УДК 517.946+511.37

©2012 р. В.С. Ільків[1,2], Т.В. Магеровська[3]

[1]Національний університет „Львівська політехніка“,
[2]Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
[3]Львівський державний університет внутрішніх справ

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА З БАГАТЬМА ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ ЗСУВАМИ

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі з двоточковими нелокальними умовами за часовою змінною t з багатьма параметрами для безтипної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, яка містить значення шуканого розв'язку у точках, зсунутих на сталі величини ξ_j за просторовою змінною $x = (x_1, \dots, x_p)$. Розв'язок шукається у шкалі гільбертових просторів 2π-періодичних за змінною x вектор-функцій з експоненційною поведінкою коефіцієнтів Фур'є. Доведено розв'язність задачі для майже всіх (за винятком множини як завгодно малої міри) значень вектора параметрів $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ у нелокальних умовах. Встановлено оцінки знизу малих знаменників, що виникають при дослідженні гладкості розв'язку.

The existence and uniqueness conditions of solution for the problem of multiple parameter nonlocal two points conditions by time variable t for typeless system of differential equations, which contains the value of original solution in the points shifted to the constant value ξ_j for the spacial variable $x = (x_1, \dots, x_p)$ are established. The solution sought in the scale of Hilbert spaces 2π-periodic for variable x vector functions with exponential behaviour of Fourier coefficients. Solvability of the problem for almost all (except for sets of arbitrarily small measure) values of vector of parameters $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ in nonlocal conditions are proved. Established lower bounds of small denominators that arise in studying the smoothness of the solution.

1. Постановка задачі. В циліндричній області $\mathcal{D}^p = [0,T] \times \Omega_{2\pi}^p$, де $T > 0$, $\Omega_{2\pi}^p$ — p-вимірний тор, тобто $\Omega_{2\pi}^p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, розглядається задача

$$\partial_t u = A_1(D)u_{\xi_1} + \dots + A_Q(D)u_{\xi_Q}, \qquad (1)$$

$$Mu|_{t=0} - u|_{t=T} = \varphi. \qquad (2)$$

причому $M = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m)$, число μ_j належить кругу $S_j = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - \theta_j| < R_j\}$, $\theta_j \in \mathbb{C}$, $R_j > 0$, матричні диференціальні вирази $A_j(D) = A_j(-i\partial x_1, \dots, -i\partial x_p)$ мають сталі комплексні коефіцієнти. Шукається розв'язок u рівняння (1) з векторними зсувами $\xi_1, \dots, \xi_Q$, що задовольняє нелокальні двоточкові умови (2) з параметрами $\mu_1, \dots, \mu_m$, де u_ξ — функція зі зсувом ξ, а $\varphi = \operatorname{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, де $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ — задані функції змінної $x = (x_1, \dots, x_p) \in \Omega_{2\pi}^p$.

Диференціальні рівняння (1) та умови (2) визначені у просторі $(\mathcal{T}')^m$ узагальнених 2π-періодичних функцій, де $\mathcal{T}$ — простір тригонометричних 2π-періодичних многочленів змінної x.

Якщо вектор-функції $\varphi = \operatorname{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ та $\psi = \operatorname{col}(\psi_1, \dots, \psi_m)$ належать до просторів $(\mathcal{T}')^m$ та $\mathcal{T}^m$ відповідно, то

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widehat{\varphi}_k e^{i(k,x)} \quad \text{та} \quad \psi = \sum_k \widehat{\psi}_k e^{i(k,x)},$$

і виконуються рівності

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_k \widehat{\psi}_k^H \widehat{\varphi}_k, \quad \langle \psi, \psi \rangle = \sum_k \|\widehat{\psi}_k\|^2,$$

де коефіцієнти Фур'є $\widehat{\varphi}_k$ та $\widehat{\psi}_k$ належать до простору $\mathbb{C}^m$, $\langle \varphi, \psi \rangle$ — дія узагальненої вектор-функції φ на основну вектор-функцію ψ, $\widehat{\psi}_k^H$ ермітово спряжений з вектором $\widehat{\psi}_k$ вектор, $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p$, $\|\cdot\|$ — евклідова норма в $\mathbb{C}^m$, $\sum_k$ — скінченна сума, в якій $k \in \mathbb{Z}^p$.

Якщо $u = u(t,x)$ є розв'язком задачі (1), (2), то він є 2π-періодичним за змінною x і на відрізку $[0,T]$ функція $u(t,\cdot)$ належить до простору $(\mathcal{T}')^m$, тобто $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)e^{i(k,x)}$.

Тоді функція u_ξ для довільного $\xi \in \Omega^p_{2\pi}$ також належить $(\mathcal{T}')^m$ і формула

$$\langle u_\xi, \psi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} e^{i(k,\xi)}\psi_k^H u_k(t) \equiv \langle u, \psi(\cdot - \xi)\rangle$$

визначає дію u_ξ на ψ, де (k,ξ) — скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$ векторів k та ξ. Зауважимо, що $u_\xi = u$ для $\xi = 0$, а $u_\xi(t,x) = u(t, x+\xi)$ для неперервної функції u.

Дію оператора $F(D)$ у просторі $(\mathcal{T}')^m$ визначає послідовність $F(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, квадратних матриць порядку m, а саме

$$F(D)\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} F(k)\widehat{\varphi}_k e^{i(k,x)}.$$

Скалярний оператор $\widetilde{D}$ діє згідно з формулою $\widetilde{D}\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}\,\widehat{\varphi}_k e^{i(k,x)}$, де $\widetilde{k} = \sqrt{1+\|k\|^2} = \sqrt{1+k_1^2+\cdots+k_p^2}$ — додатна послідовність.

