УДК 531.36

©2012 р. Ф.Г. Гаращенко, В.Т. Матвієнко, І.І. Харченко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ЗАРЯДЖЕНИХ ПУЧКІВ ЯК ЗАДАЧА ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ В ОПТИМІЗАЦІЙНІЙ ПОСТАНОВЦІ

Розглянуті задачі оптимізації пучка іонів у лінійних прискорювачах. Сформульовані постановки задач, що виникають при дослідженні загальної задачі керування пучками. Викладено структурно-параметричні підходи для задач оптимізації. Оптимізаційні задачі керування зводяться до розгляду методів практичної стійкості. Оптимізація систем у структурно-параметричному класі дозволило розробити ряд алгоритмів отримання квазіоптимальних розв'язків, які зарекомендували свою працездатність у реальних системах.

The tasks of optimizing the ion beam in linear accelerators are considered. The setting problems, which arise in studying of the general problem of beams control, are formulated. Structural-parametric approaches for the optimization problems are developed. Optimization control problems are reduced to the methods of practical stability. Optimizing of systems in structural and parametric class allowed developing a number of algorithms for obtaining quasi-optimal solutions, which have proven their efficiency in real systems.

1. Вступ. В даний момент прискорювачі заряджених частинок широко використовуються в наукових дослідженнях та різних галузях народного господарства. Проектування прискорювачів добре розроблено на основі фізичних принципів прискорення і фокусування. Але зараз постає питання проектування прискорюючих систем з оптимальними характеристиками, які б дозволяли при одному і тому ж рівні витрат отримати пучки з більшою енергією, з більшою густиною тощо.

Аналіз показує, що задачі практичної стійкості і деякі задачі оптимального керування потоками частинок тісно пов'язані [2,3,5,6]. Це дозволило застосувати алгоритми побудови областей практичної стійкості для розв'язування задач оптимального керування пучками. Оптимізація систем в структурно-параметричному класі дозволило розробити ряд алгоритмів отримання квазіоптимальних розв'язків, які зарекомендували свою працездатність в реальних установках.

При практичних реалізаціях задачі керування пучком траєкторій дуже складні. Моделювання динаміки пучка на ЕОМ з паралельним визначенням полів із рівнянь Максвела є дуже важким процесом з обчислювальної точки зору [8,9]. Представляючи поля в структурно-параметричному класі і, застосовуючи метод послідовного ускладнення математичної моделі, приходимо до оптимізаційних задач, які можна чисельно розв'язати на ЕОМ. Цей підхід має такі позитивні аспекти :

а) аналіз фізики процесу і вдалий вибір параметрів оптимізації дозволяє отримати кращі локальні екстремуми функції цілі, що мінімізується, в заданому класі керуючих полів;

б) параметричне представлення полів дає можливість визначити оптимальні режими у структурах, які фізично можна реалізувати.

Задачі оптимального керування пучками розглядалися багатьма вченими. Зокрема, таким проблемам присвячено праці [2-6,11,12].

Основою для розв'язування таких задач служать класичні методи, які містяться в монографіях [4, 13].

2. Рівняння руху заряджених частинок в електромагнітних полях, їх аналіз. Наведемо рівняння руху заряджених частинок в електромагнітних полях. Швидкість зміни імпульсу частинки $p = m * v$ дорівнює силі Лоренца [9], що діє на неї :

$$\frac{dp}{dt} = Z \cdot e \cdot \{E + [v \cdot B]\}, \qquad (1)$$

де Z – зарядове число, e – заряд частинки, E – вектор напруженості прискорюючого поля, B – вектор магнітної індукції, v – швидкість частинок, $[v \cdot B]$– векторний добуток,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \cdot m_0, \qquad (2)$$

$\gamma = \frac{m}{m_0}$ – приведена енергія частинки. Запишемо рівняння (1) у вигляді :

$$m_0 \cdot \gamma \cdot \frac{dv}{dt} + m_0 \cdot v \cdot \frac{d\gamma}{dt} = Z \cdot e \cdot \{E + [v \cdot B]\}. \quad (3)$$

Проектуючи (1) на координатні осі, отримаємо :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_x + \frac{dy}{dt}B_z - \frac{dz}{dt}B_y - \frac{m_0}{Ze}\frac{dx}{dt}\frac{d\gamma}{dt}\right],$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_y + \frac{dz}{dt}B_x - \frac{dx}{dt}B_z - \frac{m_0}{Ze}\frac{dy}{dt}\frac{d\gamma}{dt}\right],$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_z + \frac{dx}{dt}B_y - \frac{dy}{dt}B_x - \frac{m_0}{Ze}\frac{dz}{dt}\frac{d\gamma}{dt}\right].$$

