УДК 517.9

©2012 р. І.І. Король, Г.Я. Семчишин

Ужгородський національний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНИХ НЕЛІИІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ

Обгрунтовується чисельно-аналітичний метод дослідження періодичних розв'язків вироджених нелінійних систем диференціальних рівнянь у критичному випадку. Вивчається питання існування і наближеної побудови розв'язків. Знаходяться оцінки збіжності послідовних періодичних наближень.

The numerical-analytic method for the investigation of periodic solutions of degenerative nonlinear systems of differential equations in a critical case is substantiated. The problems of the existence and approximate construction of the solutions are studied. The estimations of convergence of the successive periodic approximations are obtained.

Останнім часом бурхливо розвивається теорія вироджених систем диференціальних рівнянь. Передусім, це зумовлено її широким застосуванням при моделюванні прикладних процесів, зокрема в задачах оптимального керування, економіки, теорії електричних кіл тощо. Незважаючи на те, що за останні роки опубліковано велику кількість робіт присвячених якісній теорії вироджених нелінійних систем і чисельним методам їх розв'язання [1 – 4], проблема розв'язності вироджених нелінійних систем і досі залишається актуальною.

При дослідженні вироджених періодичних нелінійних систем диференціальних рівнянь великої популярності набув чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень А.М. Самойленка [5]. З часом, самим автором та його послідовниками, цей метод був розвинений для дослідження періодичних розв'язків більш широких класів задач [6].

1. Постановка задачі. Розглянемо T-періодичну вироджену нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$J\frac{dy}{dt} = A(t)y(t) + f(t,y), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

де $A(t) = (a_{i,j}(t))_{i,j=1}^{n}$, $a_{i,j}(t) \in C_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f(t,y) \in C_T(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$; $C_T\left(\mathbb{R},\mathbb{R}^k\right)$ – простір неперервних T-періодичних функцій $x\in\mathbb{R}^k$; J– $(n\times n)$-вимірна стала матриця вигляду

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Представимо матрицю $A(t)$ наступним чином

$$A(t) = \begin{bmatrix} D_1(t) & D_2(t) \\ a_{n,1}(t) & D_3(t) \end{bmatrix},$$

де $D_1(t)$ – $((n–1)\times 1)$-вимірна, $D_2(t)$ – $((n–1)\times(n–1))$-вимірна, $D_3(t)$ – $(1\times(n-1))$-вимірна матриці.

Нехай

$$y(t) = col[y_1(t), v(t)],$$

$$f(t,y) = col[p(t,y), f_n(t,y)],$$

де $v(t)$, $p(t,y)$ – $(n-1)$-вимірні вектор-функції вигляду

$$v(t) = col(y_2(t), \dots, y_n(t)),$$

$$p(t,y) = col(f_1(t,y), \dots, f_{n-1}(t,y)).$$

Тоді вироджену систему рівнянь (1) можемо записати наступним чином

$$v' = D_1(t)y_1 + D_2(t)v + p(t,y), \qquad (2)$$

$$0 = a_{n,1}(t)y_1 + D_3(t)v + f_n(t, y_1, \ldots, y_n). \quad (3)$$

Припустимо, що

$$f_n(t, y) = f_n(t, y_2, \ldots, y_n) = f_n(t, v). \quad (4)$$

Будемо вважати, що $a_{n,1}(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$. Тоді з (3) можемо виразити y_1:

$$y_1 = -\frac{1}{a_{n,1}(t)} \left(D_3(t)v + f_n(t, v) \right).$$

Підставляючи його в систему (2) одержимо нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dv}{dt} = A_1(t)v(t) + \bar{f}(t, v), \quad (5)$$

де $A_1(t)$ – $((n-1) \times (n-1))$-вимірна матриця, $\bar{f}(t, v)$ – $(n-1)$-вимірна вектор-функція вигляду

$$A_1(t) = D_2(t) - \frac{1}{a_{n,1}(t)} D_1(t) D_3(t),$$

$$\bar{f}(t, v) = \left(J_1 - \frac{1}{a_{n,1}(t)} D_1(t) J_2 \right) f(t, y),$$

J_1 – $((n-1) \times n)$-вимірна матриця, J_2 – n-вимірний вектор-рядок вигляду

$$J_1 = [E_{n-1}, 0_{n-1,1}], \quad J_2 = [0_{1,n-1}, 1],$$

E_k – $(k \times k)$-вимірна одинична матриця, $0_{k,l}$ – $(k \times l)$-вимірна нульова матриця.

