УДК 517.925

©2012 р. С.А. Іліка, Л.А. Піддубна, І.М. Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО НАБЛИЖЕННЯ НЕАСИМПТОТИЧНИХ КОРЕНІВ КВАЗІПОЛІНОМІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ ІЗ БАГАТЬМА ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТУ

Для наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференцціально-різницевих рівнянь нейтрального типу з багатьма відхиленнями аругменту запропоновано обчислювальну схему підвищеної точності.

The scheme of higher accuracy of approximated finding of nonasymptotic roots quasi-polynomials of linear differential-difference neutral equations with many derivations argument is constructed and investigated.

Вступ. При дослідженні стійкості, осциляції, біфуркації розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь важливу роль відіграє розміщення коренів відповідних квазіполіномів.

Аналіз розміщення нулів квазіполіномів досліджувався в роботах [1–3] для встановлення умов стійкості розв'язків відповідних диференціальних рівнянь із запізненням.

При дослідженні схем апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь [4–6] виявилося, що наближення неасимптотичних коренів їх квазіполіномів можна знаходити за допомогою характеристичних многочленів відповідних апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь. У даній роботі досліджується застосування схеми апроксимації підвищеної точності для побудови алгоритму наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу з багатьма відхиленнями аргументу.

1. Допоміжні твердження

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння з багатьма відхиленнями аргументу вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{n} A_i x(t-\tau_i) + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{dx(t-\tau_i)}{dt}, \tag{1}$$

де A_i, B_i, $i=\overline{0,n}$ – сталі, $0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_n=\tau$.

При дослідженні рівняння (1) важливе значення має розміщення нулів його характеристичного квазіполінома

$$\Phi(\lambda) = \lambda - \sum_{i=0}^{n} A_i e^{-\lambda\tau_i} - \lambda\sum_{i=1}^{n} B_i e^{-\lambda\tau_i} = 0. \tag{2}$$

Апроксимуюча система звичайних диференціальних рівнянь підвищеної точності для рівняння (1) має вигляд [6]:

$$\frac{dz_0(t)}{dt} = \sum_{j=0}^{n} A_j z_{l_j}(t) + \sum_{j=1}^{n} B_j z_{l_j+m}(t),$$

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = z_{i+m}(t), \tag{3}$$

$$\frac{dz_{i+m}(t)}{dt} = 2\mu^2\left[z_{i-1}(t)-z_i(t)\right] - 2\mu z_{i+m}(t),$$

$$i=1,\ldots,m, \mu=\frac{m}{\tau}, l_j=[\frac{m\tau_j}{\tau}].$$

Покажемо, що при $m\to\infty$ корені характеристичного многочлена системи (3) апроксимують неасимптотичні корені квазіполінома (2).

Для знаходження аналітичного вигляду характеристичного многочлена системи звичайних диференціальних рівнянь (3) розглянемо спочатку випадок рівняння з двома відхиленнями аргументу.

Випишемо характеристичне рівняння системи (3) при $n=2$, покладаючи $k=[\frac{m\tau_1}{\tau_2}]$:

$$D^2_{2m+1}(\lambda) =$$

$$
= \begin{vmatrix}
A_0-\lambda & \dots & 0 & A_2 & 0 & \dots & B_2 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 1 \\
2\mu^2 & \dots & 0 & 0 & -2\mu-\lambda & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & \dots & -2\mu-\lambda
\end{vmatrix}. \qquad (4)
$$

Лема 1. *Для характеристичного рівняння (4) справджується рівність*

$$
D^2_{2m+1}(\lambda) = (A_0-\lambda)\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m})\right]^m +
$$

$$
+A_1\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m})\right]^{m-k} + \qquad (5)
$$

$$
+A_2+B_1\lambda\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m})\right]^{m-k} + B_2\lambda = 0.
$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції. Перевіримо, що при $m=2$ рівність (5) має місце. Дійсно,

$$
D^2_5(\lambda) =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
A_0-\lambda & A_1 & A_2 & B_1 & B_2 \\
0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\
2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & -2\mu-\lambda & 0 \\
0 & 2\mu^2 & -2\mu^2 & 0 & -2\mu-\lambda
\end{vmatrix} =
$$

$$
= (A_0-\lambda)I_0^2 - A_1 I_1^2 + A_2 I_2^2 - B_1 I_3^2 + B_2 I_4^2 = 0 \qquad (6)
$$

