УДК 517.956

©2012 р. В.В. Городецький, О.В. Мартинюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НЕЛОКАЛЬНІ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з невід'ємними самоспряженими операторами в гільбертовому просторі.

The correct solvability of the nonlocal multi-point on time problem for the evolution equations win non-negative self-conjugate operators in the Gilbert space is established.

Теорія нелокальних крайових задач як розділ загальної теорії крайових задач для рівнянь з частинними похідними інтенсивно розвивається з сімдесятих років минулого століття. Дослідження таких задач зумовлено багатьма застосуваннями у механіці, фізиці, хімії, біології, екології та інших природничих дисциплінах. Прикладами можуть бути задачі, пов'язані з дослідженням процесів поширення тепла, вологопереносу в капілярно-пористих середовищах, дифузії і деяких технологічних процесів, обернені задачі для параболічних рівнянь, а також задачі математичної біології та демографії [1–4]. Нелокальні задачі виникають також при описі всіх коректних задач для конкретного оператора, при побудові загальної теорії крайових задач [5].

При дослідженні нелокальних задач для диференціально-операторних рівнянь вигляду $u'(t) + Au(t) = 0$, $t \in (0,T]$, актуальним є питання про відшукання "максимальних" просторів елементів (можливо, узагальнених) для постановки двоточкової і багатоточкової задач, за якими розв'язок $u(t)$ однозначно відновлюється і володіє необхідними властивостями. Тут дається відповідь на поставлене питання у випадку одного класу еволюційних рівнянь з невід'ємними самоспряженими операторами в гільбертовому просторі, встановлюється коректна розв'язність двоточкової та багатоточкової задач для таких рівнянь, при цьому $u(t)$ при кожному $t \in (0,T]$ належить до певного простору, породженому оператором A.

1. Попередні відомості та позначення

Нехай A – невід'ємний самоспряжений необмежений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі H зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$ зі щільною в H областю визначення $\mathcal{D}(A)$, E_λ $(\lambda \geq 0)$ – його розклад одиниці. Для довільної неперервної на $[0,\infty)$ функції $G(\lambda)$, що задовольняє умови

$$G(\lambda) \geq 1, \quad \lim_{\lambda\to+\infty} G(\lambda) = +\infty, \qquad (1)$$

на області визначення $\mathcal{D}(G(A))$ оператора $G(A) = \int\limits_0^\infty G(\lambda)dE_\lambda$ введемо скалярний добуток

$$(f,g)_{H_G} := (G(A)f, G(A)g),$$
$$\{f,g\} \subset \mathcal{D}(G(A)) =$$
$$= \Big\{\psi \in H: \int\limits_0^\infty G^2(\lambda)d(E_\lambda\psi,\psi) < \infty\Big\}.$$

Тоді $\mathcal{D}(G(A))$ перетворюється в гільбертів простір, який позначатимемо символом H_G. З (1) випливає, що $\|f\|_{H_G} \geq \|f\|$, $f \in H_G$, тому H_G можна вважати позитивним простором відносно H ([6], розділ 2, §1, с. 59-64). Позначимо через H'_G негативний простір, побудований за парою H_G та H. Відомо ([6], розділ 2, §1, с. 59-64), що H'_G може бути отриманий як поповнення H за нормою $\|f\|_{H'_G} = \|G^{-1}(A)f\|$. H'_G збігається з простором антилінійних неперервних функціоналів на H_G.

Наприклад, якщо $H = L_2(\mathbb{R})$, A – оператор множення на $|x|$, то в цьому випадку

$$H_G = L_2(\mathbb{R}, G^2(|x|)dx),$$

$$H'_G = L_2(\mathbb{R}, G^{-2}(|x|)dx).$$

Якщо $A = |D|$ – модуль оператора диференціювання, $G(\lambda) = \lambda^\tau + 1$, $\tau > 0$, то ([6], розділ 2, §2, с. 64-66)

$$H_{\lambda^\tau+1} = W_2^\tau(\mathbb{R}), \quad H'_{\lambda^\tau+1} = W_2^{-\tau}(\mathbb{R}),$$

де $W_2^{\pm\tau}(\mathbb{R})$ – відповідно позитивний і негативний простори Соболєва порядку τ.

