного збурення для звідно-оборотних операторів.

The sufficient conditions of weak convergence of random semi-Markov evolutions in the averaging scheme with parameters $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$) to the solution of differential equation with conditions on the local characteristic of semi-Markov process $\eta(t;x), t \geq 0, x \in E$, continuous component $\gamma(t), t \geq 0$ and switching Markov process $x(t), t \geq 0$ were obtained. Asymptotic analysis of random evolutions are realized with using of singular perturbation problem for reducible-invertible operators.

Вступ.

Протягом минулого століття багато дослідників звернуло свою увагу на неможливість нехтуванням випадковими збуреннями реальних систем, що зумовило розвиток теорії випадкових процесів [3, 8, 10, 11]. Особливе значення для дослідження властивостей реальних об'єктів мають такі класи випадкових процесів, як напівмарковські процеси [1, 2, 3] та напівмартингали [8, 9, 10, 11]. Реальні процеси з дискретним числом станів, розподіл часу перебування в стані θ_n яких не є показниковим, описуються напівмарковськими процесами [3]. Випадкові еволюції з напівмарковськими переключеннями у схемі усереднення досліджено в монографії [3] з використанням компенсуючого оператора(КО), введеного у роботах [3, 12]. Загальна схема збіжності випадкових еволюцій базується на вивченні збіжності КО з використанням розв'язків проблеми сингулярного збурення та мартингальної характеризації марковських процесів [2, 3].

У даній роботі розглядаються напівмарковські випадкові еволюції (НМВЕ), що задаються напівмарковськими випадковими процесами в евклідовому просторі [3, 13] з марковськими переключеннями [3, 11, 13]. З'ясовано, що загальна схема збіжності випадкових еволюцій, розвинута в монографії [3], забезпечує асимптотичний аналіз НМВЕ у схемі усереднення.

Основна частина.

Розглянемо НМВЕ у R^d, що задається стохастичним адитивним функціоналом

$$\xi(t) = \xi(0) + \sum_{n=1}^{\nu(t)} \eta(\theta_n, x(\tau_{n-1})) +$$

$$+\eta(t-\tau(t), x(\nu(t))) + \sum_{n=1}^{\nu(t)} \gamma(\theta_n, x(\tau_{n-1})) +$$

$$+\gamma(t-\tau(t), x(\nu(t))). \qquad (1)$$

Однорідний ергодичний марковський стрибковий процес перемикань $x(t), t \geq 0$ розглядається у стандартному просторі $(E, \mathcal{E})$ зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \mathcal{E}$ та визначений напівгрупою $Q_t\varphi(x) := \int_E \varphi(y) P_t(x, dy), t \geq 0$ [3, 11], де $P_t(x, A) := \mathbb{P}\{x(t) \in A | x(0) = x\}$. Напівгрупа $Q_t, t \geq 0$ породжується генератором $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}\varphi(x) := q(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

де $P(x, A) := \mathbb{P}\{x_{k+1} \in A | x_k = x\}$ – ймовірність переходу для вкладеного ланцюга Маркова $x_k, k \geq 0$; $q(x)$ – інтенсивність стрибків. Позначимо через Π – проектор марковського процесу $x(t), t \geq 0$, R_0 – його потенціал(див. [3, 11]):

$$\Pi\varphi(x) = \int_E \pi(dx)\varphi(x),$$

$$R_0\varphi(x) := \int_0^\infty (Q_t - \Pi)\varphi(x)dt.$$

Напівмарковські процеси $\eta(t;x), t \geq 0, x \in E$ в евклідовому просторі $R^d, d \geq 1$ породжуються процесами марковського відновлення(ПМВ) $(\eta_n, \tau_n), n \geq 0$, де $\eta_n := \eta(\tau_n; x_n)$, $x_n := x(\tau_n)$. ПМВ задаються напівмарковськими ядрами [3, 13] для $u \in R_d, dv \in \mathcal{R}^d, t \geq 0, x \in E$:

