УДК 517.929

©2012 р. І.М. Данилюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ ЗІ СТАЛИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Доведено нові теореми обгрунтування методу усереднення за швидкими змінними крайової задачі для багаточастотної нелінійної системи зі сталим запізненням. Встановлено якісні оцінки відхилень розв'язків вихідної та усередненої задач.

New theorems on the substantiation of averaging method by all fast variables of the boundary value problem for multifrequency nonlinear system with the constant delay have been proved. Qualitative estimations of solutions of initial and averaged boundary value problems have been estabhshed.

Метод усереднення застосовується до диференціальних рівнянь в різних функціональних просторах, в тому числі і до рівнянь з запізненням. Суть методу полягає в заміні вихідних рівнянь простішими, які називаються усередненими. Природнім в даному випадку є питання про оцінку відхилення розв'язків вихідної та усередненої систем. Важливим також є дослідження існування розв'язку вихідної системи та оцінка його відхилення від розв'язку усередненої системи. Досліджувалось це питання для різних класів диференціальних рівнянь у працях [1-6].

У даній статті встановлено достатні умови ефективного застосування методу усереднення за швидкими змінними до крайової задачі для багаточастотної нелінійної коливної системи із запізненням в повільних та швидких змінних.

1. Постановка задачі та основні припущення. Розглянемо багаточастотну нелінійну коливну систему диференціальних рівнянь із запізненням

$$\frac{dx}{d\tau}=a(\tau,x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\varepsilon), \qquad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+b(\tau,x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\varepsilon) \qquad (2)$$

та крайовими умовами вигляду

$$M_1(\tau)x(\tau)+N_1(\tau)x(L)=f(\tau), \tau\in[-\Delta,0], \qquad (3)$$

$$M_2(\tau)\varphi(\tau)+N_2(\tau)\varphi(L)=g(\tau), \tau\in[-\Delta,0], \qquad (4)$$

де $x=x(\tau,\varepsilon), \varphi=\varphi(\tau,\varepsilon), x_\Delta=x(\tau-\Delta,\varepsilon), \varphi_\Delta=\varphi(\tau-\Delta,\varepsilon), \Delta=const>0, [\varepsilon_0,0)\ni\varepsilon$ - малий параметр, $\varepsilon_0\ll 1$, $x\in D\subset R^n, \varphi\in R^m$, D – обмежена область в R^n, $\tau=\varepsilon t\in[0,L]$, $L=const>0$; $M_1(\tau),N_1(\tau)$ – неперервні на $[-\Delta,L]$ $n\times n$ матриці; $M_2(\tau),N_2(\tau)$ – неперервні на $[-\Delta,L]$ $m\times m$ матриці; $f(\tau)$, $g(\tau)$ – неперевні вектор-функції розмірності n i m відповідно на $[-\Delta,L]$; a – вектор-функція розмірності n; b і ω – вектор-функції розмірності m.

Для системи (1) - (2) характерні резонансні явища, що значно ускладнюють її дослідження [1, 2]. В точці $\tau\in(\Delta,L]$ для (1) - (2) умова резонансу враховує запізнення в швидких змінних і набуває вигляду

$$\gamma_{kl}(\tau)=(k,\omega(\tau))+(l,\omega(\tau-\Delta))=0,$$

де $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в R^m, $\|k\|+\|l\|\neq 0$, $\|k\|=|k_1|+|k_2|+...+|k_m|$, k і l – вектори з цілочисельними координатами.

Для $\tau\in[0,\Delta]$ умова резонансу не враховує запізнень у швидких змінних і записується у вигляді

$$(k,\omega(\tau))=0,$$

в якій $\|k\|\neq 0$, $\|k\|=|k_1|+|k_2|+...+|k_m|$.

Припустимо, що виконуються наступні умови.

1) $\omega(\tau)\in C^{q-1}_{[0,L]}$, $q\geq 2m$ і в кожній точці $\tau\in[0,L]$ відмінний від нуля хоч один мінор 2m-го порядку матриці $W(\tau)$, де $W(\tau)$ - матриця порядку $q\times 2m$ з елементами $W_{ij}(\tau)=$

$\omega_j^{(i-1)}(\tau)$, $\quad W_{i\,m+j}(\tau)=\omega_j^{(i-1)}(\tau-\Delta)$ для $j=\overline{1,m}$, $\quad i=\overline{1,q}$.

2) Вектор-функції $F(\tau,x,z,u,v,\varepsilon) = \{a(\tau,x,z,u,v,\varepsilon), b(\tau,x,z,u,v,\varepsilon)\}$ 2π-періодичні за кожною змінною u_ν, v_ν, $\nu = \overline{1,m}$ в області $G=[-\Delta,L]\times D\times D\times R^m\times R^m\times(0,\varepsilon_0]$.

3) $F\in C^2_{\tau,x,z}(G,\sigma_1)$, $F\in C^1_\varepsilon(G,\sigma_1)$.