З урахуванням сил кулонівської взаємодії систему рівнянь (1) перепишемо у вигляді :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_x + \frac{dy}{dt}B_z - \frac{dz}{dt}B_y - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{m_0}{Ze}\frac{dx}{dt}\frac{d\gamma}{dt} - \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right],\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_y + \frac{dz}{dt}B_x - \frac{dx}{dt}B_z - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{m_0}{Ze}\frac{dy}{dt}\frac{d\gamma}{dt} - \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right],\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_z + \frac{dx}{dt}B_y - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{dy}{dt}B_x - \frac{m_0}{Ze}\frac{dz}{dt}\frac{d\gamma}{dt} - \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial u}{\partial z}\right],
\end{aligned} \qquad (4)$$

де u – потенціал власного поля пучка,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Рівняння (4) є загальними рівняннями руху в часі. Виразимо похідну $\frac{d\gamma}{dt}$через координати частинки і проекції її швидкості :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v \cdot v)}{c^2}}} = \frac{\gamma^2}{c^2}\left(v\frac{dv}{dt}\right).$$

Визначаючи швидкість із (1) будемо мати:

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{Ze}{m_0c^2}\left[E_x\frac{dx}{dt} + E_y\frac{dy}{dt} + E_z\frac{dz}{dt} - \right.\\
&\left. - \frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right].
\end{aligned} \qquad (5)$$

Припустимо, що зовнішнє поле змінюється по закону $E = E' \cos\varphi$, де E'- амплітуда напруженості прискорюючого поля,

$$\varphi = \frac{2\pi c}{\lambda}(t - t_B) - \varphi(0)$$

– фаза прискорюючої хвилі, що діє на частинку в момент t, t_B – час поширення хвилі від початкової точки $z = 0$ в точку z, $\varphi(0)$ – фаза прискорюючої хвилі, при якій іон вступає в процес прискорення, λ – довжина хвилі високочастотного прискорюючого поля. Отримані рівняння будемо розглядати відносно незалежної змінної z. Для цього запишемо :

$$(v, v) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\left[1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right].$$

Звідси

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}{(v, v)},$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{(v, v)}{c^2}, (v, v) = \frac{(\gamma^2 - 1)c^2}{\gamma^2}.$$

Отже,

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{\gamma^2\left[1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]}{(\gamma^2 - 1)c^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz}\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dz^2}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 + \frac{dx}{dz}\frac{d^2z}{dt^2};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d^2t}{dz^2}\right)^2\left[\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{dx}{dz}\frac{d^2z}{dt^2}\right]. \qquad (6)$$

Використовуючи (6) з урахуванням (5) рівняння руху (4) можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{Ze\gamma}{m_0c^2\left(\gamma^2-1\right)}\left\{E_x - \frac{dx}{dz}E_z - \right.$$

$$-\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{dz}\frac{\partial u}{\partial z}\right) +$$

$$+\left[\frac{dy}{dz}B_z - \left(1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 B_y\right) + \frac{dx}{dz}\frac{dy}{dz}B_x\right]\times$$

$$\left.\times\frac{c\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}}\right\}\times$$

$$\times\left[1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right],$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{Ze\gamma}{m_0c^2\left(\gamma^2-1\right)}\left\{E_y - \frac{dy}{dz}E_z - \right.$$

$$-\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dy}{dz}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left[\left(1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 B_x\right) - \right.$$

$$\left.\left.-\frac{dx}{dz}B_z - \frac{dx}{dz}\frac{dy}{dz}B_y\right]\frac{c\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}}\right\}\times$$

$$\times\left[1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right], \qquad (7)$$

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{Ze}{m_0c^2}\left[E_x\frac{dx}{dz} + E_y\frac{dy}{dz} + E_z - \right.$$

$$\left.-\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{dx}{dz}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dz}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right],$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}.$$

Для (7) реалізація чисельного моделювання на ЕОМ процедур оптимізації є дуже складною. Тому розглянемо спрощену модель [8,11]. Рівняння руху (7) будемо розглядати без врахування сил кулонівської взаємодії, тобто divE=0. В цьому випадку рівняння запишуться у вигляді :

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{Ze}{m_0c^2}E_z\cos\varphi, \frac{d\varphi}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}, \quad (8)$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{Ze}{m_0c^2}\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z} + g(z)\right)x - \right.$$

$$\left.-E_z\frac{dx}{dz}\right]\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{Ze}{m_0c^2}\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z} - g(z)\right)y - \right.$$

$$\left.-E_z\frac{dy}{dz}\right]\cos\varphi,$$

де $g(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial E_x(0,0,z)}{\partial x} - \frac{\partial E_y(0,0,z)}{\partial y}\right]$. Введемо безрозмірну координату $\xi = \frac{z}{\lambda}$ [11]. Тоді рівняння (8) набудуть вигляду :

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = \alpha(\xi)\cos\varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}, \qquad (9)$$

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} = \frac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{d\xi} + g(\xi)\right)x - \right.$$

$$\left.-\alpha(\xi)\frac{dx}{d\xi}\right]\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} = \frac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{d\xi} - g(\xi)\right)y - \right.$$

$$\left.-\alpha(\xi)\frac{dy}{d\xi}\right]\cos\varphi.$$

Задачу вибору функцій керування

$$\alpha(\xi) = \frac{Ze\lambda Ez}{m_0c^2},$$

яка відповідає амплітуді напруженості прискорюючого поля при резонансному прискоренні та функції $g(\xi)$ називають $''E-g''$ задачею.

