УДК 517.9

©2012 р. **М.І.Конаровська, М.І.Матійчук**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ПОДВІЙНИМ СТЕПЕНЕВИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Установлено коректність задачі Коші для сингулярних параболічних систем з операторами Бесселя-Колмогорова.

Correctness of the Cauchy problem for the singular parabolic systems with Bessel-Kolmogorov operators was established.

Задачі для параболічних рівнянь з виродженнями досить глибоко вивчені в роботах [4,5] та ін. У монографії С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, А.Н. Кочубея [4] розглянуто рівняння з виродженнями за двома групами просторових змінних. Для таких рівнянь побудовано фундаментальні розв'язки, встановлено коректну розв'язність задачі Коші та описано властивості розв'язків. Аналогічні результати для рівнянь типу Колмогорова з довільною кількістю груп виродження та для систем рівнянь зі сталими та залежними від t коефіцієнтами отримано в роботах Г.П. Малицької [5,6]. У статті [7] ці результати перенесені на випадок рівнянь другого порядку, які містять оператор Бесселя, причому у рівнянні виродження містяться лише по $n-1$ просторовій змінній.

У даній роботі розглянуто систему B-параболічних рівнянь довільного порядку з подвійним степеневим виродженням. Під подвійним степеневим виродженням слід розуміти наступне: система рівнянь містить виродження по всіх просторових змінних (необмежені коефіцієнти при перших похідних) та коефіцієнти в групі "молодших" мають особливість в деякій точці x_0. Для таких систем на основі вже отриманих оцінок фундаментальної матриці розв'язків з [3] побудовано фундаментальну матрицю розв'язків досліджуваної системи, отримано її оцінки, встановлено зображення розв'язку та доведено теорему про коректність.

1. Постановка задачі та допоміжне твердження. У шарі $\Pi^+ = (0;T)\times E_n^+$, $E_n^+ = E_{n-1}\times(0;\infty)$ розглядається задача Коші для системи B-параболічних рівнянь

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj} D^k_{x'} B^j_{x_n} u -$$

$$-\sum_{l=1}^{n} x_l \frac{\partial u}{\partial x_l} - \sum_{|r|+2s<2b} a_{rs}(t,x) D^r_{x'} B^s_{x_n} u = f, \tag{1}$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0. \tag{2}$$

У системі рівнянь (1) коефіцієнти A_{kj} при $|k|+2j=2b$ сталі, а коефіцієнти $a_{ms}(t,x)$ при $|r|+2s<2b$ мають особливість в деякій точці $x'_0\in E_{n-1}$. Порядок їх прямування до нескінченності при $x'\to x'_0$ будемо характеризувати за допомогою функції

$$Q_\gamma(x'-x'_0) =$$

$$= \begin{cases} |x'-x'_0|^{-\gamma}, & \gamma>0, \quad |x'-x'_0|<1, \\ \ln\frac{1}{|x'-x'_0|}, & \gamma=0, \quad |x'-x'_0|<1, \\ 1, & \gamma\in E_1^+, \quad |x'-x'_0|\ge 1, \\ 0, & \gamma<0, \quad x'\in E_{n-1}. \end{cases}$$

$D^k_{x'} = \dfrac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}$, $B_{x_n} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \dfrac{2\nu+1}{x_n}\dfrac{\partial}{\partial x_n}$, $\nu\ge-\frac12$, $|k| = \sum_{i=1}^{n-1} k_i$, $|m| = \sum_{i=1}^{n-1} m_i$, $x=(x', x_n)$, $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})$, $x'_0=(x_{01},\dots,x_{0,n-1})$.