4) Для коефіцієнтів $F_{kl}(\tau,x,z,\varepsilon)$ розкладу функції $F(\tau,x,z,u,v,\varepsilon)$ в ряд Фур'є

$$F(\tau,x,z,u,v,\varepsilon) = =\sum_{k,\,l} F_{kl}(\tau,x,z,\varepsilon)e^{i(k,\,u)+i(l,\,v)}$$

виконуються нерівності

$$\sum_{\|k\|+\|l\|\neq 0}\left[\left(1+\frac{1}{\|k\|+\|l\|}\right)\left(\sup_{\overline{G}_2}\left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial x}\right\|+ +\sup_{\overline{G}_2}\left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial z}\right\|\right)+\frac{1}{\|k\|+\|l\|}\left(\sup_{\overline{G}_2}\left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial x\partial\tau}\right\|+ +\sup_{\overline{G}_2}\left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial z\partial\tau}\right\|+\sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{\overline{G}_2}\left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial x\partial x_i}\right\|+ +\sup_{\overline{G}_2}\left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial x\partial z_i}\right\|+\sup_{\overline{G}_2}\left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial z\partial x_i}\right\|+ +\sup_{\overline{G}_2}\left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial z\partial z_i}\right\|\right)\right)\right]\leq\sigma_1,$$

$$\sum_{\|k\|+\|l\|\neq 0}(\|k\|+\|l\|)^\chi\left[\left(1+\frac{1}{\|k\|+\|l\|}\right)\sup_{\overline{G}_2}\|F_{kl}\|+ +\frac{1}{\|k\|+\|l\|}\left(\sup_{\overline{G}_2}\left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial\tau}\right\|+\sup_{\overline{G}_2}\left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial x}\right\|+ +\sup_{\overline{G}_2}\left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial z}\right\|\right)\right]\leq\sigma_1$$

для $\chi=\{0,1\}$, $\overline{G}_2=[-\Delta,L]\times D\times D\times(0,\varepsilon_0]$.

5) $\det M_1(\tau)\neq 0$, $\det M_2(\tau)\neq 0$ $\forall\tau\in[-\Delta,L]$.

При виконанні умови 1) з використанням теореми Лапласа [7] одержуємо, що в кожній точці $\tau\in[0,L]$ існує відмінний від нуля хоч один мінор m-го порядку матриці $V(\tau)$, де $V(\tau)$ - матриця порядку $p\times m$ з елементами $V_{ij}(\tau)=\omega_j^{(i-1)}(\tau)$ для $j=\overline{1,m}$, $\quad i=\overline{1,p}$. Тоді для осциляційного інтеграла

$$I_k(\tau,\varepsilon)=\int_0^\tau f_k(y,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^y(k,\omega(z))dz\right\}dy$$

справедлива оцінка [1]

$$\|I_k(\tau,\varepsilon)\|\leq\sigma_2\varepsilon^\beta\left(\left(1+\frac{1}{\|k\|}\right)\sup_{G_3}\|f_k(\tau,\varepsilon)\|+ +\frac{1}{\|k\|}\sup_{G_3}\left\|\frac{df_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau}\right\|\right), \qquad (5)$$

де $f_k(\tau,\varepsilon)\in C^1_\tau([0,L])$, $\tau\in[0,L]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\|k\|\neq 0$, $G_3=[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$, $\beta=1/q$, $q\geq 2m$; стала σ_2 не залежить від k,τ,ε.

Виконання умови 1) для осциляційного інтеграла, побудованого для функції $f_{kl}(\tau,\varepsilon)\in C^1_\tau([0,L])$,

$$I_{kl}(\tau,\varepsilon)=\int_0^\tau f_{kl}(s,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s\gamma_{kl}(z)dz\right\}ds$$

дає можливість аналогічно як і в [1-3] одержати оцінку для всіх $\|k\|+\|l\|\neq 0$, $\tau\in[0,L]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $G_3=[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$

$$\|I_{kl}(\tau,\varepsilon)\|\leq\sigma_2\varepsilon^\beta\left(\left(1+\frac{1}{\|k\|+\|l\|}\right)\sup_{G_3}\|f_{kl}(\tau,\varepsilon)\|+ +\frac{1}{\|k\|+\|l\|}\sup_{G_3}\left\|\frac{df_{kl}(\tau,\varepsilon)}{d\tau}\right\|\right) \qquad (6)$$

зі сталою σ_2, незалежною від k,l,τ,ε.

Надалі задачу (1) - (4) розумітимемо як задачу з двома невідомими параметрами μ_1 та μ_2. Нехай $\{x(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon),\varphi(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon),\mu_1,\mu_2\}$ – розв'язок задачі (1) - (4) такий, що $x(L,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)=\mu_1$ і $\varphi(L,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)=\mu_2$. Тоді задача зводиться до відшукання невідомих параметрів μ_1 та μ_2. Справді, із крайових умов (3) - (4) при виконанні умови 5) та існуванні μ_1 та μ_2 отримаємо початкові значення

$$\begin{gathered}F(\tau,\mu_1)=M_1^{-1}(\tau)(f(\tau)-N_1(\tau)\mu_1),\\ G(\tau,\mu_2)=M_2^{-1}(\tau)(g(\tau)-N_2(\tau)\mu_2),\\ \tau\in[-\Delta,0].\end{gathered} \qquad (7)$$

для розв'язку $\{x(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon),\varphi(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon),\mu_1,\mu_2\}$.

Тому задачу (1), (2) з крайовими умовами (3), (4) будемо розглядати як початкову з початковими умовами (7) і невідомими параметрами μ_1 та μ_2.

При виконанні умов 3), 5) $x(\tau,\mu_1,\mu_2)$, $\varphi(\tau,\mu_1,\mu_2)$ – неперервно - диференційовні по μ_1,μ_2.