Розкриваючи окремо кожний із визначників $I_0^2,\ I_1^2,\ I_2^2, I_3^2,\ I_4^2$, маємо

$$
\begin{aligned}
&I_0^2 = [\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2]^2,\\
&I_1^2 = -2\mu^2[\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2],\\
&I_2^2 = (2\mu^2)^2,\\
&I_3^2 = -2\mu^2[\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2]\lambda,\\
&I_4^2 = (2\mu^2)^2\lambda.
\end{aligned}
$$

Підставляючи значення $I_0^2,\ I_1^2, I_2^2, I_3^2, I_4^2$ у рівність (6) і враховуючи , що $\mu = \frac{m}{\tau}$, переконуємось, що рівність (5) при $m=2$ правильна.

Припустимо, що для деякого $m-1$ рівність (6) вірна, тобто

$$
D^2_{2m-1}(\lambda) = (A_0-\lambda)\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m})\right]^{m-1} +
$$

$$
+A_1\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m})\right]^{m-k-1} + \qquad (7)
$$

$$
+A_2+B_1\lambda\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m})\right]^{m-k-1} + B_2\lambda = 0.
$$

Покажемо, що вона має місце і для m.

Визначник у співвідношенні (4) розкриваємо за першим рядком. Маємо

$$
D^2_{2m+1}(\lambda) = (A_0-\lambda)I_0^m + (-1)^{k+2}A_1 I_1^m +
$$

$$
+(-1)^{m+2}A_2 I_2^m + (-1)^{k+m+2}B_1 I_3^m +
$$

$$
+(-1)^{2m+2}B_2 I_4^m = 0.
$$

Для визначників $I_0^m,\ I_1^m,\ I_2^m\ I_3^m,\ I_4^m$ можна одержати рекурентні співвідношення

$$
\begin{aligned}
&I_0^m = [\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2]I_0^{m-1},\\
&I_1^m = (-1)^{k+2}2\mu^2[\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2]I_1^{m-1},\\
&I_2^m = (-1)^{m+2}2\mu^2 I_2^{m-1},\\
&I_3^m = (-1)^{m+k+2}2\mu^2[\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2]\lambda I_3^{m-1},\\
&I_4^m = (-1)^{2m+2}2\mu^2\lambda I_4^{m-1}.
\end{aligned} \qquad (8)
$$

Із рекурентних співвідношень (8) безпосередньо знаходимо:

$$
\begin{aligned}
&I_0^m = [\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2]^m,\\
&I_1^m = (-1)^{k+2}(2\mu^2)^k[\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2]^{m-k},\\
&I_2^m = (-1)^{m+2}(2\mu^2)^m,\\
&I_3^m = (-1)^{m+k+2}(2\mu^2)^k[\lambda(2\mu+\lambda)+2\mu^2]^{m-k}\lambda,\\
&I_4^m = (-1)^{2m+2}(2\mu^2)^m\lambda.
\end{aligned} \qquad (9)
$$

Використовуючи індуктивне припущення (7), співвідношення (9) і позначення $\mu = \frac{m}{\tau}$, одержуємо рівність

$$
D^2_{2m+1}(\lambda) = (A_0-\lambda)\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m})\right]^m +
$$

$$
+A_1\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m})\right]^{m-k} + A_2 +
$$

$$
+B_1\lambda\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m})\right]^{m-k} + B_2\lambda = 0.
$$

Лема 1 доведена.

Розглянемо тепер характеристичне рівняння системи (3) при довільному $n \in \mathbb{N}$.