Позначимо через

$$P_{2b}(x,D) \equiv \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj} D^k_{x'} B^j_{x_n} + \sum_{l=1}^{n} x_l \frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$P_m(t,x,D) \equiv \sum_{|r|+2s=m} a_{rs}(t,x) D^r_{x'} B^s_{x_n},$$

$m = \overline{0, 2b-1}$. Нехай $G_{2b}(t-\tau, x'; x_n, \xi_n)$ – фундаментальна матриця розв'язків (ф.м.р.) B-параболічної системи з необмеженими коефіцієнтами

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = P_{2b}(x,D)u(t,x).$$

Для похідних ф.м.р. G_{2b} при довільному $T>0$ і будь-яких k, l, j справджується оцінка [3]

$$|D^k_{x'} D^l_{x_n} B^j_{x_n} G(t-\tau, x'; x_n, \xi_n)| \le \\ \le C_{kjl}(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n_\nu+|k|+2j+l}{2b}} \, e^{-n_\nu(t-\tau)} \times \\ \times T^{\xi_n}_{x_n}\left\{ e^{-c\left|\frac{x}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}}\right|^q} \right\}, \quad (3)$$

де $\alpha(t-\tau) = \frac{1-e^{-2b(t-\tau)}}{2b}$, C_{kjl}, c – додатні сталі, залежні від b, n_ν, T та сталої параболічності, $n_\nu = n+2\nu+1$, $q = \frac{2b}{2b-1}$, $T^{\xi_n}_{x_n}$ – оператор узагальненого зсуву, що відповідає оператору Бесселя B_{x_n}.

Зауваження. Якщо в системі рівнянь (1) коефіцієнти A_{kj} при $|k|+2j = 2b$ залежать від (t,x), то для гельдерових коефіцієнтів ф.м.р. $G_{2b}(t,\tau,x,\xi)$ можна побудувати методом Е. Леві, а для коефіцієнтів з простору Діні – методом Е. Хопфа [2].

Ставиться задача: маючи ф.м.р. G_{2b}, побудувати ф.м.р. системи (1) та отримати зображення розв'язку задачі Коші (1), (2).

Перш ніж перейти до побудови ф.м.р. доведемо допоміжне твердження.

Лема. *Для об'ємного інтеграла*

$$I_{km}(t,\tau,x,\xi) = \int_\tau^t d\beta \int_{E_n^+} (\alpha(t-\beta))^{-\frac{n_\nu+k}{2b}} \times \\ \times T^{y_n}_{x_n}\left\{e^{-c\rho(t,\beta,x,y')}\right\} (\alpha(\beta-\tau))^{-\frac{n_\nu+m}{2b}} \times \\ \times T^{\xi_n}_{y_n}\left\{e^{-c\rho(\beta,\tau,y,\xi')}\right\} |y'-x'_0|^{-\gamma} y_n^{\nu_0} dy,$$

при $0<k<2b$, $0<m+\gamma<2b$, $0<\gamma<n-1$ *справджується нерівність*

$$I_{km}(t,\tau,x,\xi) \le C(\varepsilon)(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n_\nu+m}{2b}} \times \\ \times \left(Q_{k+\gamma-2b}(x'-x'_0) + (\alpha(t-\tau))^{-\frac{k+\gamma-2b}{2b}}\right) \times \\ \times T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi')}\right\},$$

$\rho(t,\tau,x,\xi') = \left|\frac{x-\xi'}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}}\right|^q$, $\nu_0 = 2\nu+1$, $c_1 = c-\varepsilon$.

Доведення. Розпишемо інтеграл по E_n^+ на добуток інтегралів по E_{n-1} та E_1^+. Потім відщепимо від показника степеня експоненти ε, $\varepsilon<c$, та скористаємось нерівністю

$$(c-\varepsilon)\rho(t,\beta,x,y') + (c-\varepsilon)\rho(\beta,\tau,y,\xi') \ge \\ \ge (c-\varepsilon)\rho(t,\tau,x,\xi').$$