З рівностей

$$x(\tau,\mu_1,\mu_2)=M_1^{-1}(0)(f(0)-N_1(0)\mu_1)+$$

$$+\int_0^\tau a(\tau,x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\varepsilon)dt,$$

$$\varphi(\tau,\mu_1,\mu_2)=M_2^{-1}(0)(g(0)-N_2(0)\mu_2)+$$

$$+\int_0^\tau\left(\frac{\omega(t)}{\varepsilon}+b(\tau,x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\varepsilon)\right)dt$$

із використанням леми Гроноулла-Беллмана [8] одержимо оцінку

$$\left\|\frac{\partial x}{\partial\mu_1}\right\|+\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}\right\|+\left\|\frac{\partial x}{\partial\mu_2}\right\|+\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2}\right\|\le c,$$

де $c=\left(M_1^{-1}(0)N_1(0)+M_2^{-1}(0)N_2(0)\right)e^{4\sigma_1(L+\Delta)}$, $x=x(t,\mu_1,\mu_2)$, $x_\Delta=x(t-\Delta,\mu_1,\mu_2)$, $\varphi=\varphi(t,\mu_1,\mu_2)$, $\varphi_\Delta=\varphi(t-\Delta,\mu_1,\mu_2)$.

Дослідимо далі методом усереднення існування та єдиність розв'язку задачі (1) - (4).

2. Усереднення крайової задачі. Усереднимо вихідну задачу (1) - (4) за швидкими змінними

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau}=\overline{a}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,0), \tag{8}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+\overline{b}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,0), \tag{9}$$

$$M_1(\tau)\overline{x}(\tau)+N_1(\tau)\overline{x}(L)=f(\tau),\ \tau\in[-\Delta,0], \tag{10}$$

$$M_2(\tau)\overline{\varphi}(\tau)+N_2(\tau)\overline{\varphi}(L)=g(\tau),\ \tau\in[-\Delta,0], \tag{11}$$

де

$$\overline{c}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,0)=\{\overline{a}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,0),\overline{b}(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,0)\}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(2\pi)^m}\displaystyle\int_0^{2\pi}\!\!\dots\!\int_0^{2\pi}c(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\varphi,\overline{G}(\tau,\mu_2),0)d\varphi,\ \tau\in[0,\Delta],\\ \dfrac{1}{(2\pi)^{2m}}\displaystyle\int_0^{2\pi}\!\!\dots\!\int_0^{2\pi}c(\tau,\overline{x},\overline{x}_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,0)d\varphi d\varphi_\Delta,\ \tau\in(\Delta,L],\end{cases}$$

$c(\tau,x,y,v,u,\varepsilon)=\{a(\tau,x,y,v,u,\varepsilon),b(\tau,x,y,v,u,\varepsilon)\}$.

3. Допоміжні твердження. При виконанні умови 5) справедливі рівності

$$\mu_1^0=M_1^{-1}(0)(f(0)-N_1(0)\mu_1^0)+$$

$$+\int_0^L\overline{a}(t,\overline{x}(t,\mu_1^0,\mu_2^0),\overline{x}(t-\Delta,\mu_1^0,\mu_2^0),0)dt, \tag{12}$$

$$\mu_2^0=M_2^{-1}(0)(g(0)-N_2(0)\mu_2^0)+\int_0^L\Big(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+$$

$$+\overline{b}(t,\overline{x}(t,\mu_1^0,\mu_2^0),\overline{x}(t-\Delta,\mu_1^0,\mu_2^0),0)\Big)dt, \tag{13}$$

де $\mu_1^0=\overline{x}(L,\mu_1^0,\mu_2^0),\mu_2^0=\overline{\varphi}(L,\mu_1^0,\mu_2^0)$.

Лема 1. *Нехай для деяких $\rho_1>0$, $\rho_2>0$, $\rho_3>0$ існує єдиний розв'язок (μ_1^0,μ_2^0) системи рівнянь (12), (13). Крива $\overline{x}=\overline{x}(\tau,\mu_1^0,\mu_2^0)$ $\forall\tau\in[0,L]$ лежить в $D\subset R^n$, $D\ne\emptyset$, разом із своїм ρ_1-околом, $B_{\rho_2}(\mu_1^0)\subset D$, $B_{\rho_3}(\mu_2^0)\subset R^m$, де $B_{\rho_2}(\mu_1^0)$, $B_{\rho_3}(\mu_2^0)$ – відкриті кулі в R^n та R^m радіуса ρ_2 та ρ_3 з центром в точці μ_1^0 та μ_2^0 відповідно. Тоді задача (8)-(11) має єдиний розв'язок $\{\overline{x}(\tau,\mu_1^0,\mu_2^0),\overline{\varphi}(\tau,\mu_1^0,\mu_2^0,\varepsilon),\mu_1^0,\mu_2^0\}$.*

Доведення.