2. Періодичні розв'язки вироджених лінійних систем. Поряд із нелінійною системо (5) розглянемо T-періодичну лінійну систему вигляду

$$\frac{dv}{dt} = A_1(t)v(t) + h(t), \quad (6)$$

де $h(t) \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n-1})$.

Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи (6) має вигляд

$$v(t) = \Omega(t, 0)c + \int_0^t \Omega(t, s)h(s)ds,$$

де $\Omega(t, s)$ – матрицант, $\Omega(t, s) = V(t)V^{-1}(s)$, $V(t)$ – деяка фундаментальна матриця відповідної (6) однорідної системи.

Якщо неоднорідна система (6) має T-періодичні розв'язки, то вони визначаються з умови $v(0) = v(T)$, або

$$(E_{n-1} - \Omega(T, 0))\, c = \int_0^T \Omega(T, s)h(s)ds.$$

Розглянемо критичний випадок, тобто коли одиниця є власним значенням матриці $\Omega(T, 0)$.

Нехай відповідна (6) лінійна однорідна система має k, $1 < k < n-1$ лінійно незалежних T-періодичних розв'язків. Тоді, як відомо, відповідна (6) спряжена система рівнянь

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -A_1^\top(t)\bar{v}(t), \quad (7)$$

також має k лінійно незалежних T-періодичних розв'язків $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$, а лінійна неоднорідна система (6) матиме k-параметричну сім'ю T-періодичних розв'язків тоді і тільки тоді, коли для функції $h(t)$ виконується умова ортогональності

$$\int_0^T \langle \psi_i(s), h(s) \rangle ds = 0, (i = \overline{1, k}).$$

Справедливою є наступна лема [6].

Лема 1. *Нехай відповідна (6) лінійна однорідна T-періодична система має k лінійно незалежних T-періодичних розв'язків. Тоді для будь-якої функції $h(t)$ завжди можна вказати функцію $H(t)$ таку, що лінійна неоднорідна система*

$$\frac{dv}{dt} = A_1(t)v + h(t) - H(t), \quad (8)$$

матиме k-параметричну сім'ю T-періодичних розв'язків.

Безпосередня перевірка показує, що за $H(t)$ можемо прийняти функцію

$$H(t) = \Psi(t) P_1^{-1} \int_0^T \Psi^\top(s)h(s)ds,$$

де $\Psi(t)$ – $((n-1) \times k)$-вимірна матриця, стовпцями якої є k лінійно незалежних T-

періодичних розв'язків $\psi_1(t),\ldots,\psi_k(t)$ спряженої системи (7), $P_1=\int\limits_0^T\Psi^\top(s)\Psi(s)ds$.

При цьому лінійна неоднорідна система (8) матиме T-періодичні розв'язки вигляду

$$v(t)=\Omega(t,0)c+ \tag{9}$$

$$+\int\limits_0^t\Omega(t,s)\left\{h(s)-\Psi(s)P_1^{-1}\int\limits_0^T\Psi^\top(\tau)h(\tau)d\tau\right\}ds,$$

де c – розв'язок лінійної неоднорідної алгебраїчної системи

$$\left(E_{m-1}-\Omega(T,0)\right)c= \tag{10}$$

$$=\int\limits_0^T\Omega(T,s)\left\{h(s)-\Psi(s)P_1^{-1}\int\limits_0^T\Psi^\top(\tau)h(\tau)d\tau\right\}ds.$$

Покажемо, що співвідношення (9) утворюють k-параметричну сім'ю.

Позначимо через $\Theta(t)$ $((n-1)\times(n-1-k))$-вимірну матрицю, стовпцями якої є $(n-1-k)$ лінійно незалежних розв'язків спряженої системи (7), які не є T-періодичними.