Нехай $G(\lambda)$, $\lambda \in [0,\infty)$, додатково до умов 1), монотонно зростає,

$$\exists c > 0 \ \exists \alpha_0 > 0 : \ \frac{G(\lambda)}{\lambda} \geq cG(\alpha_0\lambda), \quad \lambda > 0,$$

$G(\lambda)$ – неперервно диференційовна на $[0,\infty)$ функція, а функція $\lambda G'(\lambda)G^{-1}(\lambda)$ монотонна на $[0,\infty)$. За функцією $G_\alpha(\lambda) = G(\alpha\lambda)$ $(\alpha > 0)$ побудуємо ланцюжок $H_{G_\alpha} \subset H \subset H'_{G_\alpha}$ гільбертових просторів. Зрозуміло, що $H_{G_{\alpha_1}} \subseteq H_{G_{\alpha_2}}$ при $\alpha_1 > \alpha_2$.

Покладемо $m_n = \sup\limits_{\lambda\geq 1}(\lambda^n/G(\lambda))$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатна і монотонно зростає. Вона володіє наступними властивостями ([6], розділ 2, §2, с. 67): 1) для довільного $\alpha > 0$ існує стала $c = c(\alpha) > 0$ така, що $m_n \geq c\alpha^n$, $n \in \mathbb{N}$; 2) $m_n^2 \leq m_{n-1}m_{n+1}$ для довільного $n \in \mathbb{N}$ (логарифмічна опуклість); 3) існують сталі c, $h > 0$ такі, що $m_{n+1} \leq ch^n m_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Введемо тепер $H_B\langle m_n\rangle$ як сукупність елементів $f \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$, що задовольнять умову

$$\exists c > 0 \ \exists B > 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$\|A^n f\| \leq cB^n m_n, \quad c = c(f).$$

Множина $H_B\langle m_n\rangle$ утворює банахів простір відносно норми $\|f\|_{H_B\langle m_n\rangle} = \sup\limits_n(\|A^n f\|/(B^n m_n))$. Зазначимо, що $H_{B_1}\langle m_n\rangle \subseteq H_{B_2}\langle m_n\rangle$ при $B_1 < B_2$. Нехай $H_\infty\langle m_n\rangle := \lim\limits_{B\to\infty} \operatorname{ind} H_B\langle m_n\rangle$. Тоді, як відомо ([6], розділ 2, §2, с. 67-69), $H_\infty\langle m_n\rangle = H_{G,0}$, $H_{G,0} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \operatorname{ind} H_{G_\alpha}$.

Якщо розглянути функцію $G(\lambda) = \exp(\lambda^{1/\beta})$, $\beta > 0$, яка, очевидно, задовольняє всі умови, що накладаються на $G(\lambda)$, то клас $H_{\exp(\lambda^{1/\beta}),0}$, побудований як індуктивна границя гільбертових просторів $H_{\exp(\alpha\lambda)^{1/\beta}}$, називається класом Жевре порядку β, побудованим за оператором A, і позначається символом $G_{\{\beta\}}(A)$, тобто $G_{\{\beta\}}(A) = H_\infty\langle n^{n\beta}\rangle$, $\beta > 0$ (тут враховано, що $m_n = \sup\limits_{\lambda\geq 1}(\lambda^n/\exp(\lambda^{1/\beta})) = (e^{-\beta}\beta^\beta)^n n^{n\beta}$).

Наприклад, якщо $H = L_2(\mathbb{R})$, A – оператор множення на $|x|$, то простір $G_{\{\beta\}}(A)$ складається з функцій $f \in L_2(\mathbb{R})$, що задовольняють умову $\int\limits_{\mathbb{R}} \exp(\alpha|x|^{1/\beta})|f(x)|^2 dx < \infty$ для деякого $\alpha > 0$. Простір $G'_{\{\beta\}}(A)$ збігається в цьому випадку з множиною всіх функцій f, локально інтегровних з квадратом, для яких $\int\limits_{\mathbb{R}} \exp(-\alpha|x|^{1/\beta})|f(x)|^2 dx < \infty$ для довільного $\alpha > 0$. Якщо $A = |D|$, то (див. [6], розділ 2, §2, с. 73-75)

$$G_{\{\beta\}}(|D|) = \Big\{ f \in L_2(\mathbb{R}) \ \Big| \ \exists c, \alpha > 0 :$$

$$\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|^2 dx \Big) \leq c\alpha^n n^{n\beta}, \ \forall n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Із властивості монотонності функції G випливає нерівність $G(\alpha_1\lambda) < G(\alpha_0\lambda)$, $\lambda \in [0,\infty)$, якщо $0 < \alpha_1 < \alpha_0$. Припустимо, що виконується умова

$$\forall \alpha_0, \alpha_1 > 0 : \ \ \alpha_1 < \alpha_0 \ \exists c = c(\alpha_0, \alpha_1) > 0$$

$$\exists \alpha_2 > 0 : G(\alpha_2\lambda)G(\alpha_1\lambda) < cG(\alpha_0\lambda), \qquad (2)$$