$$G(u, dv, t; x) := G(u, dv; x)F_u(t), \qquad (2)$$

де умовні розподіли приростів вкладеного ланцюга Маркова $\eta_n, n \geq 0$ визначаються співвідношенням:

$$G(u, dv; x) := \mathbb{P}\{\Delta\eta_{n+1} \in dv | \eta_n = u, x_n = x\},$$

$\Delta\eta_{n+1} := \eta_{n+1} - \eta_n$; умовна функція розподілу часу перебування в станах $\theta_{n+1} := \tau_{n+1} - \tau_n$:

$$F_u(t) := \mathbb{P}\{\theta_{n+1} \leq t | \eta_n = u\} = P(\theta_u \leq t),$$

$\tau_n, n \geq 0$ – моменти відновлення напівмарковського процесу. Позначимо через $\nu(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}$ – рахуючий процес.

Введемо позначення

$$m_k(u) := \int_0^\infty t^k dF_u(t), k = 1, 2;$$

$$\lambda(u) := 1/m_1(u);$$

$$\eta(t) := \int_0^t \eta(ds; x(s)),$$

$$\gamma(t) := \int_0^t \gamma(ds; x(s))ds;$$

$$G(x)\varphi(u) := \int_{R^d} G(u, dv; x)\varphi(u + v), u \in R^d.$$

Неперервна складова еволюції $\gamma(t), t \geq 0$ між моментами відновлення τ_n та τ_{n+1}, за умови $x(\tau_n) = x, x \in E$, задається напівгрупами $\Gamma_t(x), t \geq 0$ з генераторами

$$\Gamma(x)\varphi(u) := a(u; x)\varphi'(u) +$$

$$+ \int_{R^d} (\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u))\Gamma(u, dv; x). \quad (3)$$

Згідно введених вище позначень

$$\xi(t) = \xi(0) + \eta(t) + \gamma(t). \qquad (4)$$

Надалі буде важливий той факт, що випадкові процеси $\eta(t)$ та $\gamma(t)$ є однорідними.

Обчислимо КО [3, 6] розширеного процесу марковського відновлення (ПМВ)

$$\zeta_n := (\xi_n, x_n, \tau_n),$$

де $\xi_n := \xi(\tau_n)$, $x_n := x(\tau_n)$:

Лема 1. КО $\zeta_n, n \geq 0$ задається формулою

$$L\varphi(u, x, t) = \lambda(u) \times$$

$$\times \left[\int_0^\infty F_u(ds)Q_s\Gamma_s(x)G(x)\varphi(u, y, t + s) - \right.$$

$$\left. \varphi(u, x, t)\right] \qquad (5)$$

для $u \in R^d, x \in E, t \geq 0$.

Доведення. Згідно означення КО:

$$L\varphi(u, x, t) := \lambda(u)\mathbb{E}[\varphi(\xi_{n+1}, x_{n+1}, \tau_{n+1}) -$$

$$-\varphi(\xi_n, x_n, \tau_n) \,|\, (\xi_n, x_n, \tau_n) = (u, x, t)] =$$

$$\lambda(u)\mathbb{E}[\varphi(u + \Delta\xi_{n+1}, x + \Delta x_{n+1}, t + \Delta\tau_{n+1}) -$$

$$-\varphi(u, x, t) \,|\, (\xi_n, x_n, \tau_n) = (u, x, t)],$$

де $\Delta\xi_{n+1} := \xi_{n+1} - \xi_n$, $\Delta x_{n+1} := x_{n+1} - x_n = x(\theta_{n+1})$, $\Delta\tau_{n+1} := \tau_{n+1} - \tau_n = \theta_{n+1}$. Згідно (4) приріст $\Delta\xi_{n+1}$ рівний

$$\Delta\xi_{n+1} = \Delta\eta_{n+1} + \Delta\gamma_{n+1},$$

де $\Delta\eta_{n+1} := \eta(\tau_{n+1}) - \eta(\tau_n) = \eta(\theta_{n+1})$, $\Delta\gamma_{n+1} := \gamma(\tau_{n+1}) - \gamma(\tau_n) = \gamma(\theta_{n+1})$.