Будемо мати

$$I_{km}(t,\tau,x,\xi) = \int_\tau^t d\beta \int_{E_{n-1}} (\alpha(t-\beta))^{-\frac{n_\nu+k}{2b}} \times \\ \times e^{-\varepsilon\rho(t,\beta,x',y')} (\alpha(\beta-\tau))^{-\frac{n_\nu+m}{2b}} e^{-\varepsilon\rho(\beta,\tau,y',\xi')} \times \\ \times |y'-x'_0|^{-\gamma} dy' \int_0^{+\infty} T^{y_n}_{x_n}\left\{e^{-\varepsilon\left|\frac{x_n}{(\alpha(t-\beta))^{1/2b}}\right|}\right\} \times \\ \times T^{\xi_n}_{y_n}\left\{e^{-\varepsilon\left|\frac{y_n}{(\alpha(\beta-\tau))^{1/2b}}\right|}\right\} y_n^{\nu_0} dy_n \times \\ \times T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi')}\right\}, \quad c_1 = c-\varepsilon.$$

Запишемо I_{km} у вигляді суми інтегралів

$$I_{km} = T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi')}\right\} \times \\ \times \Bigg[\int_\tau^{t_1} d\beta \int_{|y'-x'_0|<(\alpha(\beta-\tau))^{1/2b}} (\ldots) dy' \int_0^{+\infty} (\ldots) dy_n + \\ + \int_\tau^{t_1} d\beta \int_{|y'-x'_0|\ge(\alpha(\beta-\tau))^{1/2b}} (\ldots) dy' \int_0^{+\infty} (\ldots) dy_n + \\ + \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{|y'-x'_0|<1} (\ldots) dy' \int_0^{+\infty} (\ldots) dy_n + \\ + \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{|y'-x'_0|\ge 1} (\ldots) dy' \int_0^{+\infty} (\ldots) dy_n \Bigg] =$$

$$= T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_1\rho}\right\}[I_1+I_2+I_3+I_4], t_1=\frac{t+\tau}{2}.$$

Оцінимо кожен з інтегралів I_i, $i=\overline{1,4}$.

У інтегралі I_1 врахуємо, що $t-\beta>\frac{t-\tau}{2}$ і $\alpha(t-\beta)>\frac{1}{2}\alpha(t-\tau)$, тому $(\alpha(t-\beta))^{-\frac{n\nu+k}{2b}}<C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+k}{2b}}$. Далі перейдемо в інтегралі по E_{n-1} до сферичних координат, а в інтегралі по y_n розпишемо оператор узагальненого зсуву та виконаємо заміну змінних

$$\begin{cases} v_1=(y_n-\xi_n\cos\varphi)(\alpha(\beta-\tau))^{-1/2b},\\ v_2=\xi_n\sin\varphi(\alpha(\beta-\tau))^{-1/2b}.\end{cases}$$

У результаті дістанемо

$$I_1\le C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+k}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi')}\right\}\times$$

$$\times\int_{\tau}^{t_1}(\alpha(\beta-\tau))^{-\frac{n-1+m}{2b}}d\beta\int_{0}^{(\alpha(\beta-\tau))^{1/2b}}r^{n-2-\gamma}dr\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}e^{-\varepsilon\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)^q}v_2^{2\nu}dv_1dv_2\le$$

$$\le C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+k}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi')}\right\}\times$$

$$\times\int_{\tau}^{t_1}(\alpha(\beta-\tau))^{-\frac{m+\gamma}{2b}}d\beta.$$

Якщо $m+\gamma<2b$, то останній інтеграл збіжний і для I_1 маємо оцінку

$$I_1\le C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+k+m+\gamma-2b}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_1\rho}\right\}.$$

У інтегралі I_2 врахуємо, що $|y'-x_0'|\ge(\alpha(\beta-\tau))^{1/2b}$, а інтеграл по y_n оцінюється аналогічно, як і в першому випадку. Матимемо

$$I_2\le C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+k}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi')}\right\}\times$$

$$\times\int_{\tau}^{t_1}d\beta\int_{E_{n-1}}e^{-\varepsilon\rho(\beta,\tau,y',\xi')}(\alpha(\beta-\tau))^{-\frac{n-1+m+\gamma}{2b}}dy'\le$$

$$\le C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+k}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_1\rho}\right\}\times$$

$$\times\int_{\tau}^{t_1}(\alpha(\beta-\tau))^{-\frac{m+\gamma}{2b}}d\beta\le$$

$$\le C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+k+m+\gamma-2b}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_1\rho}\right\}.$$

Якщо $k+\gamma<2b$, то інтеграли I_3 та I_4 оцінюються аналогічно, як і I_1 та I_2. Припустимо, що $k+\gamma\ge 2b$.