$$\lambda \in [0,\infty).$$

Нехай $f \in H_\infty\langle m_n\rangle = \bigcup\limits_{\alpha>0} H_{G_\alpha}$, тобто $f \in H_{G_{\alpha_0}}$ при деякому $\alpha_0 > 0$. Тоді $f = G^{-1}(\alpha_0 A)h$, $h \in H$. Візьмемо $\alpha_1 < \alpha_0$. Враховуючи умову (2), одержимо наступні нерівності:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \ \ \|A^k f\|_{H_{G_{\alpha_1}}} = \|G(\alpha_1 A)A^k f\| =$$

$$= \|G_{\alpha_1}(A)A^k G^{-1}(\alpha_0 A)h\| =$$

$$= \sqrt{\int_0^\infty G^2(\alpha_1\lambda)\lambda^{2k}G^{-2}(\alpha_0\lambda)d(E_\lambda h, h)} \le$$

$$\le \sqrt{\int_0^\infty \frac{c^2\lambda^{2k}}{G^2(\alpha_2\lambda)}d(E_\lambda h, h)} \le$$

$$\le c\|h\| \sup_{\lambda\ge 1} \frac{\lambda^k}{G(\alpha_2\lambda)} = \frac{c\|h\|}{\alpha_2^k} \sup_{\alpha_2\lambda\ge 1} \frac{(\alpha_2\lambda)^k}{G(\alpha_2\lambda)} =$$

$$= \frac{c\|h\| \cdot m_k}{\alpha_2^k}. \tag{3}$$

Припустимо тепер, що ціла функція $F(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$, набуває невід'ємних значень на $\mathbb{R}$ і задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}:$$

$$|F(z)| \le c_\varepsilon \cdot G(\varepsilon|z|). \tag{4}$$

Коефіцієнти Тейлора функції F обчислюються за формулою

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{F(z)}{z^{k+1}}dz,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $z_0 = 0$. Звідси та з (4) дістаємо, що

$$|c_k| \le c_\varepsilon \inf_R \frac{G(\varepsilon R)}{R^k} = c_\varepsilon \cdot \varepsilon^k \inf \frac{G(\varepsilon R)}{(\varepsilon R)^k} =$$

$$= c_\varepsilon \varepsilon^k \frac{1}{\sup\limits_R \frac{R^k}{G(R)}} = \frac{c_\varepsilon \cdot \varepsilon^k}{m_k}. \tag{5}$$

Враховуючи (3) та (5) знайдемо, що для $0 < \varepsilon < \alpha_2$

$$\sum_{k=0}^\infty |c_k|\, \|A^k f\|_{H_{G_{\alpha_1}}} \le cc_\varepsilon \|h\| \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_2}\right)^k = \tilde{c}_\varepsilon \|h\|.$$

За функцією F побудуємо оператор $\tilde{F}(A) = \sum_{k=0}^\infty c_k A^k$. Оскільки

$$\|\tilde{F}(A)f\|_{H_{G_{\alpha_1}}} = \Big\| \sum_{k=0}^\infty c_k A^k f \Big\|_{H_{G_{\alpha_1}}} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^\infty |c_k|\, \|A^k f\|_{H_{G_{\alpha_1}}} = \tilde{c}_\varepsilon \|h\|, \quad f \in H_{G_{\alpha_0}},$$

то $\tilde{F}(A)f \in H_{G_{\alpha_1}}$. Звідси випливає також, що кожну обмежену множину L простору $H_{G_{\alpha_0}}$ оператор $\tilde{F}(A)$ відображає в обмежену множину $\tilde{F}(A)L$ простору $H_{G_{\alpha_1}}$. Доведення випливає з наступних міркувань: якщо f перебігає обмежену множину в просторі $H_{G_{\alpha_0}}$, то множина M елементів $h \in H$ таких, що $f = G^{-1}(\alpha_0 A)h$ також обмежена, тобто $\exists \gamma_0 > 0\ \forall h \in M:\ \ \|h\| \le \gamma_0$. Тоді

$$\forall f \in L:\ \|\tilde{F}(A)f\|_{H_{G_{\alpha_1}}} \le \sum_{k=0}^\infty |c_k|\, \|A^k f\|_{H_{G_{\alpha_1}}} \le$$

$$\le \tilde{c}_\varepsilon \|h\| \le \tilde{c}_\varepsilon \gamma_0.$$

Таким чином, оператор $\tilde{F}(A)$ відображає простір $H_\infty\langle m_n\rangle$ в себе і є неперервним, $H_\infty\langle m_n\rangle \subseteq \mathcal{D}(\tilde{F}(A))$. Звуження оператора $\tilde{F}(A)$ на $H_\infty\langle m_n\rangle$ позначимо символом $F(A)$. Отже, $\mathcal{D}(F(A)) = H_\infty\langle m_n\rangle$ та $F(A)f = \sum_{k=0}^\infty c_k A^k f$, $\forall f \in H_\infty\langle m_n\rangle$.