3. Постановки задач. Аналіз різних характеристик прискорювачів заряджених частинок показує, що потенціальні можливості установок для отримання оптимальних вихідних характеристик використовуються не повністю. Для отримання таких характеристик, наприклад, в прискорювачах з дрейфовими трубками важливо визначити положення трубок (їх довжину, форму), при яких досягається максимальна інтенсивність пучка з заданими розкидами його кінцевого стану.

Задача оптимізації пучка іонів в лінійному прискорювачі є дуже складною проблемою. Тому дану задачу при її дослідженні можна розбити на декілька підзадач : розробка методів розрахунку оптимальних прискорюючих структур; радіальне фокусування іонів; врахування власного електростатичного поля пучка; розробка швидкодіючих чисельних алгоритмів розрахунку зовнішніх електромагнітних полів і т.д.

Сформулюємо загальні постановки деяких задач, які в комплексі вирішують вихідну задачу. Кожна з цих задач має окремий інтерес і має самостійне значення[3,5,6,11,12].

Задача 1. Для поздовжнього руху при заданому початковому розкиді по енергії та фазі визначити структуру прискорювача таким чином, щоб на виході енергетичний та фазовий розкиди пучка були мінімальні.

Задача 2. Визначити параметри прискорюючої структури таким чином, щоб захват іонів в процес прискорення по фазі та енергії був максимальним при заданому енергетично-фазовому розкиді в кінці прискорювача.

Задача 3. При заданому розкиді в кінці прискорювача підібрати розміри трубок дрейфу і величини прискорюючих та фокусуючих полів таким чином, щоб захват частинок за початковими координатами та їх швидкостями був максимальним.

Задача 4. Сформульовані вище задачі дослідити з врахуванням того, що компоненти електричного поля задовольняють рівняння Лапласа. При цьому компоненти вектора напруженості прискорюючого поля виражаються через параметри, що оптимізуються.

Задача 5. Оптимізація динаміки пучка з врахуванням сил кулонівської взаємодії. В якості критерію якості розглянути мінімізацію розкиду координат пучка в кінці прискорювача, а також визначити максимальну область захвату іонів в процес прискорення.

4. Вибір початкових наближень в "E – g " задачі. Запишемо рівняння руху заряджених частинок в електромагнітних полях. Будемо розглядати несиметричний випадок, тобто

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d\gamma}{d\xi} = \alpha(\xi)\cos\varphi\,, \\
&\tfrac{d\varphi}{d\xi} = \tfrac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}\,, \\
&\tfrac{d^2x}{d\xi^2} = \tfrac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[\left(-\tfrac{1}{2}\tfrac{d\alpha}{d\xi} + g(\xi)\right)x - \alpha(\xi)\tfrac{dx}{d\xi}\right]\cos\varphi\,, \\
&\tfrac{d^2y}{d\xi^2} = \tfrac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[\left(-\tfrac{1}{2}\tfrac{d\alpha}{d\xi} - g(\xi)\right)y - \alpha(\xi)\tfrac{dy}{d\xi}\right]\cos\varphi\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Сформулюємо "E-g" задачу. Знайти вигляд функцій $g(\xi)$ та $\alpha(\xi)$ таким чином, щоб пучок в кінці прискорювача був сфокусованим за рахунок фокусуючого поля, тобто функції $g(\xi)$.

Функція $g(\xi)$ визначається таким чином:

$$g(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial E_x(0,0,z)}{\partial x} - \frac{\partial E_y(0,0,z)}{\partial y}\right].$$

Тобто, як видно з запису, функція $g(\xi)$ задає асиметрію прискорюючого поля. Похідні $\frac{\partial E_x(0,0,z)}{\partial x}$, $\frac{\partial E_y(0,0,z)}{\partial y}$ задають швидкість відхилення складових E_x та E_y поля відповідно від осей OX та OY, а їх різниця дає саме цю асиметрію : перевагу одного напрямку над іншим. Беручи до уваги вище сказане, зрозуміло, що впливаючи на цю різницю можна добитися фокусування. Запишемо деякі критерії, що можна розглядати при розв'язуванні цієї задачі.

Задача 1. Мінімізація відхилення фазових координат.