У інтегралі I_3 $\beta-\tau\ge\frac{t-\tau}{2}$, тому

$$(\alpha(\beta-\tau))^{-\frac{n\nu+m}{2b}}\ge C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+m}{2b}},$$

а інтеграл по y_n оцінюється так, як і раніше. Тоді, враховуючи, що для функції $\alpha(t-\beta)$ правильна нерівність $C_1(t-\beta)\le\alpha(t-\beta)\le C_2(t-\beta)$, матимемо

$$I_3\le C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+m}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi')}\right\}\times$$

$$\times\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{|y'-x_0'|<1}e^{-\varepsilon\rho(t,\beta,x',y')}(\alpha(t-\beta))^{-\frac{n-1+k}{2b}}\times$$

$$\times|y'-x_0'|^{-\gamma}dy'\le C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+m}{2b}}\times$$

$$\times T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_1\rho}\right\}\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{|y'-x_0'|<1}e^{-\varepsilon\left|\frac{x'-y'}{(t-\beta))^{1/2b}}\right|^q}\times$$

$$\times(t-\beta)^{-\frac{n-1+k}{2b}}|y'-x_0'|^{-\gamma}dy'.$$

Змінюючи порядки інтегрування та проводячи заміну змінних $|x'-y'|^{2b}(t-\beta)=z$ для I_3 дістанемо

$$I_3\le C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+m}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi')}\right\}\times$$

$$\times\int_{|y'-x_0'|<1}|x'-y'|^{-n+1-k+2b}|y'-x_0'|^{-\gamma}dy'\times$$

$$\times\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{+\infty}e^{-\varepsilon z^{1/(2b-1)}}z^{\frac{n-1+k}{2b}-2}dz.$$

Останній інтеграл збіжний, якщо $n-1+k>2b$. Оскільки $0<\gamma<n-1$, то $\gamma+k<n-1+k$. З іншого боку припускали, що $\gamma+k\ge 2b$. Тоді $2b\le\gamma+k<n-1+k$. Далі згідно з лемою 2 [8, с.26] остаточно для I_3 отримаємо нерівність

$$I_3\le C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n\nu+m}{2b}}Q_{k+\gamma-2b}(x'-x_0')\times$$

$$\times T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi')}\right\}.$$

Залишилось оцінити I_4. У I_4 врахуємо, що $\beta-\tau \geq \frac{t-\tau}{2}$ і $|y'-x'_0| \geq 1$. Тоді знайдемо

$$I_4 \leq C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n_\nu+m}{2b}} T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c_1\rho}\right\} \times$$

$$\times \int\limits_{t_1}^{t} (\alpha(t-\beta))^{-\frac{k}{2b}} d\beta \times$$

$$\times \int\limits_{E_{n-1}} e^{-\varepsilon\rho(t,\beta,\tau,x',y')} (\alpha(t-\beta))^{-\frac{n-1}{2b}} dy' \leq$$

$$\leq C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n_\nu+m+k-2b}{2b}} T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi')}\right\}$$

при $k<2b$. З оцінок I_i, $i=\overline{1,4}$, випливає твердження леми.