Справді, при відомих значеннях μ_1^0,μ_2^0 легко знаходяться розв'язки

$$\overline{x}(\tau,\mu_1^0,\mu_2^0)=\overline{F}(0,\mu_1^0)+$$

$$+\int_0^\tau\overline{a}(t,\overline{x}(t,\mu_1^0,\mu_2^0),\overline{x}(t-\Delta,\mu_1^0,\mu_2^0),0)dt, \tag{14}$$

$$\overline{\varphi}(\tau,\mu_1^0,\mu_2^0,\varepsilon)=\overline{G}(0,\mu_2^0)+\int_0^\tau\Big(\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+$$

$$+\overline{b}(t,\overline{x}(t,\mu_1^0,\mu_2^0),\overline{x}(t-\Delta,\mu_1^0,\mu_2^0),0)\Big)dt. \tag{15}$$

Лема 2. *Нехай виконується умова 3). Тоді для всіх $\tau\in[0,L],\mu_1^0\in D$, $\mu_2^0\in R^m,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ справедлива оцінка*

$$\left\|\frac{\partial\overline{x}(\tau,\mu_1^0,\mu_2^0)}{\partial\mu_1^0}\right\|+\left\|\frac{\partial\overline{x}(\tau,\mu_1^0,\mu_2^0)}{\partial\mu_2^0}\right\|+$$

$$+\left\|\frac{\partial\overline{\varphi}(\tau,\mu_1^0,\mu_2^0,\varepsilon)}{\partial\mu_1^0}\right\|+\left\|\frac{\partial\overline{\varphi}(\tau,\mu_1^0,\mu_2^0,\varepsilon)}{\partial\mu_2^0}\right\|+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\left\|\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial\mu_1^0\partial\mu_{1i}^0}\right\|+\left\|\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial\mu_1^0\partial\mu_{2i}^0}\right\|+\right.$$
$$\left.+\left\|\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial\mu_2^0\partial\mu_{1i}^0}\right\|+\left\|\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial\mu_2^0\partial\mu_{2i}^0}\right\|\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\left\|\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\mu_1^0\partial\mu_{1i}^0}\right\|+\left\|\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\mu_1^0\partial\mu_{2i}^0}\right\|+\right.$$
$$\left.+\left\|\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\mu_2^0\partial\mu_{1i}^0}\right\|+\left\|\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\mu_2^0\partial\mu_{2i}^0}\right\|\right)\le c_1,$$

де $c_1 = c_1^{(0)} + c_1^{(1)} + 2\sigma_1(L+\Delta)c_1^{(0)} + \left(2\sigma_1(L+\Delta)c_1^{(1)} + \left\|M_2^{-1}(0)N_2(0)\right\|\right)e^{\Delta\sigma_1 c_0} + \left(4\sigma_1(L+\Delta)\left(\left(c_1^{(0)}\right)^2 + 2c_1^{(0)}c_1^{(1)} + \left(c_1^{(1)}\right)^2\right) + \right.$ $\left. + 4\sigma_1\Delta c_0\right)(1 + (1+2\sigma_1(L+\Delta))e^{2\sigma_1(L+\Delta)})$, $c_1^{(0)} = \sigma_1 c_0\left\|M_1^{-1}(0)N_1(0)\right\|\exp\{2\sigma_1(L+\Delta)\}$, $c_1^{(1)} = \Delta\sigma_1 c_0\exp\{2\sigma_1(L+\Delta)\}$.

Доведення леми 2 проводиться шляхом диференціювання рівностей (14) і (15) та подальшою оцінкою з використанням леми Гронуолла-Беллмана.

Теорема 1. *Нехай*

1) *існує розв'язок $\{x(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon), \varphi(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)\}$ задачі (1) - (4) такий, що $x(L,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)=\mu_1$ і $\varphi(L,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)=\mu_2$;*

2) *існує розв'язок усередненої задачі (12) - (15) $\{\bar{x}(\tau,\mu_1,\mu_2), \bar{\varphi}(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)\}$, для якого $\bar{x}(L,\mu_1,\mu_2)=\mu_1$ і $\bar{\varphi}(L,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)=\mu_2$;*

3) *виконуються умови 1) - 5) основних припущень.*

Тоді

$$\|x(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)-\bar{x}(\tau,\mu_1,\mu_2)\|+$$
$$+\|\varphi(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)-\bar{\varphi}(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)\|\le\sigma_3\varepsilon^\beta. \quad (16)$$

Доведення. Оскільки $x(L,\mu_1,\mu_2,\varepsilon) = \bar{x}(L,\mu_1,\mu_2)=\mu_1$, то із крайових умов для x та $\bar{x}$ отримуємо, що $x(0)=\bar{x}(0)$. Нехай $\tau\in(\Delta,L]$. Тоді, враховуючи зображення розв'язків, одержимо

$$\|x(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)-\bar{x}(\tau,\mu_1,\mu_2)\|\le$$
$$\le\left\|\int_0^\tau\tilde{a}(t,x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\mu,\varepsilon)dt\right\|+$$
$$+\left\|\int_0^\tau\left(\bar{a}(t,x,x_\Delta,\mu,\varepsilon)-\bar{a}(t,\bar{x},\bar{x}_\Delta,\mu,\varepsilon)\right)dt\right\|+$$
$$+\left\|\int_0^\tau\left(\bar{a}(t,\bar{x},\bar{x}_\Delta,\mu,\varepsilon)-\bar{a}(t,\bar{x},\bar{x}_\Delta,\mu,0)\right)dt\right\|\equiv$$
$$\equiv I_1+I_2+I_3,$$

де $\tilde{a}(t,x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\mu,\varepsilon) = a(t,x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\varepsilon) - a(t,x,x_\Delta,\mu,\varepsilon)$, $x = x(t,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)$, $\varphi = \varphi(t,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)$, $x_\Delta = x(t-\Delta,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)$, $\varphi_\Delta = \varphi(t-\Delta,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)$, $\bar{x}=\bar{x}(t,\mu_1,\mu_2)$, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(t,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)$, $\bar{x}_\Delta = \bar{x}(t-\Delta,\mu_1,\mu_2)$, $\bar{\varphi}_\Delta = \bar{\varphi}(t-\Delta,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)$, $\mu=(\mu_1 \quad \mu_2)^T$.