Найперше потрібно вказати, що напівгрупа Q_s діє по $x \in E$, напівгрупи $\Gamma_s(x)$ та оператори $G(x)$ – по $u \in R^d$. При фіксованих $\tau_n = t, \tau_{n+1} = t + s$, одержимо фіксований час перебування у стані $\theta_{n+1} = s$. Обчислимо умовне математичне сподівання для приростів $\Delta\xi(s)$ та $\Delta x(s)$:

$$\mathbb{E}[\varphi(u + \xi(s), x + x(s), t + s) - \varphi(u, x, t) \,|$$

$$(\xi_n, x_n, \tau_n) = (u, x, t)] =$$
$$\mathbb{E}[\varphi\left(u + \eta(s) + \gamma(s), x + x(s)\right) - \varphi\left(u, x, t\right) \mid$$
$$(\xi_n, x_n, \tau_n) = (u, x, t)] =$$
$$Q_s\Gamma_s(x)G(x)\varphi(u, x, t + s) - \varphi(u, x, t).$$

Усереднюючи останню формулу за розподілом θ_{n+1}, отримаємо твердження леми. Лема 1 доведена.

Специфіка задачі усереднення полягає в тому, щоб забезпечити усереднення НМВЕ на зростаючих інтервалах часу нормуванням моментів стрибків напівмарковського процесу та величини стрибків малим параметром серії $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$). При цьому необхідно нормувати марковський процес переключень так, щоб кількість переключень зростала при $\varepsilon \to 0$, а також так, щоб кількість стрибків марковського процесу між двома сусідніми моментами переключень напівмарковського процесу також зростала при $\varepsilon \to 0$. До того ж, проблему сингулярного збурення для компенсуючого оператора легко розв'язувати, коли нормування здійснюється малим параметром у цілих степенях $\varepsilon^k, k \in \mathbb{Z}$. Так виникає нормування часу: t/ε^3, а разом з тим і величини стрибків у схемі усереднення: ε^3.

Отже, НМВЕ розглядається у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$) у такому нормуванні:

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi(0) + \varepsilon^3[\eta^\varepsilon(t) + \gamma^\varepsilon(t)], \qquad (6)$$

$$\eta^\varepsilon(t) := \int_0^{t/\varepsilon^3} \eta(ds; x(\varepsilon s)),$$

$$\gamma^\varepsilon(t) = \int_0^{t/\varepsilon^3} \gamma(ds; x(\varepsilon s)).$$

Зауваження 1. При такому нормуванні має місце співвідношення

$$\nu^\varepsilon(t) = \nu\left(\frac{t}{\varepsilon^3}\right).$$

Зауваження 2. Нормування стрибків напівмарковського процесу ε^3 та нормування кількості величини стрибків ε^{-3} співпадає при $n = [\varepsilon^{-3}]$ з нормуванням в законі великих чисел, якщо покласти $\Delta\xi_n = u_n$, де $[\bullet]$ – ціла частина числа, $u_n, n \geq 0$ – незалежні ВВ, для яких $D\xi_n < c$.

Згідно побудови

$$\Delta\xi_n^\varepsilon := \xi_{n+1}^\varepsilon - \xi_n^\varepsilon = \varepsilon^3[\Delta\eta_n^\varepsilon + \Delta\gamma_n^\varepsilon].$$

Тут, за означенням,

$$\xi_n^\varepsilon := \xi^\varepsilon(\varepsilon^3\tau_n), \ \eta_n^\varepsilon := \eta^\varepsilon(\varepsilon^3\tau_n), \ \gamma_n^\varepsilon := \gamma^\varepsilon(\varepsilon^3\tau_n).$$

Ведемо позначення

$$g(u; x) := \int_{R^d} vG(u, dv; x),$$
$$c(u; x) := a(u; x) + \lambda(u)g(u; x).$$

Розглянемо умови слабкої збіжності для НМВЕ у схемі усереднення на $[0, T]$, що задається стохастичним адитивним функціоналом (6):

Теорема 1. Нехай:

1) марковський процес переключень є рівномірно ергодичний зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \mathcal{E}$;
2) функція $c(u; x)$ задовольняє глобальну умову Ліпшиця з константою L, що не залежить від x;
3) справедлива оцінка
$$\sup_{x \in E, u \in R^d} \left(\left| \int_{R^d} v^2 G(u, dv; x) \right| + \right.$$
$$+ \left| \int_{R^d} v^2 \Gamma(u, dv; x) \right| +$$
$$\left. + \int_0^\infty s^2 F_u(ds) \right) < \infty;$$
4) має місце збіжність початкових умов та їх обмеженість:
$$\xi^\varepsilon(0) \to \xi^0(0) \equiv \xi_0,$$
$$\sup_{\varepsilon > 0} \mathbb{E}|\xi^\varepsilon(0)| \leq K < \infty.$$

Тоді стохастичний адитивний функціонал $\xi^\varepsilon(t), t \geq 0$ (6) слабко збігається при $\varepsilon \to 0$ на $[0, T], T > 0$ до розв'язку диференціального рівняння

$$d\xi^0(t) = \widehat{c}(\xi^0(t))dt, \qquad (7)$$

що задовольняє початкову умову

$$\xi^0(0) = \xi_0, \tag{8}$$

де

$$\widehat{c}(u) := \int_E \pi(dx)(a(u;x) + \lambda(u)g(u;x)).$$

Доведення теореми 1 буде ґрунтуватися на теоремі 6.6 з [3]. Розіб'ємо доведення на два етапи:

I) знаходження компенсуючого оператора;

II) доведення відносної компактності сім'ї випадкових НМВЕ $\xi^\varepsilon(t), t \geq 0$, що задані (6).

Етап I. Визначимо випадковий процес $\zeta^\varepsilon(t) = (\xi^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t))$, породжений сім'єю розширеного ПМВ

$$\zeta_n^\varepsilon := (\xi_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon). \tag{9}$$

де $\xi_n^\varepsilon := \varepsilon^3\xi(\tau_n), x_n^\varepsilon := x(\varepsilon^2\tau_n), \tau_n^\varepsilon := \varepsilon^3\tau_n$.

Доведемо, що КО (9) задається формулою

$$L^\varepsilon\varphi(u,x,t) = \varepsilon^{-3}\lambda(u)\times$$

$$\times\left[\int_0^\infty F_u(ds)Q_{\varepsilon^2 s}G^\varepsilon(x)\Gamma_s^\varepsilon(x)\varphi(u,x,t+\varepsilon^3 s)\right.$$

$$\left.-\varphi(u,x,t)\right],$$

де I – одиничний оператор, оператори $G^\varepsilon(x), x \in E$ визначені наступним чином:

$$G^\varepsilon(x)\varphi(u) := \int_{R^d} G(u,dv;x)\varphi(u+\varepsilon^3 v),$$

напівгрупи $\Gamma_s^\varepsilon(x), x \in E$ породжуються генераторами

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u) := \varepsilon^3 a(u;x)\varphi'(u)+$$

$$+\int_{R^d}(\varphi(u+\varepsilon^3 v)-\varphi(u)-\varepsilon^3 v\varphi'(u))\Gamma(u,dv;x). \tag{10}$$

Справді, згідно означення, КО для (9) рівний

$$L^\varepsilon\varphi(u,x,t) =$$

$$= \mathbb{E}\{\varphi(\zeta_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(\zeta_n^\varepsilon)|\zeta_n^\varepsilon = (u,x,t)\}/E\theta_u^\varepsilon =$$

$$\mathbb{E}\{\varphi(\xi_n^\varepsilon + \Delta\xi_{n+1}^\varepsilon, x_n^\varepsilon + \Delta x_{n+1}^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon + \Delta\tau_{n+1}^\varepsilon)-$$

$$\varphi(\xi_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon, \tau_n^\varepsilon)|\zeta_n^\varepsilon = (u,x,t)\}/E\theta_u^\varepsilon.$$