Будемо використовувати такі функціональні простори: $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$, $\mathbf{E}_{h,l}(\Omega^p_{2\pi})$ — гільбертові простори функцій $\varphi \in (\mathcal{T}')^m$, для яких скінченні відповідні норми

$$\|\varphi; \mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\| = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{\,2q}\|\widehat{\varphi}_k\|^2\Big)^{1/2},$$

$$\|\varphi; \mathbf{E}_{h,l}(\Omega^p_{2\pi})\| = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \exp(2h\widetilde{k}^{\,l})\|\widehat{\varphi}_k\|^2\Big)^{1/2}.$$

Запровадимо на множині $S_1 \times \cdots \times S_m$ векторів $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_m)$ геометричну ймовірність

$$P(\Omega) = \frac{\operatorname{meas}\Omega}{\pi^m R_1^2\cdots R_m^2},$$

де $\Omega \subset S_1 \times \cdots \times S_m$ — вимірна за Лебегом множина з мірою $\operatorname{meas}\Omega$ у просторі $\mathbb{R}^{2m}$.

Означення 1. *Задачу (1), (2) називаємо розв'язною у шкалі просторів $\mathbf{E}_{h,l}(\Omega^p_{2\pi})$, $h\in\mathbb{R}$, з ймовірністю $1-\varepsilon$ на множині параметрів $S_1\times\cdots\times S_m$, якщо існує така вимірна підмножина Ω множини $S_1\times\cdots\times S_m$, що $P(\Omega) \geq 1-\varepsilon$ і для кожного вектора $\mu\in\Omega$ задача (1), (2) має єдиний розв'язок u, тобто $\langle Mu|_{t=0} - u|_{t=T}, \psi\rangle = \langle\varphi,\psi\rangle$ і*

$$\langle \partial_t u - A_1(D)u_{\xi_1} - \cdots - A_Q(D)u_{\xi_Q}, \psi\rangle = 0$$

для всіх вектор-многочленів $\psi\in\mathcal{T}^m$, зі значеннями $u(t,\cdot)$ у просторах $\mathbf{E}_{h,l}(\Omega^p_{2\pi})$.

2. Дослідження задач для рівнянь зі зсувами аргументів. Теорії диференціальних рівнянь з відхиленнями аргументів (рівнянь із запізненням, рівнянь з випередженням) сталого чи змінного вигляду присв'ячено чимало публікацій, зокрема [1–7]. Задачі з такими рівняннями описують важливі процеси із часовими запізненнями чи запізненнями іншого типу. Зокрема, серед таких задач є задачі, якими моделюється робота ядерних реакторів і систем автоматичного керування, явища живої природи (моделі в іммунології, епідемології) та математичної економіки тощо.

Задача (1), (2) вивчалася у працях [8, 9] для частинного випадку $\mu_1 = \ldots = \mu_m = \mu$, тобто для випадку одного аргумента μ у нелокальних умовах (2). У роботі [8] встановлено умови розв'язності задачі (1), (2) стосовно параметра μ, а у роботі [9] — стосовно вектора параметрів зсувів у рівнянні (1). Результати останньої праці подано у [10].

Задачу для систем рівнянь з частинними похідними з відхиленням аргументів та нелокальними інтегральними умовами розглянуто у роботі [11].

Нелокальні задачі з відхиленням аргументів є некоректними за Адамаром, як і нелокальні задачі без відхилень аргументів [12, 13]. Характерною особливістю цих задач є малі знаменники, які виникають при побудові розв'язків у просторах періодичних функцій за змінною x. Для оцінювання малих знаменників використовується метричний підхід [14–16].

Варіант такого підходу застосовано також у цій роботі для дослідження розв'язності задачі (1), (2) на множині $S_1\times\cdots\times S_m$ параметрів $\mu_1,\ldots,\mu_m$ нелокальних умов.

3. Побудова та оцінка розв'язку. У розв'язку u задачі (1), (2) коефіцієнти Фур'є

$u_k = u_k(t)$ визначаються з відповідної задачі

$$u'_k = \sum_{j=1}^{Q} A_j(k) e^{i(k,\xi_j)} u_k, \qquad (3)$$

$$M u_k(0) - u_k(T) = \widehat{\varphi}_k, \qquad (4)$$

де вектори u_k і $\widehat{\varphi}_k$ мають вигляд

$u_k = \operatorname{col}(u_{k1}, \ldots, u_{km}), \widehat{\varphi}_k = \operatorname{col}(\widehat{\varphi}_{k1}, \ldots, \widehat{\varphi}_{km})$.

Введемо заміну змінних

$$U = \operatorname{col}\big(\widetilde{D}^{d_1} u_1, \ldots, \widetilde{D}^{d_m} u_m\big),$$

$$\widetilde{\varphi} = \operatorname{col}\big(\widetilde{D}^{d_1} \varphi_1, \ldots, \widetilde{D}^{d_m} \varphi_m\big),$$

тоді $U = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} U_k(t) e^{i(k,x)}$, $\Phi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \Phi_k e^{i(k,x)}$, де $U_k(t) = Z_k u_k(t)$, $\Phi_k = Z_k \widehat{\varphi}_k$, причому

$$Z_k = \operatorname{diag}\big(\widetilde{k}^{\,d_1}, \ldots, \widetilde{k}^{\,d_m}\big).$$

Вектор $U_k(t)$ є розв'язком нелокальної задачі $U'_k = \widetilde{k}^{\,N} A(k) U_k$, $M U_k(0) - U_k(T) = \Phi_k$ і, за умови існування матриці $M - e^{\widetilde{k}^{\,N} A(k) T}$, зображується формулою

$$U_k(t) = e^{\widetilde{k}^{\,N} A(k) t}\big(M - e^{\widetilde{k}^{\,N} A(k) T}\big)^{-1} \Phi_k, \qquad (5)$$

де $A(k) = \widetilde{k}^{\,-N} \sum_{j=1}^{Q} e^{i(k,\xi_j)} Z_k A_j(k) Z_k^{-1}$.