Оцінимо кожний із доданків.

Із оцінок осциляційних інтегралів (5) і (6) одержуємо

$$I_1\le\left\|\int_0^\Delta\tilde{a}(t,x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\mu,\varepsilon)dt\right\|+$$
$$+\left\|\int_\Delta^\tau\tilde{a}(t,x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\mu,\varepsilon)dt\right\|\le 2\sigma_2\sigma_1(1+\sigma_1)\varepsilon^\beta,$$
$$I_2\le\int_{-\Delta}^{L}2\sigma_1\|x-\bar{x}\|dt,$$
$$I_3\le 2\sigma_1(L+\Delta)\varepsilon\le 2\sigma_1(L+\Delta)\varepsilon^\beta.$$

Отже,

$$\|x-\bar{x}\|\le(2\sigma_1(L+\Delta)+$$
$$+2\sigma_2\sigma_1(1+\sigma_1))\varepsilon^\beta+\int_{-\Delta}^{L}2\sigma_1\|x-\bar{x}\|dt.$$

З останньої нерівності, використовуючи лему Гронуолла-Беллмана, одержимо

$$\|x(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)-\bar{x}(\tau,\mu_1)\|\le\sigma_3^{(1)}\varepsilon^\beta$$

зі сталою $\sigma_3^{(1)} = (2\sigma_1(L+\Delta)+2\sigma_2\sigma_1(1+\sigma_1))e^{2\sigma_1(L+\Delta)}$.

Аналогічно одержимо оцінку

$$\|\varphi(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)-\bar{\varphi}(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)\|\le$$

$$\leq 2\sigma_2\sigma_1(1+\sigma_1)\varepsilon^\beta + \int\limits_{-\Delta}^{L} 2\sigma_1\|x-\bar{x}\|dt +$$

$$+ 2\sigma_1(L+\Delta)\varepsilon^\beta \leq (2\sigma_2\sigma_1(1+\sigma_1) +$$

$$+ 2\sigma_1(1+\sigma_3^{(1)})(L+\Delta))\varepsilon^\beta \equiv \sigma_3^{(2)}\varepsilon^\beta.$$

Із розглянутих оцінок випливає справедливість теореми зі сталою $\sigma_3 = \sigma_3^{(1)} + \sigma_3^{(2)}$ для $\tau \in (\Delta, L]$. Правильність нерівності (16) із знайденою сталою σ_3 при $\tau \in [0, \Delta]$ випливає із наведених вище міркувань, оскільки на цьому проміжку не враховується частина інтегралів, що може лише зменшити сталу σ_3, а не призвести до її збільшення.

Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1.*

Тоді

$$\left\|\frac{\partial(x-\overline{x})}{\partial\mu_1}\right\| + \left\|\frac{\partial(x-\overline{x})}{\partial\mu_2}\right\| +$$

$$+ \left\|\frac{\partial(\varphi-\overline{\varphi})}{\partial\mu_1}\right\| + \left\|\frac{\partial(\varphi-\overline{\varphi})}{\partial\mu_2}\right\| \leq \sigma_4 e^\beta, \quad (17)$$

де $x-\overline{x} = x(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon) - \overline{x}(\tau,\mu_1,\mu_2)$, $\varphi-\overline{\varphi} = \varphi(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon)$.

Доведення. Позначимо $\mu = (\mu_1 \ \ \mu_2)^T$. Нехай $\tau \in (\Delta, L]$.

Оцінимо $\left\|\dfrac{\partial(x-\bar{x})}{\partial\mu_1}\right\|$.

$$\left\|\frac{\partial(x-\bar{x})}{\partial\mu_1}\right\| \leq \left\|\int\limits_0^\tau \frac{\partial a}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial\mu_1} - \frac{\partial\bar{x}_\Delta}{\partial\mu_1}\right)d\tau\right\| +$$

$$+ \left\|\int\limits_0^\tau \frac{\partial\bar{x}}{\partial\mu_1}\left(\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial\bar{a}(\tau,x,x_\Delta,\mu,\varepsilon)}{\partial x}\right)d\tau\right\| +$$

$$+ \left\|\int\limits_0^\tau \frac{\partial\bar{x}}{\partial\mu_1}\left(\frac{\partial\bar{a}(\tau,x,x_\Delta,\mu,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial\bar{a}(\tau,\bar{x},\bar{x}_\Delta,\mu,\varepsilon)}{\partial\bar{x}}\right)d\tau\right\| +$$

$$+ \left\|\int\limits_0^\tau \frac{\partial a}{\partial x_\Delta}\left(\frac{\partial x_\Delta}{\partial\mu_1} - \frac{\partial\bar{x}_\Delta}{\partial\mu_1}\right)d\tau\right\| +$$

$$+ \left\|\int\limits_0^\tau \frac{\partial\bar{x}_\Delta}{\partial\mu_1}\left(\frac{\partial a}{\partial x_\Delta} - \frac{\partial\bar{a}(\tau,x,x_\Delta,\mu,\varepsilon)}{\partial x_\Delta}\right)d\tau\right\| +$$