Оскільки $\tau_n^\varepsilon = \varepsilon^3\tau_n$, то час перебування у станах рівний $\theta_n^\varepsilon = \varepsilon^3\theta_n$, тобто

$$E\theta_u^\varepsilon = \varepsilon^3 m_1(u).$$

Зауважимо, що справедливі рівності

$$\Delta\xi_{n+1}^\varepsilon = \varepsilon^3\Delta\xi_{n+1} = \varepsilon^3(\eta(\theta_{n+1}) + \gamma(\theta_{n+1})),$$

$$\Delta x_{n+1}^\varepsilon = x_{n+1}^\varepsilon - x_n^\varepsilon =$$

$$= x(\varepsilon^2\tau_{n+1}) - x(\varepsilon^2\tau_n) = x(\varepsilon^2\theta_{n+1}).$$

Тоді

$$L^\varepsilon\varphi(u,x,t) =$$

$$\mathbb{E}\{\varphi(u+\varepsilon^3(\eta(\theta_{n+1})+\gamma(\theta_{n+1})), x + x(\varepsilon^2\theta_{n+1}),$$

$$t+\varepsilon^3\theta_{n+1}) - \varphi(u,x,t)|\zeta_n^\varepsilon = (u,x,t)\}/E\theta_u^\varepsilon =$$

$$= \varepsilon^{-3}\lambda(u)\left[\int_0^\infty F_u(ds)Q_{\varepsilon^2 s}\right.$$

$$\left.G^\varepsilon(x)\Gamma_s^\varepsilon(x)\varphi(u,x,t+\varepsilon^3 s) - \varphi(u,x,t)\right],$$

що і потрібно було довести.

Розглянемо асимптотичне представлення КО L^ε: компенсуючий оператор L^ε на тест-функціях $\varphi \in C^2(R^d \times E)$ має асимптотичне представлення

$$L^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}\mathbb{Q}\varphi(\cdot,x)+$$

$$+C(x)\varphi(u,\cdot) + l^\varepsilon\varphi(u,x), \tag{11}$$

де

$$C(x)\varphi(u) := c(u;x)\varphi'(u),$$

$$\sup_{u\in R^d, x\in E}|l^\varepsilon\varphi(u,x)| \to 0 \text{ при}$$

$$\varepsilon \to 0.$$

Для доведення користаємося виглядом оператора L^ε та алгебраїчною тотожністю

$$abc - 1 = (a-1) + (b-1) + (c-1)+$$

$$+(a-1)(b-1)+(a-1)(c-1)+(b-1)(c-1)+$$

$$+(a-1)(b-1)(c-1). \tag{12}$$

Тоді

$$L^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-3}\lambda(u)\times$$

$$\times\int_0^\infty F_u(ds)[Q_{\varepsilon^2 s} - I]\varphi(u,x)+$$

$$+\varepsilon^{-3}\lambda(u)\int_0^\infty F_u(ds)\left[\Gamma_s^\varepsilon(x) - I\right]\varphi(u,x)+$$

$$+\varepsilon^{-3}\lambda(u)\left[G^\varepsilon(x)-I\right]\varphi(u,x)+l_1^\varepsilon\varphi(u,x), \quad (13)$$

де l_1^ε – оператор, що відповідає доданкам 4-7 з правої частини розкладу (12).

Розглянемо перший доданок з (13):

$$\varepsilon^{-1}\lambda(u)\int_0^\infty F_u(ds)\mathbb{Q}\int_0^s Q_{\varepsilon^2 s_1}ds_1\varphi(x)=$$

$$=\varepsilon^{-1}\lambda(u)\mathbb{Q}\int_0^\infty \overline{F}_u(s)Q_{\varepsilon^2 s}ds\varphi(x)=$$

$$\varepsilon^{-1}\mathbb{Q}\varphi(x)+l_2^\varepsilon(u)\varphi(x),$$

де

$$l_2^\varepsilon(u)\varphi(x):=$$

$$=\varepsilon^{-1}\lambda(u)\mathbb{Q}\int_0^\infty \overline{F}_u(s)\left(Q_{\varepsilon^2 s}-I\right)ds\varphi(x)$$

$$=\varepsilon\lambda(u)\mathbb{Q}^2\int_0^\infty F_u^{(2)}(s)Q_{\varepsilon^2 s}ds\varphi(x).$$