Дійсні числа $d_1, \ldots, d_m$ та N визначаємо так [8], щоб обмежити елементи $a_{\alpha\beta}(k)$ матриці $A(k)$, тобто $\max_{1\le\alpha,\beta\le m} \sup_{k\in\mathbb{Z}^p} |a_{\alpha\beta}(k)| < \infty$.

Виберемо числа Λ та $\mathcal{A}$ з таких умов:

$$\Lambda > \limsup_{k\in\mathbb{Z}^p} \Lambda(k), \quad \mathcal{A} > \limsup_{k\in\mathbb{Z}^p} \|A(k)\|,$$

де $\Lambda(k)$ — найбільша дійсна частина власних значень матриці $A(k)$, і позначимо K множину тих чисел $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких виконується хоча б одна з чотирьох нерівностей

$$\Lambda(k) \ge \Lambda, \quad \|A(k)\| \ge \mathcal{A}, \quad 2T\mathcal{A}\widetilde{k}^{\,N} < 1,$$

$$\big(T\mathcal{A}\widetilde{k}^{\,N}\big)^{2(m-1)} < \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{|\theta_j| + R_j}{2}\Big)^2.$$

Множина K — обмежена і може лише збільшуватися при зменшенні Λ, чи $\mathcal{A}$, чи T, чи збільшенні $\sum_{j=1}^{m} \big(|\theta_j| + R_j\big)^2$.

Із нерівності Гельфанда–Шилова [17, с. 78] випливає оцінка

$$\big\|e^{tA(k)\widetilde{k}^{\,N}}\big\| \le e^{t\Lambda(k)\widetilde{k}^{\,N}} \sum_{j=1}^{m} \big(2T\mathcal{A}\widetilde{k}^{\,N}\big)^{j-1},$$

а із нерівності Като $\|A^{-1}\| \le \dfrac{\|A\|^{m-1}}{|\det A|}$, де m — порядок матриці A [18, с. 42], — оцінка

$$\big\|\big(M - e^{TA(k)\widetilde{k}^{\,N}}\big)^{-1}\big\| \le \frac{\big(\|M\| + \big\|e^{TA(k)\widetilde{k}^{\,N}}\big\|\big)^{m-1}}{\big|\det\big(M - e^{TA(k)\widetilde{k}^{\,N}}\big)\big|}.$$

З отриманих нерівностей та формули (5) при $h = (t + (m-1)T)\Lambda$ отримуємо оцінки

$$\|e^{-h\widetilde{k}^{\,N}} U_k\| \le 4^m (2T\mathcal{A}\widetilde{k}^{\,N})^{(m-1)m} \frac{\|\Phi_k\|}{|\Delta_k|}, \qquad (6)$$

$$\frac{\|e^{-h\widetilde{k}^{\,N}} U'_k\|}{\mathcal{A}\widetilde{k}^{\,N}} \le 4^m (2T\mathcal{A}\widetilde{k}^{\,N})^{(m-1)m} \frac{\|\Phi_k\|}{|\Delta_k|}, \qquad (7)$$

де $\Delta_k = \det\big(M - e^{TA(k)\widetilde{k}^{\,N}}\big)$.

Для оцінювання знизу виразів Δ_k використовуємо метричний підхід, при цьому встановлюємо оцінки мір множин, для яких виконується протилежна оцінка зверху.

4. Метричні оцінки. Сформулюємо і доведемо теорему про міру множин (ймовірності), які пов'язані зі спеціальними многочленами від багатьох змінних $\mu_1, \ldots, \mu_m$.

Таку теорему у випадку дійсних змінних $\mu_1, \ldots, \mu_m$ доведено у роботі [19], звідки взято позначення й ідея доведення теореми 1 і лем 1 та 2 цієї роботи.

Теорема 1. *Нехай $\gamma_{(m)} = \gamma_{1\cdots1}$, $\varepsilon > 0$ і*

$$\Delta = \sum_{q\in\{0,1\}^m} \gamma_q \mu^q = \gamma_{(m)} \mu_1 \cdots \mu_m + \cdots \quad -$$

многочлен змінної $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, функція $F_m\colon (0,\infty) \to (0,1]$ пов'язана з розв'язком $f_m(w) = w \sum_{j=0}^{m-1} (-\ln w)^j / j!$ задачі Коші для рівняння Ейлера

$$\big(w(d/d_w) - 1\big)^m f_m = 0,$$

$$f_m(1) = 1, \ f'_m(1) = \cdots = f_m^{(m-1)}(1) = 0,$$

формулою $F_m(w) = f_m(w^2)$ при $w \in (0,1]$ і $F_m(w) = 1$ при $w > 1$. Тоді ймовірність

$P(|\Delta| < \varepsilon)$ *виконання нерівності* $|\Delta| < \varepsilon$ *на полікрузі* $S_1 \times \cdots \times S_m$ *оцінюється зверху за допомогою нерівності*

$$P\big(|\Delta| < \varepsilon\big) \le F_m\Big(\frac{\varepsilon/|\gamma_{(m)}|}{R_1 \cdots R_m}\Big). \qquad (8)$$

Доведення. Використовуємо метод математичної індукції за кількістю змінних μ_j.