$$+ \left\|\int\limits_0^\tau \frac{\partial\bar{x}_\Delta}{\partial\mu_1}\left(\frac{\partial\bar{a}(\tau,x,x_\Delta,\mu,\varepsilon)}{\partial x_\Delta} - \frac{\partial\bar{a}(\tau,\bar{x},\bar{x}_\Delta,\mu,\varepsilon)}{\partial\bar{x}_\Delta}\right)d\tau\right\| +$$

$$+ \left\|\int\limits_0^\tau \frac{\partial\bar{x}}{\partial\mu_1}\left(\frac{\partial\bar{a}(\tau,\bar{x},\bar{x}_\Delta,\mu,\varepsilon)}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial\bar{a}}{\partial\bar{x}}\right)d\tau\right\| +$$

$$+ \left\|\int\limits_0^\tau \frac{\partial\bar{x}_\Delta}{\partial\mu_1}\left(\frac{\partial\bar{a}(\tau,\bar{x},\bar{x}_\Delta,\mu,\varepsilon)}{\partial\bar{x}_\Delta} - \frac{\partial\bar{a}}{\partial\bar{x}_\Delta}\right)d\tau\right\| +$$

$$+ \left\|\int\limits_0^\tau \frac{\partial a}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}d\tau\right\| + \left\|\int\limits_0^\tau \frac{\partial a}{\partial\varphi_\Delta}\frac{\partial\varphi_\Delta}{\partial\mu_1}d\tau\right\| \equiv \sum_{i=1}^n I_i,$$

де похідні функцій a і $\bar{a}$ обчислені у точках $(\tau,x(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon), x(\tau-\Delta,\mu_1,\mu_2,\varepsilon), \varphi(\tau,\mu_1,\mu_2,\varepsilon), \varphi(\tau-\Delta,\mu_1,\mu_2,\varepsilon),\varepsilon)$ і $(\tau,\bar{x}(\tau,\mu_1,\mu_2), \bar{x}(\tau-\Delta,\mu_1,\mu_2),0)$ відповідно, а похідні $x,\bar{x},\varphi,\bar{\varphi}$ в тих самих точках, що й $x,\bar{x},\varphi,\bar{\varphi}$.

Із використанням оцінок осциляційних інтегралів (5), (6) та умови 4) одержимо

$$I_2 + I_5 + I_9 + I_{10} \leq 2(c_1+c)\sigma_1(1+\sigma_1)\sigma_2\varepsilon^\beta.$$

Оцінимо інші доданки. Маємо

$$I_1 + I_4 \leq \int\limits_{-\Delta}^{L} 2\sigma_1\left\|\frac{\partial(x-\bar{x})}{\partial\mu_1}\right\|d\tau,$$

$$I_3 + I_6 \leq 4c_1\sigma_1(L+\Delta)\|x-\bar{x}\| \leq \\ \leq 4c_1\sigma_1(L+\Delta)\sigma_3\varepsilon^\beta,$$

$$I_7 + I_8 \leq 2c_1L\sigma_1\varepsilon \leq 2c_1L\sigma_1\varepsilon^\beta.$$

Отже,

$$\left\|\frac{\partial(x-\bar{x})}{\partial\mu_1}\right\| \leq (4(c_1+c)\sigma_1(1+\sigma_1)\sigma_2 + \\ + 4c_1\sigma_1(L+\Delta)\sigma_3 + 2c_1L\sigma_1)\varepsilon^\beta + \\ + \int\limits_{-\Delta}^{L} 2\sigma_1\left\|\frac{\partial(x-\bar{x})}{\partial\mu_1}\right\|d\tau.$$

Використовуючи лему Гронуолла-Беллмана одержимо

$$\left\|\frac{\partial(x-\bar{x})}{\partial\mu_1}\right\| \leq \sigma_4^{(0)}\varepsilon^\beta,$$

де $\sigma_4^{(0)} = (4(c_1+c)\sigma_1(1+\sigma_1)\sigma_2 + 4c_1\sigma_1(L+\Delta)\sigma_3 + 2c_1L\sigma_1)\exp 2\sigma_1(L+\Delta)$.

Аналогічно перевіряємо, що

$$\left\|\frac{\partial(x-\bar{x})}{\partial\mu_2}\right\| \le \sigma_4^{(1)}\varepsilon^\beta, \left\|\frac{\partial(\varphi-\bar{\varphi})}{\partial\mu_1}\right\| \le \sigma_4^{(0)}\varepsilon^\beta,$$

$$\left\|\frac{\partial(\varphi-\bar{\varphi})}{\partial\mu_2}\right\| \le \sigma_4^{(1)}\varepsilon^\beta,$$

де $\sigma_4^{(1)} = (\sigma_4^{(0)} + 2\sigma_1(1+\sigma_1)c_0)$.

З одержаних вище нерівностей отримуємо правильність теореми зі сталою $\sigma_4 = 2(\sigma_4^{(0)} + \sigma_4^{(1)})$ при $\tau \in (\Delta, L]$. Якщо ж $\tau \in [0, \Delta]$, то проводячи аналогічні міркування одержуємо нерівність (17) зі сталою σ_4, що не перевищує знайдену на проміжку $(\Delta, L]$.

Теорему доведено.