За умов 1 та 3 теореми для функції $\varphi\in C(E)$ справедливе співвідношення:

$$\sup_{u\in R^d,x\in E}|l_2^\varepsilon(u)\varphi(x)|\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Згідно означення напівгрупи $\Gamma_s^\varepsilon(x)$ та генератора $\Gamma^\varepsilon(x)$ другий доданок з (13) рівний:

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\int_0^\infty F_u(ds)\Gamma^\varepsilon(x)\int_0^s \Gamma_{s_1}^\varepsilon(x)ds_1\varphi(u)=$$

$$=\varepsilon^{-3}\lambda(u)\Gamma^\varepsilon(x)\int_0^\infty \overline{F}_u(s)\Gamma_s^\varepsilon(x)ds\varphi(u)=$$

$$=a(u;x)\varphi'(u)+l_3^\varepsilon(x)\varphi(u),$$

де $\overline{F}_u(s):=1-F_u(s)$ та

$$l_3^\varepsilon(x)\varphi(u):=\varepsilon^{-3}\lambda(u)\times$$

$$\left(\int_{R^d}\left(\varphi(u+\varepsilon^3 v)-\varphi(u)-\varepsilon^3 v\varphi'(u)\right)\times\right.$$

$$\times\Gamma(u,dv;x)+$$

$$\left.+\Gamma^\varepsilon(x)\int_0^\infty \overline{F}_u(s)(\Gamma_s^\varepsilon(x)-I)ds\varphi(u)\right)=$$

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\left(\frac{1}{2}\int_{R^d}\varepsilon^6 v^2\varphi''(u+k(v)\varepsilon v)\Gamma(u,dv;x)+\right.$$

$$\left.+(\Gamma^\varepsilon(x))^2\int_0^\infty \overline{F}_u(s)\int_0^s \Gamma_{s_1}^\varepsilon(x)\varphi(u)ds_1ds\right)=$$

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\left(\frac{1}{2}\int_{R^d}\varepsilon^6 v^2\varphi''(u+k(v)\varepsilon v)\Gamma(u,dv;x)+\right.$$

$$\left.+(\Gamma^\varepsilon(x))^2\int_0^\infty \overline{F}_u^{(2)}(s)\Gamma_s^\varepsilon(x)\varphi(u)ds\right),$$

де $|k(v)|\leq 1$, $\overline{F}_u^{(2)}(s):=\int_s^\infty \overline{F}_u(s_1)ds_1$. При виконанні умови 3 теореми для функції $\varphi\in C^2(R^d)$

$$\sup_{u\in R^d,x\in E}|l_3^\varepsilon(x)\varphi(u)|\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Скориставшись формулою Тейлора для третього доданка з (13), отримаємо:

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\left[G^\varepsilon(x)-I\right]\varphi(u,x)=$$

$$=\varepsilon^{-3}\lambda(u)\int_{R^d}G(u,dv;x)\times$$

$$\times(\varphi(u+\varepsilon^3 v,x)-\varphi(u,x))=$$

$$\lambda(u)g(u;x)\varphi'(u,x)+l_4^\varepsilon(x)\varphi(u,x),$$

де

$$l_4^\varepsilon(x)\varphi(u,x):=$$

$$\varepsilon^{-3}\lambda(u)\int_{R^d}G(u,dv;x)\times$$

$$\times(\varphi(u+\varepsilon^3 v,x)-\varphi(u,x)-\varepsilon^3 v\varphi'(u,x)).$$