Зафіксуємо довільний вектор

$$(\mu_2, \ldots, \mu_m) \in S_2 \times \cdots \times S_m$$

і вважаємо $\Delta_{\mu_2,\ldots,\mu_m}$ функцією Δ змінної $\mu_1 \in S_1$, а саме $\Delta_{\mu_2,\ldots,\mu_m} = \gamma_{(1)}\mu_1 + \gamma'_{(1)}$, де

$$\gamma_{(1)} = \sum_{(q_2,\ldots,q_m)\in\{0,1\}^{m-1}} \gamma_{1q_2\ldots q_m}\mu_2^{q_2}\ldots\mu_m^{q_m},$$

$$\gamma'_{(1)} = \sum_{(q_2,\ldots,q_m)\in\{0,1\}^{m-1}} \gamma_{0q_2\ldots q_m}\mu_2^{q_2}\ldots\mu_m^{q_m}.$$

Оцінимо ймовірність $P\big(|\Delta_{\mu_2,\ldots,\mu_m}| < \varepsilon\big)$, де

$$P\big(|\Delta_{\mu_2,\ldots,\mu_m}| < \varepsilon\big) = \\ = \frac{\operatorname{meas}\{\mu_1 \in S_1 \colon |\gamma_{(1)}\mu_1 + \gamma'_{(1)}| < \varepsilon\}}{\pi R_1^2}.$$

Нерівність $|\gamma_{(1)}\mu_1 + \gamma'_{(1)}| < \varepsilon$ при $\gamma_{(1)} \neq 0$ виконується для множини чисел $\mu_1 \in S_1$, які належать відкритому кругу радіуса $\varepsilon/|\gamma_{(1)}|$ з центром у точці $\gamma'_{(1)}/\gamma_{(1)}$, яка має міру не більшу, ніж $\pi\varepsilon^2/|\gamma_{(1)}|^2$, а при $\gamma_{(1)} = 0$ виконується для всіх $\mu_1 \in S_1$ при $|\gamma'_{(1)}| < \varepsilon$ і не виконується для жодного $\mu_1 \in S_1$ при $|\gamma'_{(1)}| \ge \varepsilon$. Тому в обох випадках міра множини $\{\mu_1 \in S_1 \colon |\Delta_{\mu_2,\ldots,\mu_m}| < \varepsilon\}$ не перевищує мінімального з чисел $\pi\varepsilon^2/|\gamma_{(1)}|^2$ і πR_1^2.

Отже, отримуємо нерівність

$$P\big(|\Delta_{\mu_2,\ldots,\mu_m}| < \varepsilon\big) \le \frac{\pi\min\{\varepsilon^2/|\gamma_{(1)}|^2, R_1^2\}}{\pi R_1^2} = \\ = \min\Big\{\frac{\varepsilon^2/|\gamma_{(1)}|^2}{R_1^2}, 1\Big\} = \min\{w_1^2, 1\} = F_1(w_1),$$

де $w_1 = w_1(\mu_2, \ldots, \mu_m) = \varepsilon/|\gamma_{(1)}|R_1$.

Теорему для $m = 1$ доведено.

Доведемо тепер крок індукції, збільшуючи кількість змінних на одиницю. Зафіксуємо змінну $\mu_m \in S_m$ і розглянемо функцію Δ_{μ_m}, як функцію Δ змінних $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$, тобто

$$\Delta_{\mu_m} = (\gamma_{(m)}\mu_m + \gamma'_{(m)})\mu_1 \cdots \mu_{m-1} + \cdots,$$

де $\gamma_{(m)} = \gamma_{1\ldots1}$, а $\gamma'_{(m)} = \gamma_{1\ldots10}$. Оцінимо шукану ймовірність $P(|\Delta| < \varepsilon)$ за формулою

$$P(|\Delta| < \varepsilon) = \big(\pi^m R_1^2 \cdots R_m^2\big)^{-1} \times \\ \times \operatorname{meas}\{\mu \in S_1 \times \cdots \times S_m \colon |\Delta| < \varepsilon\} = \\ = \frac{1}{\pi R_m^2}\int_{S_m}\Big(\big(\pi^{m-1}R_1^2 \cdots R_{m-1}^2\big)^{-1} dx_m\, dy_m \times \\ \times \operatorname{meas}\big\{(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}) \in S_1 \times \cdots \times S_{m-1} \colon \\ \colon |\Delta_{z_m}| < \varepsilon\big\}\Big) = \frac{1}{\pi R_m^2}\int_{S_m} P(|\Delta_{z_m}| < \varepsilon)\, dx_m\, dy_m,$$

де $z_m = x_m + iy_m \in S_m$.

Оскільки за припущенням індукції

$$P(|\Delta_{z_m}| < \varepsilon) \le F_{m-1}(w_{m-1}),$$

де $w_{m-1} = \dfrac{\varepsilon/R_1 \cdots R_{m-1}}{|\gamma_{(m)}\mu_m + \gamma'_{(m)}|}$, то

$$P(|\Delta| < \varepsilon) \le \big(\pi R_m^2\big)^{-1} \times \\ \times \int_{S_m} F_{m-1}\Big(\frac{\varepsilon/R_1 \cdots R_{m-1}}{|\gamma_{(m)}z_m + \gamma'_{(m)}|}\Big)\, dx_m\, dy_m. \qquad (9)$$

Для подальшого оцінювання інтеграла використовуємо лему.