4. Відхилення розв'язку усередненої крайової задачі від точного розв'язку. Позначимо

$$T=\begin{pmatrix} \frac{\partial\bar{x}(L,\mu_1^0,\mu_2^0)}{\partial\mu_1^0}-E_n & \frac{\partial\bar{x}(L,\mu_1^0,\mu_2^0)}{\partial\mu_2^0} \\ \frac{\partial\bar{\varphi}(L,\mu_1^0,\mu_2^0,\varepsilon)}{\partial\mu_1^0} & \frac{\partial\bar{\varphi}(L,\mu_1^0,\mu_2^0,\varepsilon)}{\partial\mu_2^0}-E_m \end{pmatrix},$$

де E_n і E_m – одиничні матриці розмірності n і m відповідно.

Теорема 3. *Нехай:*

1) *виконуються умови 1) – 5) та умови лем 1 і 2, теорем 1 і 2;*

2) $\det T \ne 0$.

Тоді можна вибрати такі сталі $\tilde{\varepsilon}_\circ > 0$, $\tilde{c} > 0$, що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\circ]$, $\varepsilon_\circ < \tilde{\varepsilon}_\circ$ задача (1) - (4) має единий розв'язок $\{x(\tau,\varepsilon), \varphi(\tau,\varepsilon)\}$, який задовольняє нерівність

$$\left\|x(\tau,\varepsilon) - \bar{x}(\tau,\mu_1^0,\mu_2^0)\right\| +$$

$$+\left\|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,\mu_1^0,\mu_2^0,\varepsilon)\right\| \le \tilde{c}\,\varepsilon^\beta \qquad (18)$$

$\forall(\tau,\varepsilon) \in [0,L] \times (0,\varepsilon_\circ]$.

Доведення. Розв'язок вихідної задачі (1) - (4) шукатимемо у вигляді

$$\big\{x(\tau,\mu_1^0+h_1,\mu_2^0+h_2,\varepsilon), \varphi(\tau,\mu_1^0+h_1,\mu_2^0+h_2,\varepsilon),$$

$$\mu_1^0+h_1, \mu_2^0+h_2\big\},$$

де h_1 і h_2 – деякі невідомі параметри. Для знаходження h_1 і h_2 скористаємось рівностями

$$\begin{cases} x(L,\mu_1^0+h_1,\mu_2^0+h_2,\varepsilon) = \mu_1^0+h_1, \\ \varphi(L,\mu_1^0+h_1,\mu_2^0+h_2,\varepsilon) = \mu_2^0+h_2, \end{cases}$$

з яких в результаті алгебраїчних перетворень одержимо

$$\begin{cases} x-\bar{x}+X^{(1)}(h) = h_1 - \\ \quad -\frac{\partial\bar{x}(L,\mu_1^0,\mu_2^0)}{\partial\mu_1^0}h_1 - \frac{\partial\bar{x}(L,\mu_1^0,\mu_2^0)}{\partial\mu_2^0}h_2, \\ \varphi-\bar{\varphi}+X^{(2)}(h) = h_2 - \\ \quad -\frac{\partial\bar{\varphi}(L,\mu_1^0,\mu_2^0,\varepsilon)}{\partial\mu_1^0}h_1 - \frac{\partial\bar{\varphi}(L,\mu_1^0,\mu_2^0,\varepsilon)}{\partial\mu_2^0}h_2, \end{cases}$$

де

$$X^{(1)}(h) =$$

$$= h\int_0^1\left(\frac{\partial\bar{x}(L,\mu^0-\alpha h)}{\partial\mu} - \frac{\partial\bar{x}(L,\mu^0)}{\partial\mu}\right)d\alpha,$$

$$X^{(2)}(h) =$$

$$= h\int_0^1\left(\frac{\partial\bar{\varphi}(L,\mu^0-\alpha h)}{\partial\mu} - \frac{\partial\bar{\varphi}(L,\mu^0)}{\partial\mu}\right)d\alpha.$$

$\mu = (\mu_1\ \mu_2)^T$, $\mu^0 = (\mu_1^0\ \mu_2^0)^T$, $h = (h_1\ h_2)^T$, $x = x(L,\mu_1^0+h_1,\mu_2^0+h_2,\varepsilon)$, $\bar{x} = \bar{x}(L,\mu_1^0+h_1,\mu_2^0+h_2,\varepsilon)$, $\varphi = \varphi(L,\mu_1^0+h_1,\mu_2^0+h_2,\varepsilon)$, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(L,\mu_1^0+h_1,\mu_2^0+h_2,\varepsilon)$.

Тоді для знаходження невідомих параметрів h_1 і h_2 отримаємо рівняння

$$h = M(h,\varepsilon), \qquad (19)$$

де $M(h,\varepsilon) = T^{-1}\begin{pmatrix} x-\bar{x}+X^{(1)}(h) \\ \varphi-\bar{\varphi}+X^{(2)}(h) \end{pmatrix}$.

Із теореми 1 та леми 2 одержуємо оцінку

$$\|M(h,\varepsilon)\| \le \sigma_3\varepsilon^\beta + 2c_1\|h\|^2,$$

використовуючи яку, встановлюємо, що $M(h,\varepsilon)$ відображає множину

$$K_1 = \big\{h \mid h \in R^{n+m},\ \|h\| \le 2\sigma_3\varepsilon^\beta\big\}$$

в себе при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 < \varepsilon_0^{(1)} = (8\sigma_3 c_1)^{-q}$.

Встановимо далі стиск відображення $M(h,\varepsilon)$. Для цього оцінимо $\left\|\frac{dM(h,\varepsilon)}{dh}\right\|$.