Лема 2. *Для характеристичного рівняння системи (3) справджується рівність*

$$
D^n_{2m+1}(\lambda) = (A_0-\lambda)\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^m +
$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1} A_i\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{m-l_i}+ \qquad (10)$$

$$+A_n+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda B_i\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{m-l_i}+$$

$$+\lambda B_n=0.$$

Доведення леми 2 нескладно одержати, використовуючи метод математичної індукції і техніку доведення леми 1.

2. Наближення неасимптотичних коренів квазіполінома

Лема 3. *Для фіксованих $\lambda\in\mathbb{Z}$ послідовність функцій*

$$H_m(\lambda)=\frac{D^n_{2m+1}(\lambda)}{(1+\frac{\lambda\tau}{m}(1+\frac{\lambda\tau}{2m}))^m}, m\in\mathbb{N}, \qquad (11)$$

збігається при $m\to\infty$ до квазіполінома (2).

Доведення. Розгляне фіксоване $\lambda\in\mathbb{Z}$. Тоді $\lambda\neq-\frac{m}{\tau}\pm\frac{m}{\tau}i$ за можливим винятком одного значення m. Отже, функція $H_m(\lambda)$ визначена для всіх $m\in\mathbb{N}$ за можливим винятком одного $m\in\mathbb{N}$.

Враховуючи рівність (11), маємо

$$H_m(\lambda)=(A_0-\lambda)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1} A_i\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-l_i}+$$

$$+A_n\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-m}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda B_i\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-l_i}+$$

$$+\lambda B_n\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-m}=0. \qquad (12)$$

На підставі відомих границь

$$\lim_{m\to\infty}(1+\frac{\lambda\tau}{m}+\frac{\lambda^2\tau^2}{2m^2})^{-m}=e^{-\lambda\tau},$$

$$\lim_{m\to\infty}(1+\frac{\lambda\tau}{m}+\frac{\lambda^2\tau^2}{2m^2})^{\frac{-\tau_i m}{\tau}}=e^{-\lambda\tau_i}$$

та означення числа l_i одержуємо рівність

$$\lim_{m\to\infty}((A_0-\lambda)+\sum_{i=1}^{n-1} A_i\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-l_i}+$$

$$+A_n\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-m}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda B_i\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-l_i}+$$

$$+\lambda B_n\left[1+\frac{\lambda\tau}{m}\left(1+\frac{\lambda\tau}{2m}\right)\right]^{-m})=$$

$$=A_0-\lambda+\sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\lambda\tau_i}+A_n e^{-\lambda\tau}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda B_i e^{-\lambda\tau_i}+\lambda B_n e^{-\lambda\tau}.$$

Отже, переходячи в рівності (12) до границі при $m\to\infty$, для фіксованого $\lambda\in\mathbb{Z}$, одержимо

$$\lim_{m\to\infty}H_m(\lambda)=\lambda-\sum_{i=0}^{n}A_i e^{-\lambda\tau_i}-\lambda\sum_{i=1}^{n}B_i e^{-\lambda\tau_i}.$$

Лема 3 доведена.

Зауваження. Оскільки нулі функцій $D^n_{2m+1}(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно рівності (11), збігаються, то корені характеристичного многочлена (10) можна брати в якості наближених значень неасимптотичних коренів квазіполінома (2).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Dickson D.G.* Asymptotic distribution of exponential sums // Publ. Math. Debrecen, 1964. – N 11. – P. 297-300.

2. *Gopalsamy K.* Stability and Oscillation in delay differential equations of population dynamics. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. – V. 74. – 501 p.

3. *Баркин А.И.* Об устойчивости линейных систем с запаздыванием // Доклады РАН. – 2006. – 406, № 6. – С. 476-478.

4. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. – 2004. – 7, № 2. – с. 208-216.

5. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2007. – 10, № 3. – с. 329-335.

6. *Пернай С.А.* Схема підвищеної точності наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. – Чернівці: Рута, 2010. – Вип. 528. Математика. – С. 111-114.