Лема 1. *Функції* F_j, $j = 1, \ldots, m$, *монотонно зростають на інтервалі* $(0, 1)$ *і пов'язані співвідношенням*

$$\frac{1}{\pi R_m^2}\int_{S_m} F_{m-1}\Big(\frac{1}{|Az_m + B|}\Big)\, dx_m\, dy_m \le \\ \le F_m\Big(\frac{1}{|A|R_m}\Big). \qquad (10)$$

Застосуємо лему 1 при

$$A = \frac{R_1 \cdots R_{m-1}\gamma_{(m)}}{\varepsilon}, \qquad B = \frac{R_1 \cdots R_{m-1}\gamma'_{(m)}}{\varepsilon}.$$

Із нерівностей (9), (10) маємо

$$P(|\Delta| < \varepsilon) \le F_m\Big(\frac{\varepsilon}{R_1 \cdots R_m|\gamma_{(m)}|}\Big) = F_m(w_m),$$

де $w_m = \dfrac{\varepsilon/|\gamma_{(m)}|}{R_1 \cdots R_m}$. Теорему доведено. ∎

Із твердження теореми випливає, що $\lim\limits_{w\to 0} F_m(w) = 0$ (рис. 1). Дійсно, для довільного $\alpha > 0$ існує границя $\lim\limits_{\tau\to\infty} \tau^{-\alpha}\ln\tau$ і дорівнює нулю, оскільки $\ln\tau \to \infty$ та $\tau^\alpha \to \infty$, то за правилом Лопіталя

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\ln\tau}{\tau^\alpha} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1/\tau}{\alpha\tau^{\alpha-1}} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\alpha\tau^\alpha} = 0.$$

Звідси отримуємо шукану границю

$$\lim_{w\to 0} F_m(w) = \lim_{\tau\to\infty} F_m(\tau^{-1}) =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\ln\tau^2)^j}{j!\tau^2} = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{2^j}{j!}\Big(\lim_{\tau\to\infty}\frac{\ln\tau}{\tau^{2/j}}\Big)^j = 0.$$

Отже, можемо покласти $F_m(0) = 0$ і розглядати функцію F_m на множині $[0,+\infty)$.

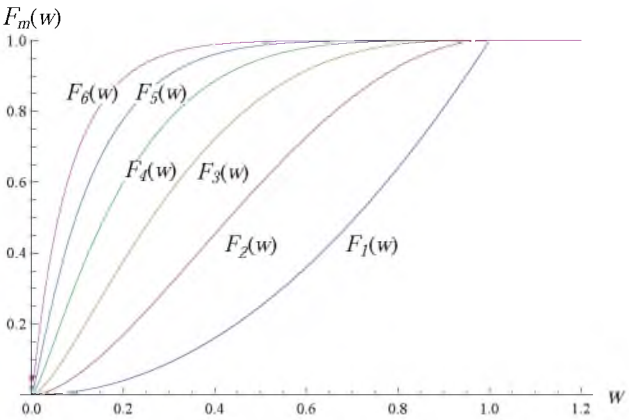

Рис. 1: Графіки функцій $F_m(w)$ при $m = 1,\dots,6$. Справджуються нерівності $F_1(w) \le F_2(w) \le \cdots$.

Лема 1 доводиться за допомогою такого твердження про інтеграли.

Лема 2. *Нехай $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ — незростаюча неперервна функція,*

$$S^* = \{z \in \mathbb{C}\colon |z-\theta^*| < R\},$$

$$S^{**} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z-\theta^{**}| < R\} -$$

відкриті круги радіуса R, центри θ^* і θ^{**} яких впорядковані так, що $|\theta^*| < |\theta^{**}|$, тоді справджується нерівність

$$\int_{S^*} f(|z|)dx\,dy \ge \int_{S^{**}} f(|z|)dx\,dy. \qquad (11)$$

Доведення. Якщо $S^* = S^{**}$, то нерівність (11) очевидно виконується як рівність, у протилежному випадку, оскільки f — симетрична щодо початку координат комплексної площини $\mathbb{C}$, вважаємо θ^* і θ^{**} дійсними числами, а саме $0 \le \theta^* < \theta^{**}$.

У випадку $\theta^* = 0$ для точок $z \in S^*$ виконується нерівність $|z| < R$ і лише для них, тому внаслідок незростання f отримуємо

$$\inf_{S^*\setminus S^{**}} f(|z|) \ge \sup_{S^{**}\setminus S^*} f(|z|). \qquad (12)$$

У випадку $\theta^* > 0$ і $S^* \cap S^{**} = \emptyset$ маємо

$$\inf_{S^{**}}|z| = \theta^{**} - R > \theta^* + R = \sup_{S^*}|z|,$$

тобто справджується (12), оскільки

$$\inf_{S^*} f(|z|) = f(\sup_{S^*}|z|),\ \sup_{S^{**}} f(|z|) = f(\inf_{S^{**}}|z|).$$

Доведемо цю ж нерівність у протилежному випадку $S^* \cap S^{**} \ne \emptyset$.

Тепер маємо $\theta^{**} - R \le \theta^* + R$, або

$$\theta^{**} - \theta^* \le 2R \qquad (13)$$

і обидві точки M_1 та M_2 перетину кіл

$$|z-\theta^*| = R, \quad |z-\theta^{**}| = R$$

мають абсцису $(\theta^* + \theta^{**})/2$, а ординати $\pm y$ визначаються з рівняння

$$y^2 = R^2 - (\theta^* - \theta^{**})^2/4.$$

Отже, віддалі цих точок від початку координат однакові і дорівнюють R_1, де

$$R_1^2 = R^2 - \frac{(\theta^*-\theta^{**})^2}{4} + \frac{(\theta^*-\theta^{**})^2}{4} = R^2 + \theta^*\theta^{**},$$

тобто $R_1 = \sqrt{R^2+\theta^*\theta^{**}}$.