Маємо
$$\frac{dM(h,\varepsilon)}{dh} = \|T^{-1}\| \begin{pmatrix} \frac{d(x-\bar{x})}{dh} + \frac{dX^{(1)}(h)}{dh} \\ \frac{d(\varphi-\bar{\varphi})}{dh} + \frac{dX^{(2)}(h)}{dh} \end{pmatrix}.$$

Із теореми 2 отримаємо оцінку
$$\left\|\frac{d(x-\bar{x})}{dh}\right\| + \left\|\frac{d(\varphi-\bar{\varphi})}{dh}\right\| \le \sigma_4\varepsilon^{\beta}.$$

Використовуючи результати леми 2 одержимо оцінки похідних по h залишків
$$\left\|\frac{dX^{(1)}(h)}{dh}\right\| + \left\|\frac{dX^{(2)}(h)}{dh}\right\| \le 8c_1\|h\|.$$

Оскільки $h \in K_1$, то
$$\left\|\frac{dM(h,\varepsilon)}{dh}\right\| \le \sigma_4\|T^{-1}\|\varepsilon^{\beta} + 6c_1\|T^{-1}\|\|h\| < 1$$

при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 < \min\{\varepsilon_0^{(1)}, \varepsilon_0^{(2)}\}$, $\varepsilon_0^{(2)} = \left(\|T^{-1}\|(\sigma_4 + 12c_1\sigma_3)\right)^{-q}$.

Із останньої нерівності одержуємо, що існує єдиний розв'язок рівняння (19) $h(\varepsilon) = \{h_1(\varepsilon), h_2(\varepsilon)\}$, а отже і єдиний розв'язок крайової задачі (1) - (4) $\{x(\tau, \mu_1^0 + h_1(\varepsilon), \mu_2^0 + h_2(\varepsilon), \varepsilon), \varphi(\tau, \mu_1^0 + h_1(\varepsilon), \mu_2^0 + h_2(\varepsilon), \varepsilon), \mu_1^0 + h_1(\varepsilon), \mu_2^0 + h_2(\varepsilon)\}$, причому
$$\|h_1(\varepsilon)\| + \|h_2(\varepsilon)\| \le 2\sigma_3\varepsilon^{\beta}.$$

Оцінимо відхилення розв'язків вихідної (1)-(4) та усереденої задач (8)-(11).
$$\begin{gathered} \|x(\tau,\varepsilon) - \bar{x}(\tau,\mu_1^0,\mu_2^0)\| \le \\ \le \|x(\tau,\varepsilon) - \bar{x}(\tau,\mu_1^0+h_1,\mu_2^0+h_2)\| + \\ + \|\bar{x}(\tau,\mu_1^0+h_1,\mu_2^0+h_2) - \bar{x}(\tau,\mu_1^0,\mu_2^0)\| \le \\ \le \sigma_3\varepsilon^{\beta} + 2c_1\|h\| \le \sigma_3(1+4c_1)\varepsilon^{\beta}, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,\mu_1^0,\mu_2^0,\varepsilon)\| \le \\ \le \|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,\mu_1^0+h_1,\mu_2^0+h_2,\varepsilon)\| + \\ + \|\bar{\varphi}(\tau,\mu_1^0+h_1,\mu_2^0+h_2,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,\mu_1^0,\mu_2^0,\varepsilon)\| \le \\ \le \sigma_3\varepsilon^{\beta} + 2c_1\|h\| \le \sigma_3(1+4c_1)\varepsilon^{\beta}. \end{gathered}$$

Очевидно, що із наведених вище оцінок випливає справедливість (18) зі сталою $\tilde{c} = 2\sigma_3(1+4c_1)$.

Нарешті, вибір $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0^{(1)}, \varepsilon_0^{(2)}, \left(\frac{\rho}{2\tilde{c}}\right)^q, \left(\frac{\rho}{2\sigma_3}\right)^q\}$, $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ забезпечує належність кривої $x = x(\tau,\varepsilon)$ ρ_1 - околу розв'язку усередненої задачі $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \mu_1^0, \mu_2^0)$ для всіх $(\tau,\varepsilon) \in [0,L] \times (0,\varepsilon_0]$ і точок $h_1(\varepsilon)$, $h_2(\varepsilon)$ відповідно множинам $B_{\rho_2}(\mu_1^0)$, $B_{\rho_3}(\mu_2^0)$.

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. — Київ: Наук. думка, 2004. — 474 с.

2. *Бигун Я.Й., Самойленко А.М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. – 1999. **35**, N 1. – С.8–14.

3. *Бігун Я.Й.* Про усереднення в багаточастотних системах із змінним запізненням // Науковий вісник Чернівецького університету. – 2008. – **374**. – С.29–33.

4. *Данилюк І.М.* Обгрунтування асимптотичних методів для багаточастотних систем з відхиленим аргументом. Дис. . . . канд. фіз.–мат. наук: 01.01.02 – Чернівці, 2010. – 143с.

5. *Петришин Р.І., Данилюк І.М.* Усереднення крайової задачі для багаточастотної системи з відхиленим аргументом // Нелінійні коливання.–2007.– **10**, N 4.– С.519–527.

6. *Бігун Я.Й.* Усереднення багаточастотної крайової задачі з лінійно перетвореним аргументом // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, N 3. – С.291–299.

7. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968. – 431с.

8. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 248с.