Нехай $\bar V(t)$ фундаментальна матриця системи (7) така, що її перші k стовпців утворює матриця $\Psi(t)$, а інші – матриця $\Theta(t)$:

$$\bar V(t)=\left[\Psi(t),\Theta(t)\right].$$

Фундаментальні матриці $V(t)$ та $\bar V(t)$ зв'язані співвідношенням

$$\bar V^\top(t)V(T)=C,$$

де C – деяка невироджена стала матриця. Тоді для матриціанта $\Omega(t,s)$ матимемо

$$\Omega(t,s)=V(t)V^{-1}(s)=\left(\bar V^\top(t)\right)^{-1}\bar V^\top(s)=$$

$$=\left(\bar V^\top(t)\right)^{-1}\begin{bmatrix}\Psi^\top(s)\\ \Theta^\top(s)\end{bmatrix}. \tag{11}$$

Можна переконатися, що справедливою є наступна рівність

$$\int\limits_0^t\Omega(t,s)\left\{h(s)-\Psi(s)P_1^{-1}\int\limits_0^T\Psi^\top(\tau)h(\tau)d\tau\right\}ds=$$

$$=\int\limits_0^t\left(\bar V^\top(t)\right)^{-1}U(t,s)h(s)ds- \tag{12}$$

$$-\int\limits_t^T\left(\bar V^\top(t)\right)^{-1}\bar U(t,s)h(s)ds,$$

де

$$P_1(t)=\int\limits_0^t\Psi^\top(s)\Psi(s)ds,\quad P_1(T)=P_1,$$

$$P_2(t)=\int\limits_0^t\Theta^\top(s)\Psi(s)ds,$$

$$U(t,s)=\begin{bmatrix}U_1(t,s)\\ U_2(t,s)\end{bmatrix},\quad \bar U(t,s)=\begin{bmatrix}\bar U_1(t,s)\\ \bar U_2(t,s)\end{bmatrix},$$

$$U_1(t,s)=\Psi^\top(s)-P_1(t)P_1^{-1}\Psi^\top(s),$$

$$U_2(t,s)=\Theta^\top(s)-P_2(t)P_1^{-1}\Psi^\top(s),$$

$$\bar U_1(t,s)=P_1(t)P_1^{-1}\Psi^\top(s),$$

$$\bar U_2(t,s)=P_2(t)P_1^{-1}\Psi^\top(s).$$

Оскільки $U_1(T,s)=0$, то при $t=T$ з (12) одержимо

$$\int\limits_0^T\Omega(T,s)\left\{h(s)-\Psi(s)P_1^{-1}\int\limits_0^T\Psi^\top(\tau)h(\tau)d\tau\right\}ds=$$

$$=\left(\bar V^\top(t)\right)^{-1}\begin{bmatrix}0_{k+1,1}\\ \int\limits_0^T U_2(T,s)h(s)ds\end{bmatrix}. \tag{13}$$

Помноживши (10) зліва на $\bar V^\top(t)$ і врахувавши (11) і (13) отримаємо

$$\begin{bmatrix}\Psi^\top(T)-\Psi^\top(0)\\ \Theta^\top(T)-\Theta^\top(0)\end{bmatrix}c=\begin{bmatrix}0_{k+1,k}\\ \int\limits_0^T U_2(T,s)h(s)ds\end{bmatrix}.$$

Оскільки $\det\bar V(T)\neq 0$ і $\Psi(T)=\Psi(0)$, то система (10) еквівалентна лінійній неоднорідній алгебраїчнійй системі

$$Gc=\int\limits_0^T U_2(T,s)h(s)ds, \tag{14}$$

де G – $((n-1-k)\times(n-1))$-вимірна матриця вигляду

$$G=\Theta^{\top}(T)-\Theta^{\top}(0).$$

Оскільки $rankG=n-1-k$, то алгебраїчна система (14) є розв'язною при довільних значеннях функції $h(t)$ і при цьому має k-параметричний розв'язок вигляду

$$c=P_{G_k}\xi+G^{+}\int\limits_0^T U_2(T,s)h(s)ds, \qquad (15)$$

де G^{+} – єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до G матриця [7]; P_{G_k} – $((n-1)\times k)$-вимірна матриця, яка складається з k лінійно незалежних стовпців $((n-1)\times(n-1))$-вимірної матриці P_G, яка є ортопроєктором з простору R^{n-1} на нуль-простір $N(G)$ матриці G, $\xi\in\mathbb{R}^k$ – вектор довільних сталих.