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1 \in S_1 \setminus S_2$, тоді

$$\theta^* - R < x_1 \le (\theta^*+\theta^{**})/2,\ y_1^2 \le R^2 - (x_1-\theta^*)^2$$

і $|z_1|^2 \le R^2 - (x_1-\theta^*)^2 + x_1^2 = R^2 - \theta^{*2} + 2x_1\theta^* \le R^2 - \theta^{*2} + (\theta^*+\theta^{**})\theta^* = R^2 + \theta^*\theta^{**} = R_1^2$.

Якщо ж $z_2 = x_2 + iy_2 \in S_2 \setminus S_1$, то

$$(\theta^*+\theta^{**})/2 \le x_2 < \theta^{**}+R,\ y_2^2 \ge R^2 - (x_2-\theta^*)^2$$

і $|z_2|^2 \ge R^2 - (x_2-\theta^*)^2 + x_2^2 = R^2 - \theta^{*2} + 2x_2\theta^* \ge R^2 + \theta^*\theta^{**} = R_1^2$ при $(\theta^*+\theta^{**})/2 \le x_2 \le \theta^*+R$, а при $\theta^*+R < x_2 < \theta^{**}+R$ маємо $|z_2|^2 \ge x_2^2 = R^2+2R\theta^*+\theta^{*2} \ge R^2+(\theta^{**}-\theta^*)\theta^*+\theta^{*2} = R_1^2$.

Ця нерівність випливає з формули (13).

Отже, у всіх випадках виконується нерівність (12), оскільки внаслідок незростання функції f, маємо

$$\inf_{S^*\setminus S^{**}} f(|z|) = f(\sup_{S^*\setminus S^{**}} |z|) \ge$$
$$\ge f(\inf_{S^{**}\setminus S^*} |z|) = \sup_{S^{**}\setminus S^*} f(|z|).$$

Тепер доведемо формулу (11). Обчислимо у ній подвійні інтеграли:

$$\int_{S^*} f(|z|)dx\,dy =$$
$$= \Big(\int_{S^*\setminus S^{**}} + \int_{S^*\cap S^{**}}\Big) f(|z|)dx\,dy \ge$$
$$\ge \operatorname{meas}(S^*\setminus S^{**}) \inf_{S^*\setminus S^{**}} f(|z|)+$$
$$+ \int_{S^*\cap S^{**}} f(|z|)dx\,dy,$$

$$\int_{S^{**}} f(|z|)dx\,dy =$$
$$= \Big(\int_{S^{**}\setminus S^*} + \int_{S^*\cap S^{**}}\Big) f(|z|)dx\,dy \le$$
$$\le \operatorname{meas}(S^{**}\setminus S^*) \sup_{S^{**}\setminus S^*} f(|z|)+$$
$$+ \int_{S^*\cap S^{**}} f(|z|)dx\,dy.$$

Оскільки $\operatorname{meas}(S^*\setminus S^{**}) = \operatorname{meas}(S^{**}\setminus S^*)$, то з нерівності (12) випливає нерівність (11) і доведення леми. ■

Встановимо також твердження леми 1.

Доведення. Диференціюємо рівність

$$F_j(\sqrt{\tau}) = f(\tau) = \tau \sum_{l=0}^{j-1} (-\ln\tau)^l/l!,$$

тоді $f'(\tau) = \big(\ln(1/\tau)\big)^{j-1}/(j-1)! > 0$ для $\tau \in (0,1)$, тобто функція f монотонно зростає разом із функцією F_j на інтервалі $(0,1)$.

Із рівності $F_j(w) = 1$ при $w \ge 1$ і додатності на $(0,1)$ величин $w^2(-2\ln w)^l/l!$ випливає, що $F(w) \in (0,1]$, якщо $w \in (0,+\infty)$.

Якщо $A = 0$, то

$$\frac{1}{\pi R_m^2}\int_{S_m} F_{m-1}\Big(\frac{1}{|Az_m+B|}\Big)\,dx_m\,dy_m =$$
$$= F_{m-1}\Big(\frac{1}{|B|}\Big) \le 1 = F_m(+\infty) = F_m\Big(\frac{1}{|0|R_m}\Big).$$

Якщо $A \ne 0$, то введемо заміну

$$z = Az_m + B, \quad z_m = (z-B)/A,$$

з якобіаном $1/|A|^2$, яка круг S_m відображає у круг $S' = \{z \in \mathbb{C}\colon |z-(A\theta_m+B)| < |A|R_m\}$ радіуса $|A|R_m$ і запишемо

$$\frac{1}{\pi R_m^2}\int_{S_m} F_{m-1}\Big(\frac{1}{|Az_m+B|}\Big)\,dx_m\,dy_m =$$
$$= \frac{1}{\pi|A|^2R_m^2}\int_{S'} F_{m-1}\Big(\frac{1}{|z|}\Big)\,dx\,dy \le$$
$$\le \frac{1}{\pi|A|^2R_m^2}\int_{S} F_{m-1}\Big(\frac{1}{|z|}\Big)\,dx\,dy, \quad (14)$$

де $S = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < |A|R_m\}$.

Остання нерівність у формулі отримана на основі леми 2, де $S^{**} = S'$, $S^* = S$, $f(t) = F_{m-1}(1/t)$.