Нехай F_j, $j \in \{1,\dots,s\}$, – цілі функції, невід'ємні на $\mathbb{R}$, для яких виконується аналог умови (4):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}:$$

$$|F_j(z)| \le c_\varepsilon G(\varepsilon|z|),\ j \in \{1,\dots,s\},$$

α_j: $(0,T] \to (0,\infty)$, $j \in \{1,\dots,s\}$, – неперервні функції, інтегровні на $(0,T]$. Символом $\gamma(t,A)$, $t \in (0,T]$, позначимо оператор-функцію вигляду $\sum_{j=1}^s \alpha_j(t)F_j(A)$, де $F_j(A)$, $j \in \{1,\dots,s\}$, – звуження відповідного оператора $\tilde{F}_j(A)$ на $H_\infty\langle m_n\rangle$. Отже, $\mathcal{D}(\gamma(t,A)) = H_\infty\langle m_n\rangle$ для кожного $t \in (0,T]$. Із вигляду $\gamma(t,A)$ випливає, що при кожному $t \in (0,T]$ оператор $\gamma(t,A)$ є самоспряженим і

$$(\gamma(t,A)f,f) = \sum_{j=1}^s \alpha_j(t)(F_j(A)f,f) =$$

$$= \sum_{j=1}^s \alpha_j(t) \int_0^\infty F_j(\lambda)d(E_\lambda f,f) \ge 0,$$

$$\forall f \in H_\infty\langle m_n\rangle,$$

тобто $\gamma(t,A)$ – невід'ємний оператор при кожному $t\in(0,T]$.

2. Основні результати

Розглянемо рівняння

$$u'(t)+\gamma(t,A)u(t)=0,\quad t\in(0,T],\qquad (6)$$

де $\gamma(t,A)$ – оператор-функція, побудована в п. 1. Припускаємо також, що функції F_j, $j\in\{1,\dots,s\}$, задовольняють умову

$$\forall c>0\ \exists\mu=\mu(c)>0:\ \ cF_j(\lambda)\ge\ln G(\mu\lambda),$$

$$\lambda\in[0,\infty), j\in\{1,\dots,s\}.$$

Звідси при фіксованому $t\in(0,T]$ випливають нерівності

$$\exp\{\varphi(t,\lambda)\}\equiv\exp\Big\{\sum_{j=1}^{s}b_j(t)F_j(\lambda)\Big\}\equiv$$

$$\equiv\exp\Big\{\sum_{j=1}^{s}c_jF_j(\lambda)\Big\}\ge\exp\{cF_j(\lambda)\}\ge$$

$$\ge\exp\{\ln G(\mu\lambda)\}=G(\mu\lambda),\quad c=c(t)>0,$$

$$b_j(t)=\int_0^t\alpha_j(\tau)d\tau,\quad j\in\{1,\dots,s\},t\in(0,T],$$

$$\exp\{-\varphi(t,\lambda)\}\le\frac{1}{G(\mu\lambda)},\quad \mu=\mu(t)>0.\ (7)$$

З урахуванням (7) маємо, що

$$\|e^{-\varphi(t,A)}f\|^2_{H_{G_\mu}}=\|G(\mu A)e^{-\varphi(t,A)}f\|^2=$$

$$=\int_0^\infty G^2(\mu\lambda)e^{-2\varphi(t,\lambda)}d(E_\lambda f,f)\le$$

$$\le\int_0^\infty d(E_\lambda f,f)=\|f\|^2,\quad\forall f\in H.$$

Отже, $\exp\{-\varphi(t,A)\}f\in H_\infty\langle m_n\rangle$, $\forall f\in H$, при кожному $t\in(0,T]$.

Під розв'язком рівняння (6) розуміємо функцію $u(t)$, $t\in(0,T]$, зі значеннями в $H_\infty\langle m_n\rangle=\mathcal{D}(\gamma(t,A))$, неперервно диференційовну на $(0,T]$, яка задовольняє це рівняння.