2. Побудова ф.м.р. системи (1)**.** При побудові ф.м.р. скористаємось алгоритмом, описаним в [2]. Ф.м.р. системи (1) будемо знаходити за допомогою рекурентної формули. Відшукуємо $Z_k(t,\tau,x,\xi)$ у вигляді

$$Z_k(t,\tau,x,\xi) = Z_{k+1}(t,\tau,x,\xi) + W_k(t,\tau,x,\xi), \tag{4}$$

де $Z_{2b} \equiv G_{2b}$, а функції $W_k(t,\tau,x,\xi)$ потрібно підібрати так, щоб Z_k при $t>\tau$ задовольняла систему рівнянь

$$\frac{\partial Z_k}{\partial t} = P_{2b}(x,D)Z_k + P_{2b-1}(t,x,D)Z_k + \ldots +$$

$$+P_k(t,x,D)Z_k.$$

Далі функції $W_k(t,\tau,x,\xi)$ знаходимо у вигляді потенціалу

$$W_k(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{E_n^+} Z_{k+1}(t,\beta,x,y) \times$$

$$\times \varphi_k(\beta,\tau,y,\xi) y_n^{\nu_0} dy, \tag{5}$$

де функції $\varphi_k(t,\tau,x,\xi)$ вважатимемо неперервними при $t>\tau$, $x' \neq x'_0$, для яких справедливі оцінки

$$|\varphi_k(t,\tau,x,\xi)| \leq C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n_\nu+k}{2b}} \times$$

$$\times Q_{\gamma_k}(x'-x'_0) e^{-n_\nu(t-\tau)} T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c\left|\frac{x-\xi'}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}}\right|^q}\right\}. \tag{6}$$

Оцінки (6) забезпечують при $x' \neq x'_0$ існування похідних W_k до порядку $2b$ включно.

Застосуємо до $Z_k(t,\tau,x,\xi)$ оператор $\frac{\partial}{\partial t} - P_{2b}(x,D) - \sum\limits_{m=k}^{2b-1} P_m(t,x,D)$, дістанемо для φ_k інтегральне рівняння

$$\varphi_k(t,\tau,x,\xi) = K_k(t,\tau,x,\xi) +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{E_n^+} K_k(t,\beta,x,y)\varphi_k(\beta,\tau,y,\xi) y_n^{\nu_0} dy, \tag{7}$$

де

$$K_k(t,\beta,x,y) \equiv P_k(t,x,D) Z_{k+1}(t,\tau,x,\xi).$$

Покажемо, що інтегральне рівняння (7) має розв'язок, який задовольняє оцінку (6). Для цього візьмемо спочатку $k=2b-1$ та оцінимо K_{2b-1}, враховуючи особливість коефіцієнтів, які входять в оператор $P_{2b-1}(t,x,D)$, та оцінку (3) ф.м.р. G_{2b}. У результаті дістанемо

$$|K_{2b-1}(t,\tau,x,\xi)| \leq C(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n_\nu+2b-1}{2b}} \times$$

$$\times Q_{\gamma_{2b-1}}(x'-x'_0) e^{-n_\nu(t-\tau)} T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c\left|\frac{x-\xi'}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}}\right|^q}\right\}. \tag{8}$$

Усі наступні повторні ядра

$$K^{(s)}_{2b-1}(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{E_n^+} K_{2b-1}(t,\beta,x,y) \times$$

$$\times K^{(s-1)}_{2b-1}(\beta,\tau,y,\xi) y_n^{\nu_0} dy$$

з урахуванням леми та нерівності (8) мають однаковий порядок особливості і

$$|K^{(\omega)}_{2b-1}(t,\tau,x,\xi)| \leq C(\varepsilon_0)^{\omega-1} Q_{\gamma_{2b-1}}(x'-x'_0) \times$$

$$\times (\alpha(t-\tau))^{-\frac{n_\nu+2b-1-\varepsilon_0(\omega-1)}{2b}} e^{-n_\nu(t-\tau)} \times$$

$$\times T^{\xi_n}_{x_n}\left\{e^{-c_\omega\left|\frac{x-\xi'}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}}\right|^q}\right\}, \tag{9}$$

де $c_\omega = c-\varepsilon_0(\omega-1)$, $\omega < \left[\frac{n_\nu+2b-1}{\varepsilon_0}\right]+1$. Повторні ядра з $\omega \geq \left[\frac{n_\nu+2b-1}{\varepsilon_0}\right]+1$ не мають особливості при $t=\tau$ і оцінюються аналогічно, як і в [1].