Підставляючи (15) в (9) одержимо, що система (8) має k-параметричну сім'ю T-періодичних розв'язків вигляду

$$v(t,\xi)=\Omega(t,0)P_{G_k}\xi+$$
$$+\Omega(t,0)G^{+}\int\limits_0^T U_2(T,s)h(s)ds+$$
$$+\int\limits_0^t\left(\bar V^{\top}(t)\right)^{-1}U(t,s)h(s)ds-$$
$$-\int\limits_t^T\left(\bar V^{\top}(t)\right)^{-1}\bar U(t,s)h(s)ds.$$

3. Дослідження періодичних розв'язків вироджених нелінійних систем. Тепер розглянемо чисельно-аналітичний метод побудови T-періодичних розв'язків виродженої нелінійної системи (1).

Припускаємо, що виконуються наступні умови:

A) відповідна (6) лінійна однорідна система має k, $1\le k\le n-1$ лінійно незалежних T -періодичних розв'язків;

B) матриця $A_1(t)$ та вектор-функція $\bar f(t,v)$ неперервні по своїм змінним при $t\in\mathbb{R}$, T-періодичні по t; $a_{n,1}(t)\neq 0$ $\forall t\in\mathbb{R}$; $v\in D\subset\mathbb{R}^{n-1}$, де D – деяка замкнена обмежена область і для $\bar f(t,v)$ виконуються покоординатні оцінки

$$|\bar f(t,v)|\le M(t),$$
$$|\bar f(t,v')-\bar f(t,v'')|\le K(t)|v'-v''|, \qquad (16)$$

де $M(t)$ і $K(t)$ – T-періодичні відповідно вектор-функція і матрична-функція з невід'ємними інтегровними компонентами;

C) $D_\beta\equiv\left\{\xi\in R^k|B(v_0(t,\xi),\beta)\subseteq D\right\}\neq 0$, де $B(v_0,\beta)$ – β-окіл точки v_0,

$$v_0(t,\xi)=\Omega(t,0)P_{G_k}\xi,$$

$$\beta=\max_{t\in[0,T]}\left\{\int\limits_0^T\left|\Omega(t,0)G^{+}U_2(T,s)\right|M(s)ds+\right.$$
$$+\int\limits_0^t\left|\left(\bar V^{\top}(t)\right)^{-1}U(t,s)\right|M(s)ds+$$
$$\left.+\int\limits_t^T\left|\left(\bar V^{\top}(t)\right)^{-1}\bar U(t,s)\right|M(s)ds\right\},$$

D) найбільше додатнє власне значення оператора Q менше за одиницю, де

$$(Qv)(t)=\int\limits_0^T\left|\Omega(t,0)G^{+}U_2(T,s)\right|K(s)v(s)ds+$$
$$+\int\limits_0^t\left|\left(\bar V^{\top}(t)\right)^{-1}U(t,s)\right|K(s)v(s)ds+$$
$$+\int\limits_t^T\left|\left(\bar V^{\top}(t)\right)^{-1}\bar U(t,s)\right|K(s)v(s)ds.$$

Розглянемо сім'ю k-параметричних відображень $L_\xi v: C\left(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n-1}\right)\to C\left(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n-1}\right)$ і функціонал $\mu(v): C\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)\to\mathbb{R}^k$, визначені наступними співвідношеннями:

$$(\bar L_\xi v)(t)=\Omega(t,0)P_{G_k}\xi+$$
$$+\Omega(t,0)G^{+}\int\limits_0^T U_2(T,s)\bar f(s,v(s))ds+$$

$$+\int\limits_0^t \left(\bar V^\top(t)\right)^{-1} U(t,s)\bar f(s,v(s))ds-$$

$$-\int\limits_t^T \left(\bar V^\top(t)\right)^{-1} \bar U(t,s)\bar f(s,v(s))ds,$$

$$\mu v(\cdot)=\int\limits_0^T \Psi^\top(s)\bar f(s,v(s))ds.$$

Справедливою є наступна лема.