Лема 1. *Якщо розв'язки $u_1(t)$ і $u_2(t)$, $t\in(0,T]$, рівняння* (6) *співпадають у точці $t_0\in(0,T]$, то $u_1(t)\equiv u_2(t)$ для $t\in[t_0,T]\subset(0,T]$.*

Доведення. Внаслідок лінійності рівняння (6) досить довести, що якщо розв'язок $u(t)$ рівняння (6) перетворюється в нуль у точці $t_0\in(0,T]$, то $u(t)\equiv0$ на проміжку $[t_0,T]$. Отже, нехай $u(t_0)=0$, $t_0\in(0,T]$. Оскільки $(u'(t),u(t))=-(\gamma(t,A)u(t),u(t))\le 0$ и $(u'(t),u(t))=\dfrac12(u(t),u(t))'$, то для довільного $t\in(t_0,T]$

$$\|u(t)\|^2-\|u(t_0)\|^2=\int_{t_0}^t\frac{d}{d\tau}(u(\tau),u(\tau))d\tau=$$

$$=2\int_{t_0}^t\Big(\frac{du(\tau)}{d\tau},u(\tau)\Big)d\tau=$$

$$=-2\int_{t_0}^t(\gamma(\tau,A)u(\tau),u(\tau))d\tau\le0.\qquad(8)$$

Згідно з умовою $u(t_0)=0$, тому $\|u(t)\|\le0$, $t\in(t_0,T]$. Звідси випливає, що $u(t)\equiv0$ для $t\in[t_0,T]$.

Наслідок 1. *Якщо $u(t)$, $t\in(0,T]$, – розв'язок рівняння* (6)*, неперервний на $[0,T]$, і $u(0)=0$, то $u(t)\equiv0$ на $[0,T]$.*

Доведення. З (8) випливає, що $\|u(t)\|^2\le\|u(t_0)\|^2$ для довільних t_0, t таких, що $0<t_0<t\le T$. Попрямувавши t_0 до нуля отримаємо, що $\|u(t)\|\le\|u(0)\|\le0$ для всіх $t\in(0,T]$. Отже, $u(t)=0$ на $[0,T]$.

Теорема 1. *Функція $u(t)$, неперервна на $[0,T]$, є розв'язком рівняння* (6) *тоді й лише тоді, коли вона подається у вигляді*

$$u(t)=e^{-\varphi(t,A)}f,\quad f=u(0)\in H,$$

$$\varphi(t,A)=\sum_{j=1}^{s}b_j(t)F_j(A),\qquad(9)$$

де $b_j(t)=\int_0^t\alpha_j(\tau)d\tau$, $j\in\{1,\dots,s\}$.

Доведення. Функція $e^{-\varphi(t,\lambda)}$, $(t,\lambda)\in(0,T]\times\sigma(A)$, де $\sigma(A)$ – спектр оператора A, диференційовна по t на довільному проміжку $[\varepsilon, T]$, $0<\varepsilon<T$, причому

$$\sup_{t\in[\varepsilon,T],\lambda\in\sigma(A)} |(e^{-\varphi(t,\lambda)})'_t| \le c < \infty,$$

де $c=c(\varepsilon,T)>0$. Отже, оператор-функція $e^{-\varphi(t,A)}$ сильно диференційовна на відрізку $[\varepsilon, T]$ і

$$\frac{d}{dt}e^{-\varphi(t,A)} = -\gamma(t,A)e^{-\varphi(t,A)}. \qquad (10)$$

Внаслідок довільності $\varepsilon>0$ отримуємо, що оператор-функція $e^{-\varphi(t,A)}$ сильно диференційовна на проміжку $(0,T]$. З (10) випливає також, що функція $u(t)=e^{-\varphi(t,A)}f$ є розв'язком рівняння (6); при цьому, як зазначалося раніше, $u(t)\in H_\infty\langle m_n\rangle = \mathcal{D}(\gamma(t,A))$ при кожному $t\in(0,T]$.

Навпаки, якщо $u(t)$, $t\in(0,T]$, – розв'язок рівняння (6), неперервний у точці 0, то функція $z(t)=u(t)-e^{-\varphi(t,A)}f$, $f=u(0)$, задовольняє умови наслідку 1. Тому $u(t)\equiv 0$, $t\in(0,T]$, тобто $z(t)=e^{-\varphi(t,A)}f$, $t\in(0,T]$. Теорема доведена.

Для рівняння (6) задамо нелокальну умову

$$\mu_1 u(0)-\mu_2 u(T) = g, \quad g\in H, \qquad (11)$$

де $\mu_1,\mu_2>0$ – фіксовані параметри, $\mu_1>\mu_2$. Під розв'язком двоточкової задачі (6), (11) розуміємо розв'язок рівняння (6), який задовольняє умову (11).