Розв'язок інтегрального рівняння (7) збігається з резольвентою ядра $K_{2b-1}(t,\tau,x,\xi)$ і

$$\varphi_{p-1}(t,\tau,x,\xi)=K_{2b-1}(t,\tau,x,\xi)+$$
$$+\sum_{\omega=1}^{\infty}\int_{\tau}^{t}d\beta\int_{E_n^+}K_{2b-1}(t,\beta,x,y)\times$$
$$\times K_{2b-1}^{(\omega-1)}(\beta,\tau,y,\xi)y_n^{\nu_0}dy. \qquad (10)$$

Ряд з (10) рівномірно і абсолютно збіжний при $t-\tau\geq r_0$, $|x'-x_0'|\geq r_0>0$ і для його суми з оцінок (8) та (9) випливає оцінка (6).

Таким чином побудовано $Z_{2b-1}(t,\tau,x,\xi)$. Для Z_{2b-1}, враховуючи оцінки ф.м.р. G_{2b}, (6) та застосовуючи лему, легко встановлюється оцінка

$$|D_x^m B_{x_n}^j Z_{2b-1}(t,\tau,x,\xi)|\leq(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n_\nu+|m|+2j}{2b}}\times$$
$$\times e^{-n_\nu(t-\tau)}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_1\rho(t,\tau,x,\xi')}\right\},$$

$m+2j\leq 2b-1$, $\gamma_{mj}<2b-(|m|+2j)$.

Беручи далі $p=2b-2,\ldots,1,0$, отримаємо $Z_0,Z_1,\ldots,Z_{2b-2}$. Очевидно, що $Z\equiv Z_0$ є ф.м.р. системи (1). Покажемо, який вигляд матиме Z_0. Послідовно застосовуючи формули (4), будемо мати

$$Z=Z_1+Z_1*\varphi_0=$$
$$=Z_2+Z_2*\varphi_1+(Z_2+Z_2*\varphi_1)*\varphi_0=$$
$$=Z_2+Z_2*(\varphi_0+\varphi_1+\varphi_1*\varphi_0)=$$
$$=Z_3+Z_3*\varphi_2+(Z_3+Z_3*\varphi_2)*(\varphi_0+\varphi_1+\varphi_1*\varphi_0)=$$
$$=Z_3+Z_3*(\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_1*\varphi_0+\varphi_2*\varphi_0+$$
$$+\varphi_2*\varphi_1+\varphi_2*\varphi_1*\varphi_0)=\ldots=G_{2b}+G_{2b}*$$
$$*\left(\sum_{l=0}^{2b-1}\varphi_l+\ldots+\varphi_{2b-1}*\ldots*\varphi_0\right)\equiv$$
$$\equiv G_{2b}+G_{2b}*\varphi\equiv G_{2b}+W,$$

де φ – сума всіх можливих згорток $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{2b-1}$. Використовуючи нерівність (6) та лему при $\gamma_{rs}<2b-(|r|+2s)$ можна отримати нерівність для φ

$$|\varphi(t,\tau,x,\xi)|\leq C\sum_{p=0}^{2b-1}(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n_\nu+p}{2b}}\times$$
$$\times Q_{\gamma_p}(x-x_0)e^{-n_\nu(t-\tau)}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c_1\left|\frac{x-\xi'}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}}\right|^q}\right\}, \qquad (11)$$

$c_1<c$.