Критерій для цієї постановки цієї задачі має вигляд :

$$\Phi(x,y,g) = \min_{g}\left\{x^2(T) + y^2(T)\right\}. \tag{11}$$

Задача 2. Максимізація інтервалу початкового значення фази.

Критерій має вигляд :

$$\Phi(\cdot) = \min_{\alpha,g}\ \max_{\varphi(0)\in[a,b]}\left\{x^2(T) + y^2(T)\right\}. \tag{12}$$

В цьому випадку ми мінімізуємо відхилення фазових координат, але при цьому захват частинок в процес прискорення відбувається з якомога ширшим діапазоном початкового значення фази.

Крім того, на фазові координати можуть накладатися обмеження вигляду [3]:

$$x, y \in \Gamma_\xi = \{x, y : |x| \leq \bar{x}(\xi), |y| \leq \bar{y}(\xi)\},$$

$$x, y \in \Phi_\xi = \left\{x, y : x^2 + y^2 \leq \bar{r}^2(\xi)\right\}, \quad (13)$$

$\xi \in [0, T]$. Для ефективної роботи оптимізаційних алгоритмів, які будуть розглянуті нижче, потрібно вибрати початкове наближення функції g, яка б доставляла якомога краще значення критерію якості. Розглянемо алгоритм, який можна використати для розв'язання цієї задачі:

1. Покладаємо $k = 0$. Розбиваємо інтервал [0,T] точками t_i на інтервали $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, i = \overline{0, N-1}$. На кожному з інтервалів Δt_i значення функції $g(\xi)$ дорівнює $g_i : |g_i| \leq c$, де c=const–визначає обмеження на $g(\xi)$ (Наприклад, всі g_i можуть дорівнювати 0).

2. Покладаємо $g_k^1 = c, g_k^2 = -c$.

3. Розв'язуємо дві задачі Коші і обчислюємо значення критерію якості : Φ^1, Φ^2.

4. Обчислюємо $\bar{g}_k = \frac{g_k^1 + g_k^2}{2}$.

5. Якщо $\Phi^1 \leq \Phi^2$, то покладаємо $g_k^2 = \bar{g}_k, g_k^1 = g_k^1$, інакше $g_k^1 = \bar{g}_k, g_k^2 = g_k^2$.

6. Якщо $|g_k^1 - g_k^2| < \varepsilon$, то покладаємо $g_k = \bar{g}_k$ і переходимо на крок 7, інакше на крок 3.

7. Якщо $k < N - 1$, то покладаємо $k = k + 1$ і йдемо на крок 2, інакше вихід з алгоритму.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.:Наука, 1973. – 631 с.

2. *Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В.* Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". – 197 с.

3. *Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985. –304 с.

4. *Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф.* Основы теории управления. – К.: Вища школа, 1975. – 328 с.

5. *Гаращенко Ф.Г.* Применение методов практической устойчивости к моделированию и управлению пучками заряженных частиц. // Автоматика, 1982, № 5, с. 42-48.

6. *Гаращенко Ф.Г.* Иследование задач практической устойчивости численными методами и оптимизация динамики пучков // Прикладная математика и механика, 1987. – Т.51, №5, с. 717-723.

7. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

8. *Капчинский И.М.* Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. – М.: Атомиздат, 1966. – 310 с.

9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – М.: Наука, 1967. – 460 с.

10. *Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А.* Методы вычислений. – К.: Вища школа, 1977. – 408 с.

11. *Овсянников Д.А.* Математические методы управления пучками. – Л.: Изд-во Ленингр.ун-та., 1980. – 228с.

12. *Овсянников Д.А.* Моделирование и оптимизация динамики пучков. – Л., 1990. – 310с.

13. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г, Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

14. *Горбунов В.К.* Метод параметризации задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – т. 19, №2. – С. 292-303.

15. *Гаращенко Ф.Г.* Недифференцируемые задачи структурно-параметрической оптимизации и проектирование ускоряющих и фокусирующих систем // Автоматика. – 1986. – №1. – С. 50-53.

16. *Гаращенко Ф.Г., Пичкур В.В.* Структурная оптимизация динамических систем на основе обобщенного принципа Беллмана // Проблемы управления и информатики. – 1997. – №6. – С. 6-13.

17. *Гаращенко Ф.Г.* Задачи структурной параметрической оптимизации разрывных динамических систем // Автоматика. – 1985. – № 2. – С. 37-42.

18. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. – М.: Наука, 1976. – 335с.

19. *Ладиков-Роев Ю.П., Самойленко Ю.И.* Структурная оптимизация регулирующих сред // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 1-2, – С. 101-108.

20. *Яковлев О.С.* Метод структурного синтеза нелинейных регуляторов // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 1-2, – С.211-223.

21. *Sirisena M.K.* A gradient method for computing optimal bang-bang controls. // Int. J. of Contr. – 1974. – Vol. 19, № 2. – P. 257-264.