Лема 2. *Вектор-функція* $\varphi \in C_T^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n-1})$ *є* T*-періодичним розв'язком нелінійної системи* (5) *тоді і тільки тоді, коли* φ *є розв'язком системи рівнянь*

$$v=L_\xi v, \tag{17}$$

$$\mu v(\cdot)=0.$$

При цьому початковим значенням розв'язку є

$$\varphi(0)=P_{G_k}\xi+G^+\int\limits_0^T \Theta^\top(s)\bar f(s,\varphi(s))ds.$$

Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 1 [6].

Для знаходження T-періодичного розв'язку нелінійної системи (5) побудуємо рекурентну k-параметричну послідовність функцій

$$\begin{gathered} v_m(t,\xi)=v_0(t,\xi)+\\ +\Omega(t,0)G^+\int\limits_0^T U_2(T,s)\bar f(s,v_{m-1}(s,\xi))ds+\\ +\int\limits_0^t\left(\bar V^\top(t)\right)^{-1}U(t,s)\bar f(s,v_{m-1}(s,\xi))ds-\\ -\int\limits_t^T\left(\bar V^\top(t)\right)^{-1}\bar U(t,s)\bar f(s,v_{m-1}(s,\xi))ds,\end{gathered} \tag{18}$$

$$v_0(t,\xi)=\Omega(t,0)P_{G_k}\xi,\quad m=1,2,\dots,$$

яка залежить від пераметра $\xi\in D_\beta\subset\mathbb{R}^k$.

З умови **C** випливає, що $(L_\xi v)(t)\in D$ при всіх $\xi\in D_\beta$, $v\in C(\mathbb{R},D)$, оскільки

$$\begin{gathered}|(L_\xi v)(t)-v_0(t,\xi)|\le\\ \le\int\limits_0^T\left|\Omega(t,0)G^+U_2(T,s)\right|M(s)ds+\\ +\int\limits_0^t\left|\left(\bar V^\top(t)\right)^{-1}U(t,s)\right|M(s)ds+\\ +\int\limits_t^T\left|\left(\bar V^\top(t)\right)^{-1}\bar U(t,s)\right|M(s)ds\le\beta.\end{gathered} \tag{19}$$

Беручи до уваги (16), з (18) одержимо

$$|v_{m+1}(t,\xi)-v_m(t,\xi)|=$$

$$=\left|\left(\bar L_\xi(v_m(\cdot,\xi)-v_{m-1}(\cdot,\xi))\right)(t)\right|\le$$

$$\le\left(Q\left|(v_m(\cdot,\xi)-v_{m-1}(\cdot,\xi)|\right)(t)\le$$

$$\le\left(Q^2\left|(v_{m-1}(\cdot,\xi)-v_{m-2}(\cdot,\xi)|\right)(t)\le\ldots\le$$

$$\le\left(Q^m\left|(v_1(\cdot,\xi)-v_0(\cdot,\xi)|\right)(t)\le Q^m\beta,$$

$$\begin{gathered}|v_{m+j}(t,\xi)-v_m(t,\xi)|=\\ =\sum_{i=0}^{j-1}|v_{m+i+1}(t,\xi)-v_{m+i}(t,\xi)|\le\\ \le\sum_{i=0}^{j-1}\left(Q^{m+i}\left|(v_1(\cdot,\xi)-v_0(\cdot,\xi)|\right)(t)\le\\ \le\sum_{i=0}^{j-1}Q^{m+i}\beta.\end{gathered} \tag{20}$$

З (19) випливає, що оператор L_ξ відображає простір $C(\mathbb{R},D)$ в себе, а з умови **D** випливає, що L_ξ є стискуючим оператором. Отже, застосовуючи принцип стиснутих відображень, бачимо, що рівняння (17) має в $C(\mathbb{R},D)$ єдиний розв'язок, який при довільному $\xi\in D_\beta\subset\mathbb{R}^k$ співпадає з граничною функцією послідовності (18):

$$v^*(t,\xi)=\lim_{m\to\infty}v_m(t,\xi).$$

Крім того, $\sum\limits_{i=0}^{\infty}Q^i=(E_{n-1}-Q)^{-1}$, а тому, переходячи в (20) до границі при $j\to\infty$, одержимо наступну оцінку похибки:

$$|v^*(t,\xi)-v_m(t,\xi)|\le(E_{n-1}-Q)^{-1}Q^m\beta; \tag{21}$$

Враховуючи дані міркування та лему 2 бачимо, що справедливою є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай для виродженої нелінійної T-періодичної системи диференціальних рівнянь (1), (4) справедливі припущення **A-D**. Тоді*