Враховуючи оцінку (11), лему та лему 1.1 [2, с.19], аналогічно, як і в [2], можна отримати оцінки для похідних W при $|k|+2j<2b$

$$|D_x^k B_{x_n}^j W(t,\tau,x,\xi)|\leq$$
$$\leq C_{kj}\sum_{|r|+2s<2b}\Big[Q_{|k|+2j+\gamma_{rs}-2b}(x'-x_0)+$$
$$+(\alpha(t-\tau))^{-\frac{|k|+2j+\gamma_{rs}-2b}{2b}}\Big]e^{-n_\nu(t-\tau)}\times$$
$$\times T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c\left|\frac{x-\xi'}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}}\right|^q}\right\}(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n_\nu+|r|+2s}{2b}},$$

а при $|k|+2j=2b$

$$|D_x^k B_{x_n}^j W(t,\tau,x,\xi)|\leq$$
$$\leq C_{kj}\sum_{|r|+2s<2b}\Big[Q_{\gamma_{rs}+\delta}(x'-x_0)+$$
$$+(\alpha(t-\tau))^{-\frac{\gamma_{rs}}{2b}}\Big]e^{-n_\nu(t-\tau)}\times$$
$$\times T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c\left|\frac{x-\xi'}{(\alpha(t-\tau))^{1/2b}}\right|^q}\right\}(\alpha(t-\tau))^{-\frac{n_\nu+|r|+2s}{2b}}, \qquad (12)$$

$\delta>0$.

Теорема *(про коректність). Нехай в шарі Π^+ задано B-параболічну систему рівнянь (1), яка містить оператор Бесселя по x_n та виродження по всіх просторових змінних, задано умови (2). Нехай коефіцієнти A_{kj} при $|k|+2j=2b$ сталі, а коефіцієнти a_{rs} при $|r|+2s<2b$ неперервні по t та мають особливість по x' в деякій точці $x_0'\in E_n^+$, для яких виконується умова*

$$|a_{rs}(t,x)|\leq CQ_{\gamma_{rs}}(x'-x_0'),$$
$$0<\gamma_{rs}<\min_{|r|+2s<2b}\{2b-(|r|+2s),n-1\},$$

Тоді ф.м.р. системи рівнянь (1) визначається формулою

$$Z(t,\tau,x,\xi)=G_{2b}(t,\tau,x,\xi)+W(t,\tau,x,\xi),$$

$$W(t,\tau,x,\xi)=\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{E_n^+}G_{2b}(t,\beta,x,y)\times$$

$$\times\varphi(\beta,\tau,y,\xi)y_n^{\nu_0}dy$$

і для похідних $D_x^k B_{x_n}^j W$ *справедливі оцінки* (12).

Для неперервних при $x'\neq x_0'$ *правої частини* f *та початкової функції* φ, *яка є парною по* x_n, *розв'язок задачі Коші* (1), (2) *з сумовними особливостями в коефіцієнтах, початковій функції та правій частині при* $x'\neq x_0'$ *однозначно визначається формулою*

$$u(t,x)=\int\limits_{E_n^+}Z(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)\xi_n^{\nu_0}d\xi+$$

$$+\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{E_n^+}Z(t,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)\xi_n^{\nu_0}d\xi.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *С.Д.Эйдельман.* Параболические системи. – М.: Наука, 1964. – 442 с.

2. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.

3. *М.І. Конаровська.* Задача з імпульсною дією для систем з операторами Бесселя-Колмогорова // Укр. мат. журн. – 2012, – Т. 64, №7. – С. 945-953.

4. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Koshubei A.N.* Analytic methods in theory of differential and pseudo-differential equation of parabohc type. – Basel-Boston-berlin: Birdhouser, 2004. -– 390 p.

5. *Малицька Г.П.* Системи рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. журн. – 2008, – Т. 60, №12. – С. 1650-1663.

6. *Малицька Г.П.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого за довільною кількістю груп змінних параболічного рівняння типу Колмогорова довільного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004, – 47, №4. – С. 131-138.

7. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Науковий вісник Чернівецького університету, – 2006. –. Випуск 288. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 5-11.

8. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.