У першому випадку $|A|R_m < 1$, коли функція $F_{m-1}(1/|z|)$ у крузі S дорівнює одиниці, маємо

$$\int_S F_{m-1}\big(1/|z|\big)\,dx\,dy = \pi|A|^2R_m^2,$$

а у другому випадку $|A|R_m \ge 1$ перейдемо до полярних координат (r,φ), тому

$$\int_S F_{m-1}\Big(\frac{1}{|z|}\Big)\,dx\,dy = 2\pi\int_0^1 r\,dr+$$
$$+ 2\pi\int_1^{|A|R} \frac{r}{r^2}\sum_{j=0}^{m-2}\frac{\big(\ln r^2\big)^j}{j!}\,dr = \pi+$$
$$+\pi\sum_{j=0}^{m-2}\frac{\big(\ln r^2\big)^{j+1}}{(j+1)!}\Big|_1^{|A|R_m} = \pi\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\big(\ln|A|^2R_m^2\big)^j}{j!}.$$

Із нерівності (14) та з останньої формули випливає доведення леми. ■

З теореми 1 і формули $\Delta_k = \mu_1\cdots\mu_m + \cdots$

випливає оцінка

$$P(|\Delta_k|<\varepsilon_k)\le F_m\Big(\frac{\varepsilon_k}{R_1\cdots R_m}\Big)=$$
$$=\frac{\varepsilon_k^2}{R_1^2\cdots R_m^2}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\Big(-\ln\frac{\varepsilon_k^2}{R_1^2\cdots R_m^2}\Big)^j,\quad(15)$$

якщо $\varepsilon_k\le R_1\cdots R_m$.

Знайдемо ймовірність виконання хоча б однієї з нерівностей $|\Delta_k|<\varepsilon_k$, $k\in\mathbb{Z}^p\setminus K$, де $\varepsilon_k\le R_1\cdots R_m$, а саме ймовірність

$$P\Big(\bigvee\nolimits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus K}\big(|\Delta_k|<\varepsilon_k\big)\Big),$$

де $\bigvee_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus K}$ — операція диз'юнкції на $\mathbb{Z}^p\setminus K$.

З попередньої оцінки (15) отримуємо

$$P\Big(\bigvee\nolimits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus K}\big(|\Delta_k|<\varepsilon_k\big)\Big)\le$$
$$\le\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus K}F_m\Big(\frac{\varepsilon_k}{R_1\cdots R_m}\Big)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus K}F_m(C\widetilde{k}^{\,-r})$$

якщо $\varepsilon_k=CR_1\cdots R_m\widetilde{k}^{\,-r}$, де $r>p/2$, а C — деяка стала з інтервалу $(0,1)$.

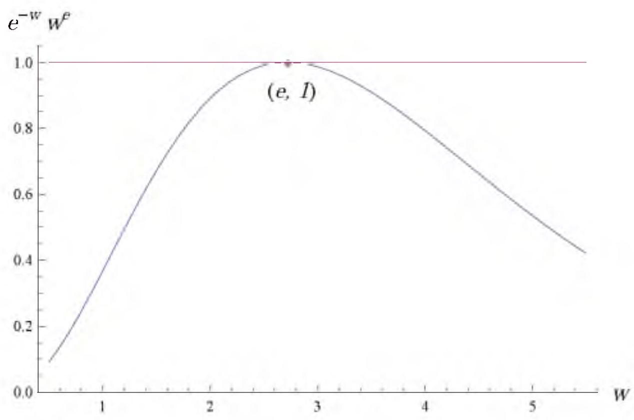

Рис. 2: Графік функції w^e/e^w. Єдиний максимум досягається у точці $(e,1)$.

Із нерівності $x^e/e^x\le 1$, яка виконується на множині $x\ge 0$ (рис. 2), випливає, що $w^{-\alpha}\ln w\le 1/e\alpha$ для додатних w і α, тому для $w>0$ і $\beta>0$ маємо

$$w\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\Big(\ln\frac{1}{w}\Big)^j\le m^m e^{1/\beta}w^{1-\beta}.$$

Отже, $F_m(w)\le m^m e^{1/\beta}w^{2(1-\beta)}$ і шукана ймовірність має оцінку

$$P\Big(\bigvee\nolimits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus K}\big(|\Delta_k|<\varepsilon_k\big)\Big)\le C^{2(1-\beta)}\times$$
$$\times\, m^m e^{1/\beta}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus K}\widetilde{k}^{\,-2r(1-\beta)}<\infty.\quad(16)$$

Виберемо (та зафіксуємо) сталу β з умови $0<\beta<1-p/2r$, а сталу C за формулою $C=\varepsilon^{1/2(1-\beta)}C_1$, де $\varepsilon\in(0,1)$,

$$C_1=\Big(m^m e^{1/\beta}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{\,-2r(1-\beta)}\Big)^{1/2(\beta-1)}.$$

Звідси отримуємо

$$P\Big(\bigvee\nolimits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus K}\big(|\Delta_k|<\varepsilon_k\big)\Big)\le\varepsilon$$

і для всіх $k\in\mathbb{Z}^p\setminus K$ з ймовірністю $1-\varepsilon$ виконуються нерівності

$$|\Delta_k|\ge\varepsilon^{1/2(1-\beta)}C_1R_1\cdots R_m\widetilde{k}^{\,-r}.\quad(17)$$

5. Теорема існування та єдиності. Позначимо Π_K — проектор на множину K, тобто $\Pi_K\psi=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\widehat{\psi}_k e^{i(k,x)}$, тоді $I-\Pi_K$ є також проектором на множину $\mathbb{Z}^p\setminus K$.