1) послідовність функцій (18) при $m \to \infty$ рівномірно збігається відносно $(t,\xi) \in \mathbb{R} \times D_\beta$ до деякої T-періодичної граничної функції $v^*(t,\xi)$. При всіх $m \in \mathbb{N}$, $(t,\xi) \in \mathbb{R} \times D_\beta$ виконуються оцінки (21);

2) функція $y^*(t) = (y_1^*(t), v^*(t))$, де $v^*(t) = v^*(t,\xi)$ – гранична функція послідовності (18),

$$y_1^*(t) = -\frac{1}{a_{n,1}(t)}\left(D_3(t)v^*(t) + f_n\left(t, v^*(t)\right)\right),$$

є T-періодичним розв'язком виродженої нелінійної системи (1) тоді і тільки тоді, коли точка $\xi = \xi^*$ є розв'язком визначального рівняння

$$\triangle(\xi) = 0,$$

де

$$\triangle(\xi) \overset{\mathrm{def}}{=} \mu(v^*(\cdot,\xi)) = \int_0^T \Psi^\top(s)\bar{f}(s, v^*(s,\xi))ds;$$

3) початкове значення T-періодичного розв'язку $y^*(t)$ виродженої нелінійної системи (1) визначається згідно формул

$$y_1^*(0) = -\frac{1}{a_{n,1}(0)}\left(D_3(0)v^*(0) + f_n(0, v^*(0))\right),$$

$$v^*(0) = P_{G_k}\xi + G^+ \int_0^T \Theta^\top(s)\bar{f}(s, v^*(s))ds. \qquad (22)$$

Наступне твердження містить достатні умови існування T-періодичного розв'язку нелінійної системи (1), які базуються на властивостях послідовних наближень $v_m(t,\xi)$, а не граничної функції $v^*(t,\xi)$.

Теорема 2. *Нехай для виродженої нелінійної T-періодичної системи диференціальних рівнянь (1), (4) справедливі припущення **A-D** і:*

1) існує опукла, замкнена область $D' \subset D_\beta \subset \mathbb{R}^k$ така, що при деякому фіксованому натуральному m відображення $\triangle_m(\xi) : D_\beta \to \mathbb{R}^k$:

$$\triangle_m(\xi) \overset{\mathrm{def}}{=} \mu(v^*(\cdot,\xi)) = \int_0^T \Psi^\top(s)\bar{f}(s, v_m(s,\xi))ds;$$

містить в області D' єдину особливу точку ξ_{0m} ненульового індексу;

2) на границі $\partial D'$ області D' виконується нерівність

$$\inf_{\xi \in \partial D'} |\triangle_m(\xi)| > Q_1(E_{n-1} - Q)^{-1} Q^m \beta,$$

де

$$Q_1 = \int_0^T |\Psi^\top(s)| K(s) ds.$$

Тоді, існує T-періодичний розв'язок виродженої нелінійної системи (1) $y = y^*(t) = (y_1^*(t,\xi^*), v^*(t,\xi^*))$, де $\xi^* \in D'$ і початкове значення $y^*(0) = (y_1^*(0), v^*(0))$ визначається згідно (22).

Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 3 [6].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Campbell S.L.* Singular systems of differential equations. — SanFrancisko, London, Melbourne. Pitman, 1982. — 188 p.
2. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — К.: Вища шк., 2000.— 294 с.
3. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003. — 317 с.
4. *Щеглова А.А.* Нелинейные алгебро-дифференциальные системы // Сибирский мат. журн. — 2007.—**58**, №4. — С. 931—948.
5. *Самойленко А.М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Укр. мат. журн. — 1965.—**17**, №4. — С. 82—93.
6. *Король І.І., Перестюк М.О.* Ще раз про чисельно-аналітичний метод послідовних наближень А.М. Самойленка // Укр. мат. журн. — 2006.— **58**, №4. — С. 472–488.
7. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 294 с.