Для тест функцій $\varphi\in C^2(R^d\times E)$ вірна оцінка:

$$|l_4^\varepsilon(x)\varphi(u,x)|\leq\varepsilon^{-3}\lambda(u)\times$$

$$\times\left|\int_{R^d}G(u,dv;x)\varepsilon^6 v^2\varphi''(u+k_v\varepsilon^3 v,x)\right|\leq$$

$$\leq\varepsilon^3 K\lambda(u)\int_{R^d}v^2 G(u,dv;x),$$

де $|k_v|\leq 1, K:=\sup_{u\in R^d,x\in E}|\varphi''(u,x)|$

Згідно побудови напівгруп $\Gamma_t^\varepsilon(x), Q_{\varepsilon^2 t}, t\geq 0, x\in E$ та операторів $G^\varepsilon(x), x\in E$ зрозуміла оцінка

$$\sup_{u\in R^d,x\in E}|l_1^\varepsilon\varphi(u,x)|\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0$$

для тест функцій $\varphi\in C^2(R^d\times E)$.

Розглянемо оператор

$$L_0^\varepsilon\varphi(u,x)=\varepsilon^{-1}\mathbb{Q}\varphi(u,x)+C(x)\varphi(u,x).$$

Для даного оператора розглянемо проблему сингулярного збурення: для заданої функції $\psi \in C(R^d)$ знайти $\varphi^\varepsilon \in C^2(R^d \times E)$, щоб

$$L_0^\varepsilon \varphi^\varepsilon = \psi + \varepsilon l^\varepsilon \varphi^\varepsilon,$$

де l^ε – обмежений оператор.

Для $\varphi \in C(E)$ зрозуміле співвідношення

$$\Pi\varphi(x) = \int_E \varphi(x)\pi(dx) =: \widehat{\varphi}.$$

Позначимо для $\varphi \in C^1(R^d)$ усереднений оператор

$$\widehat{C}\varphi(u) := \widehat{c}(u)\varphi'(u), \qquad (14)$$

що породжує усереднене диференціальне рівняння (7).

Проблема сингулярного збурення (див. [3], Розділ 5) для оператора L_0^ε розв'язується на збурених тест функціях $\varphi^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\varphi_1$:

$$L_0^\varepsilon \varphi^\varepsilon = \varepsilon^{-1}Q\varphi + [C(x)\varphi + Q\varphi_1] + \varepsilon C(x)\varphi_1.$$

Згідно твердження 5.6. [3] розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора L_0^ε має вигляд

$$L_0^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u,x) = \widehat{C}\varphi(u) + \varepsilon l^\varepsilon(x)\varphi(u) \qquad (15)$$

на збурених функціях $\varphi^\varepsilon(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon\varphi_1(u,x)$, $\varphi \in C^2(R^d)$, де усереднений оператор $\widehat{C}$ визначений (14),

$$l^\varepsilon(x) = C(x)R_0(C(x) - \widehat{C}).$$

Зауважимо, що згідно умов теореми оператор $l^\varepsilon(x)$ є обмеженим.

Етап II. Для доведення відносної компактності [2, 3, 7, 10] сім'ї випадкових НМВЕ $\xi^\varepsilon(t), t \geq 0$, що задані (6) використаємо теорему 1.4.6. з [5]. Згідно цієї теореми для відносної компактності достатньо показати:

1) для $\forall\varphi \in C_{0,+}^\infty(R^d)$ випадковий процес

$$m^\varepsilon(t) := \varphi(\xi^\varepsilon(t)) + A_\varphi t$$

є субмартингалом відносно фільтрації $F_t^\varepsilon := \sigma(\xi^\varepsilon(s), x^\varepsilon(s), \tau^\varepsilon(s), 0 \leq s \leq t)$, де A_φ – константа залежна лише від φ, $C_{0,+}^\infty(R^d)$ – простір невід'ємних нескінченно-диференційовних функцій, що $\lim\limits_{|u|\to\infty} \varphi(u) = 0$;

2) існує функція $\varphi_0(u), u \in R^d$, що константа A_{φ_0} не залежить від зсувів аргумента функції φ_0.