Нехай $\mu := \mu_1/\mu_2$, $\mu>1$. Оператор $\mu^{-1}e^{-\varphi(T,A)}$ обмежений в H, причому $\|\mu^{-1}e^{-\varphi(T,A)}\|<1$. Тоді, як відомо, існує оператор $(I-\mu^{-1}e^{-\varphi(T,A)})^{-1}$, який обмежений в H і подається у вигляді

$$(I-\mu^{-1}e^{-\varphi(T,A)})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k}e^{-k\varphi(T,A)}.$$

Враховуючи цей факт доведемо, що функція

$$u(t) = \mu_1^{-1}e^{-\varphi(t,A)}(I-\mu^{-1}e^{-\varphi(T,A)})^{-1}g =$$

$$= \mu_1^{-1}\int_0^\infty e^{-\varphi(t,\lambda)}(1-\mu^{-1}e^{-\varphi(T,\lambda)})^{-1}dE_\lambda g =$$

$$= \mu_2^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}e^{-(\varphi(t,A)+k\varphi(T,A))}g$$

є розв'язком задачі (6), (10). Справді, нехай

$$\psi := (I-\mu^{-1}e^{-\varphi(T,A)})^{-1}g, \ \ \psi\in H.$$

Тоді $u(t)=\mu_1^{-1}e^{-\varphi(t,A)}\psi$, причому $u(t)\in H_\infty\langle m_n\rangle \equiv \mathcal{D}(\gamma(t,A))$ при кожному $t\in(0,T]$. З теореми 1 випливає, що $u(t)$ є розв'язком рівняння (6). Крім того, $u(t)$ задовольняє умову (11). Справді,

$$\mu_1 u(0)-\mu_2 u(T) = \int_0^\infty (1-\mu^{-1}e^{-\varphi(T,\lambda)})^{-1}dE_\lambda g -$$

$$-\mu^{-1}\int_0^\infty e^{-\varphi(T,\lambda)}(1-\mu^{-1}e^{-\varphi(T,\lambda)})^{-1}dE_\lambda g =$$

$$= \int_0^\infty dE_\lambda g = g,$$

що й потрібно було довести.

Нехай тепер $u(t)$ – розв'язок задачі (6), (11). Тоді, внаслідок теореми 1, $u(t)$ подається у вигляді (9). Знайдемо елемент $f\in H$ такий, щоб функція $e^{-\varphi(t,A)}f$ задовольняла умову (11). Це буде тоді й лише тоді, коли виконуються співвідношення

$$\mu_1 f - \mu_2 e^{-\varphi(T,A)}f = g \Leftrightarrow$$

$$\mu_1(I-\mu^{-1}e^{-\varphi(T,A)})f = g, \quad \mu=\frac{\mu_1}{\mu_2}>1.$$

Звідси знаходимо, що $f = \mu_1^{-1}(I-\mu^{-1}e^{-\varphi(T,A)})^{-1}g \equiv \mu_1^{-1}\psi$. Отже, $u(t)=\mu_1^{-1}e^{-\varphi(t,A)}\psi$.

Підсумуємо отримані результати у вигляді наступного твердження.

Теорема 2. *Функція $u(t)$, неперервна на $[0,T]$ в H, є розв'язком двоточкової задачі (6), (11) тоді й тільки тоді, коли вона подається у вигляді*

$$u(t)=\mu_1^{-1}e^{-\varphi(t,A)}\psi, \psi=(I-\mu^{-1}e^{-\varphi(T,A)})^{-1}g,$$

$$\mu=\mu_1/\mu_2>1, \quad t\in(0,T]. \qquad (12)$$

З теореми 2 випливає

Теорема 3. *Двоточкова задача* (6), (11) *коректно розв'язна в гільбертовому просторі* H, *її розв'язок зображається формулою* (12), $u(t) \in H_\infty\langle m_n\rangle$ *при кожному* $t \in (0, T]$.

Доведення. Для доведення твердження достатньо показати, що функція $u(t)$ неперервно залежить від граничного елемента g. Отже, нехай $\{g_n, n \geq 1\} \subset H$, $g \in H$, $g_n \to g$ при $n \to \infty$ в H,

$$u_n(t) = \mu_1^{-1} \int_0^\infty e^{-\varphi(t,\lambda)}(1-\mu^{-1}e^{-\varphi(T,\lambda)})^{-1} dE_\lambda g_n,$$

$$n \in \mathbb{N}.$$

Введемо позначення: $\Phi_n(\lambda) = (E_\lambda(g_n - g), g_n - g)$. При фіксованому λ за умови, що $g_n \to g$, $n \to \infty$ в H маємо