Нехай числа $d_1,\dots,d_m$, N, Λ, $\mathcal{A}$, r та множина K є фіксованими, $h_t=\big(t+(m-1)T\big)\Lambda$,

$$\mathbf{X}_t=\mathbf{E}_{-h_t,N}(\Omega_{2\pi}^p),\ \mathbf{Y}_j=\mathbf{H}_{q_j+r+(m-1)mN}(\Omega_{2\pi}^p),$$

де $t\in[0,T]$, $j=1,\dots,m$.

Теорема 2. *Припустимо, що $r>p/2$, $\varphi_j\in\mathbf{Y}_j$ і виконується умова $\Delta_k\ne 0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$. Тоді з ймовірністю одиниця задача (1), (2) розв'язна і компоненти u_j її розв'язку $u=\operatorname{col}(u_1,\dots,u_m)$ задовольняють умови $\big\{\widetilde{D}^{q_j}u_j(t,\cdot),\widetilde{D}^{q_j-N}u_j'(t,\cdot)\big\}\subset\mathbf{X}_t$. Крім того, , якщо виконується умова $\min\limits_{k\in K}|\Delta_k(k)|>0$, то для довільного $\varepsilon\in(0,1)$ з ймовірністю $1-\varepsilon$ на множині $S_1\times\dots\times S_m$ задача (1), (2) розв'язна і справджуються оцінки*

$$\|(I-\Pi_k)U(t,\cdot);\mathbf{X}_t\|^2\le C_2^2\sum_{j=1}^m\|\varphi_j;\mathbf{Y}_j\|^2,$$
$$\|\widetilde{D}^{-N}(I-\Pi_k)U'(t,\cdot);\mathbf{X}_t\|^2\le\quad(18)$$
$$\le\mathcal{A}^2C_2^2\sum_{j=1}^m\|\varphi_j;\mathbf{Y}_j\|^2,$$

де $C_2 = \varepsilon^{1/2(\beta-1)} 4^m (2T\mathcal{A})^{(m-1)m} C_1 R_1 \cdots R_m$.

ДОВЕДЕННЯ. Якщо $\Delta_k \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, то для функцій U_k справджуються оцінки (6), (7). Із формули (16) і леми Бореля–Кантеллі [14, с. 13] випливає, що ймовірність нескінченності множини $\{k \in \mathbb{Z}^p \colon |\Delta_k(k)| < C\widetilde{k}^{-r}\}$ дорівнює нулеві. Отже, з ймовірністю одиниця виконуються протилежні нерівності $|\Delta_k(k)| \geq C\widetilde{k}^{-r}$ для всіх великих $\widetilde{k}$. Підставляючи останні оцінки у формули (6), (7), отримуємо включення

$$\left\{\widetilde{D}^{q_j} u_j(t,\cdot), \widetilde{D}^{q_j-N} u_j'(t,\cdot)\right\} \subset \mathbf{X}_t$$

за умови $\varphi_j \in \mathbf{Y}_j$, де $j = 1, \ldots, m$.

З ймовірністю $1-\varepsilon$ виконуються оцінки знизу (17) на множині $\mathbb{Z}^p \setminus K$, тому на цій множині з ймовірністю $1-\varepsilon$ і отримуємо рівномірну оцінку (18) на основі формул (6), (7) та (17). ∎

6. Висновки. Отже, у роботі встановлено розв'язність з ймовірністю одиниця, щодо параметрів у нелокальній умові (2), задачі з двоточковою нелокальною умовою для анізотропної системи рівннь з частинними похідними (1) зі сталими коефіцієнтами у шкалі гільбертових просторів 2π-періодичних за просторовими змінними функцій. Особливістю рівнянь є шукана функція зі зміщеними значеннями векторного (просторового) аргументу x. Задача пов'язана з проблемою малих знаменників і є некоректною щодо параметрів задачі. Для малих знаменників встановлено оцінки знизу за допомогою метричного підходу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. – Минск: Университетское, 1988. – 232 с.

2. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 352 с.

3. *Мышкис А. Д.* О некоторых проблемах теории уравнений с отклонющимся аргументом // Успехи мат. наук. – 1977. – Т. 32, вып. 2. — С. 173—202.

4. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Наука, 1970. – 310 с.

5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 422 с.

6. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулрные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.

7. *Przeworska-Rolewicz D.* Equations with transformed argument an alebraic approach. – Warszawa: PWN, 1973. – 354 c.

8. *Ільків В. С.* Розв'язність нелокальної задачі для систем рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргументів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2010. – Вип. 21. – С. 72–85.

9. *Ільків В. С.* Розв'язність нелокальної задачі для лінійних неоднорідних рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргументів // Вісник нац. ун-ту „Львівська політехніка". Сер. фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 718. – С. 46–53.

10. *Ильків В. С.* Разрешимость нелокальных задач для уравнений с частными производными со сдвинутыми аргументами. – Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. С. Л. Соболева. – Новосибирск, 2008. – С. 142.

11. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Задача з інтегральними умовами для для лінійної системи рівнянь із частинними похідними з відхиленнм аргументу // Матем. вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. — С. 414—427.

12. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для нормальних анізотропних систем із частинними похідними і сталими коефіцієнтами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 96–107.

13. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для систем із частинними похідними в анізотропних просторах // Нелинейные граничные задачи. – 2001. – Вып. 11. – С. 57–64.

14. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук.думка, 1984. – 264 с.

15. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

16. *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1624–1650.

17. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – Вып. 3. – 274 с.

18. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

19. *Власій О. Д., Пташник Б. Й.* Нелокальна крайова задача для лінійних рівнянь з частинними похідними, нерозв'язних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2007. – **5**, № 3. – С. 370–381.