Справді

$$m^\varepsilon(t) := \varphi(\xi^\varepsilon(t)) + A_\varphi t \pm \varphi^\varepsilon(\xi^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t)) \pm$$

$$\pm \int_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} L^\varepsilon \varphi^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s), x^\varepsilon(s))ds \pm$$

$$\pm \int_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} L\varphi(\xi^\varepsilon(s))ds,$$

де $\tau_+^\varepsilon := \tau_{\nu^\varepsilon(t)+1}^\varepsilon$. Тоді

$$m^\varepsilon(t) := (\varphi(\xi^\varepsilon(t)) - \varphi^\varepsilon(\xi^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t))) +$$

$$+ \left(\varphi^\varepsilon(\xi^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t)) - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} \text{Ł}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s), x^\varepsilon(s))ds \right) +$$

$$+ \left(\int_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} (L^\varepsilon \varphi^\varepsilon(\xi^\varepsilon(s), x^\varepsilon(s)) - L\varphi(\xi^\varepsilon(s)))ds \right)$$

$$+ \left(\int_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} (A_\varphi - L\varphi(\xi^\varepsilon(s)))ds \right). \qquad (16)$$

Зауважимо, що $\tau_+^\varepsilon(t) \to t$ при $\varepsilon \to 0$ з ймовірністю 1. Перший доданок (16) прямує до 0 при $\varepsilon \to 0$ згідно побудови φ^ε. Третій доданок (16) прямує до 0 при $\varepsilon \to 0$ згідно побудови асимптотичного представлення L^ε, представлення (15) та вигляду оператора $L\varphi(u) = \widehat{C}\varphi(u)$. Другий доданок згідно [3] – мартингал. Покладемо

$$A_\varphi := 1 + \sup_{u \in R^d} \{|\varphi(u)|, |\varphi'(u)|\}.$$

Тоді для $0 \leq s \leq t$:

$$\mathbb{E}\{m^\varepsilon(t) - m^\varepsilon(s)|F_s^\varepsilon\} \geq l^\varepsilon(s,t) + (t-s),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} l^\varepsilon(s,t) = 0,$$

тобто $m^\varepsilon(t)$ – субмартингал. Розглянемо функцію $\varphi_0(u) = \frac{1}{\sqrt{1+|u|^2}}$. Тоді $A_{\varphi_0} = 1$, тобто константа A_{φ_0} не залежить від зсувів функції φ_0.

Отже, сім'я випадкових процесів згідно теореми 1.4.6.[5] є відносно компактною.

Таким чином, всі умови теореми 6.6[3] виконані, тобто НМВЕ $\xi^\varepsilon(t), t \geq 0$ (6) у схемі усереднення слабко збігається до розв'язку диференціального рівняння (7), що задається генератором $\widehat{C}$ (14) та початковою умовою (8).

Теорема 1 доведена.

Автор висловлює щиру подяку академіку НАН України Королюку В.С. за постановку задачі та цінні зауваження щодо методів її розв'язання.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Blumenthal R.M., Getoor R.K. Markov processes and potential theory. – New York: Academic Press, – 313 p.
2. Ethier S.N. Kurtz T.G. Markov processes: Characterization and convergence. – New York: Wiley-Interscience, 1986. – 534 p.
3. Koroliuk V.S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. – Singapore: World Scientific Publishers, 2005. – 331 p.
4. Pinsky M.A. Lectures on Random Evolutions. – Singapore: World Scientific Publishers, 1991. – 135 p.
5. Stroock D.W. and Varadhan S.R.S. Multidimensional diffusion processes. – Berlin: Springer-Verlag, 1979. – 338 p.
6. Sviridenko M.N. Martingale characterization of limit distributions in the space of functions without discontinuities of second kind // Math. Notes. – 1998. – 43, No 5. – P. 398-402.
7. Биллинсгли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
8. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наукова думка, 1968. – 354 с.
9. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. – К.: Наукова думка, 1982. – 612 с.
10. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов: В 3-х т. – М.: Наука, 1975. – Т.3. – 496 с.
11. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. – М. Физматгиз, 1967. – 860 с.
12. Королюк В.С. Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии, Укр. матем. журн., 2010, т.57, №6, С. 22-26.
13. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. – К.: Наукова думка, 1976. – 184 с.