$$0 \leq \Phi_n(\lambda) = (E_\lambda(g_n - g), E_\lambda(g_n - g)) =$$

$$= \|E_\lambda(g_n - g)\|^2 \leq \|g_n - g\|^2 \to 0, \quad n \to \infty,$$

тобто $\Phi_n(\lambda) \to 0$ при $n \to \infty$. Оскільки $\exists c > 0$ $\forall n$: $\|g_n - g\| \leq c$, то із властивостей спектральної функції E_λ випливає, що варіації функцій Φ_n обмежені одним числом. Звідси, з урахуванням неперервності функції

$$\Psi_t(\lambda) := \mu_1^{-1}e^{-\varphi(t,\lambda)}(1 - \mu^{-1}e^{-\varphi(T,\lambda)})^{-1},$$

$$\lambda \in [0, \infty),$$

як функції змінної λ (при фіксованому $t \in (0, T]$), яка прямує до нуля на нескінченності, з першої теореми Хеллі випливає граничне співвідношення

$$\|u_n - u\|^2 = \int_0^\infty \Psi_t^2(\lambda) d\Phi_n(\lambda) \to 0, \quad n \to \infty,$$

в H, що й потрібно було довести.

Зазначимо, що наведені результати можна сформулювати так: *формула* (12) *описує всі розв'язки рівняння* (6), *які задовольняють умову* (11), *при цьому* $u(t) \in H_\infty\langle m_n\rangle$ *при кожному* $t \in (0, T]$.

Для рівняння (6) поставимо m-точкову ($m \geq 2$) задачу

$$\mu u(0) - \mu_1 u(t_1) - \cdots - \mu_m u(t_m) = g, \quad g \in H, \tag{13}$$

де $m \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$ – фіксовані числа, $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leq T$.

Під розв'язком задачі (6), (13) розуміємо розв'язок рівняння (6), який задовольняє умову (13). Оскільки

$$\mu I - \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-\varphi(t_k,A)} = \mu\Big(I - \mu^{-1}\sum_{k=1}^m \mu_k e^{-\varphi(t_k,A)}\Big),$$

причому

$$\Big\|\mu^{-1}\sum_{k=1}^m \mu_k e^{-\varphi(t_k,A)}\Big\| \leq \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k < 1,$$

то існує оператор $(I - B)^{-1}$, обмежений в H, де $B := \mu^{-1}\sum_{k=1}^m \mu_k e^{-\varphi(t_k,A)}$. Внаслідок теореми 1 розв'язок задачі (6), (13) має вигляд $e^{-\varphi(t,A)}f$, де f – такий елемент з H, що

$$\mu f - \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-\varphi(t_k,A)} f = g \Leftrightarrow$$

$$\mu\Big(I - \mu^{-1}\sum_{k=1}^m \mu_k e^{-\varphi(t_k,A)}\Big) f = g \Leftrightarrow$$

$$\mu(I - B)f = g.$$

Отже, $f = \mu^{-1}(I - B)^{-1}g$. Враховуючи результати, отримані у випадку двоточкової задачі (6), (11), і, міркуючи аналогічно, прийдемо до наступного твердження.

Теорема 4. *Функція* $u(t)$, *неперервна на* $[0, T]$ *в* H, *є розв'язком* m*-точкової задачі* (6), (13) *тоді й лише тоді, коли вона подається у вигляді*

$$u(t) = \mu^{-1}e^{-\varphi(t,A)}\psi, \quad \psi = (I - B)^{-1}g,$$

$$t \in (0, T].$$

m*-точкова задача* (6), (13) *коректно розв'язна в гільбертовому просторі* H, $u(t) \in H_\infty\langle m_n\rangle$ *при кожному* $t \in (0, T]$.

Як відомо (див. [6], розділ. 2, §3, с. 80-82), оператор A допускає замикання в просторі H'_G до самоспряженого невід'ємного оператора $\hat{A}_G$, при цьому $A \subset \hat{A}_G$, $\varphi(A) \subset \varphi(\hat{A}_G)$

для довільної неперервної на $[0,\infty)$ функції φ. Нехай $\hat{E}_\lambda$ – розклад одиниці оператора $\hat{A}_G$ у просторі H'_G. Тоді для довільного $f\in H$

$$(\hat{E}_\lambda f, f)_{H'_G} = (E_\lambda f, f)_{H'_G} =$$

$$= (G^{-1}(A)E_\lambda f, G^{-1}(A)f) =$$

$$= (E_\lambda G^{-1}(A)f, E_\lambda G^{-1}(A)f) =$$

$$= \|E_\lambda G^{-1}(A)f\|^2 =$$

$$= \|G^{-1}(A)E_\lambda f\|^2 =$$

$$= \int\limits_0^\infty G^{-2}(\mu)d(E_\mu E_\lambda f, E_\lambda f) =$$

$$= \int\limits_0^\lambda G^{-2}(\mu)d(E_\mu f, f).$$

Отже,

$$\forall f\in H: \ (E_\lambda f, f) = \int\limits_0^\lambda G^2(\mu)d(\hat{E}_\mu f, f)_{H'_G}.$$

Звідси випливає, що $H'_G = G(\hat{A})H$. Для зручності далі через $\hat{A}$ будемо позначати оператор $\hat{A}_G$, де $G(\lambda)=e^\lambda$, через H'_e – простір H'_{e^λ}, спряжений до H_{e^λ}, $H'_{e,\alpha}\equiv H'_{e^{\alpha\lambda}}$, $\alpha>0$. Таким чином, якщо $G(\lambda)=e^{\alpha\lambda}$, $\alpha>0$, то $H'_{e,\alpha}=e^{\alpha\hat{A}}H$, причому оператор $e^{-\alpha\hat{A}}$ ізометрично відображає $H'_{e,\alpha}$ на H.

У монографії [6] (розділ 2, §4, с. 87-89) встановлено, що всі неперервно диференційовні на $(0,T]$ у просторі H розв'язки рівняння

$$u'(t)+Au(t)=0, \quad t\in(0,T], \qquad (14)$$

мають вигляд $u(t)=e^{-t\hat{A}}f$, де $f\in H'_\infty\langle n!\rangle$; при цьому функція $u(t)$ неперервна на $[0,T]$ в $H'_\infty\langle n!\rangle$. Граничне значення $u(t)$ при $t\to+0$ існує в просторі $H'_\infty\langle n!\rangle$ (але не існує, взагалі кажучи, в H). Урахувавши сказане, поставимо наступну задачу: знайти гладкий розв'язок $u(t)$ рівняння (14) на $(0,T]$, який задовольняє умову

$$\mu_1 u(0)-\mu_2 u(T)=g, \quad g\in H'_\infty\langle n!\rangle, \qquad (15)$$

де $u(0)=\lim\limits_{t\to+0}u(t)$, $u(T)=\lim\limits_{t\to T-0}u(t)$ (границі розглядаються в просторі $H'_\infty\langle m_n\rangle$), $\mu_1>\mu_2>0$.

Теорема 5. *Функція $u(t)$, $t\in(0,T]$, є розв'язком двоточкової задачі* (14), (15) *тоді й лише тоді, коли вона подається у вигляді*

$$u(t)=\mu_1^{-1}e^{-t\hat{A}}\psi, \quad \psi=(I-\mu^{-1}e^{-T\hat{A}})^{-1}g,$$

$$\mu=\mu_1/\mu_2>1.$$

Задача (14), (15) *коректно розв'язна, $u(t)\in H_\infty\langle n!\rangle$ при кожному $t\in(0,T]$.*

Доведення теореми 5 здійснюється за схемою доведень теорем 2, 3.

Зауваження. Якщо для рівняння (14) поставити m-точкову ($m\geq 2$) задачу

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t)-\sum_{k=1}^m \mu_k\lim_{t\to t_k}u(t)=g,$$

$$g\in H'_\infty\langle n!\rangle \qquad (16)$$

(границі розглядаються в просторі $H'_\infty\langle n!\rangle$), де параметри μ, μ_1, …, μ_m, t_1, …, t_m задовольняють умови, сформульовані раніше, то прийдемо до наступного твердження: функція $u(t)$, $t\in(0,T]$, є розв'язком задачі (14), (16) тоді й лише тоді, коли вона подається у вигляді

$$u(t)=\mu^{-1}e^{-t\hat{A}}\Big(I-\mu^{-1}\sum_{k=1}^m\mu_k e^{-t_k\hat{A}}\Big)^{-1}g,$$

$$g\in H'_\infty\langle n!\rangle;$$

задача (14), (16) коректно розв'язна, $u(t)\in H_\infty\langle n!\rangle$ при кожному $t\in(0,T]$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Нахушев А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод / А.М. Нахушев // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72-81.

2. *Белавин И.А.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения / И.А. Белавин, С.П. Капица, С.П. Курдюмов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1998. – Т. 38, № 6. – С. 885-902.

3. *Майков А.Р.* Экономический метод вычисления нестационарных нелокальных по времени условий излучения для волновых систем / А.Р. Майков, А.Д. Поезд, С.А. Якушев // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1990. – Т. 30, № 8. – С. 1267-1271.

4. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. – М.: Высш. школа, 1995. – 301 с.

5. *Дезин А.А.* Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия / А.А. Дезин // Изв. АН СССР. – Сер. матем. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 61-86.

6. *Горбачук В.И.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.