УДК 517.95

©2012 р. М.М. Бокало, А.М. Цебенко

Львівський національний університет імені Івана Франка

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЕВОЛЮЦІЙНИМИ СИСТЕМАМИ ІЗ СИЛЬНИМ ВИРОДЖЕННЯМ В ПОЧАТКОВИЙ МОМЕНТ ЧАСУ

Досліджено задачу оптимального керування процесами, які описуються заданими на скінченому часовому промені лінійними еволюційними рівняннями із сильним виродженням в початковий момент часу. Доведено існування та єдиність оптимального керування, а також отримано співвідношення, які його характеризують. При певних додаткових обмеженнях на вихідні дані досліджуваної задачі її розв'язок є розв'язком інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

Optimal control problems for the processes described by the linear evolution equations on the bounded time interval, which degenerate in initial time moment, are examined. Existence and uniqueness of the optimal control are proved and some properties of one are established. In the special case, a solution to the problem can be derived from the Fredholm integral equation of the second kind.

Вступ. Теорія оптимального керування детермінованими системами, що описуються рівняннями з частинними похідними, багата різноманітними результатами і активно розвивається в наш час. Її основи вперше систематично описано в монографії [1]. Важливі результати цієї теорії у випадку еволюційних рівнянь, що задані на обмеженому часовому проміжку і ніде не вироджуються, викладені, зокрема, в працях [2] – [5]. Якщо ж рівняння задані на необмеженому знизу часовому проміжку (див. [6] і бібліографію там), то задачі оптимального керування системами, що описуються такими еволюційними рівняннями, розглядалися, як нам відомо, тільки в роботах [7], [8]. Тут ми розглянули проблему оптимального керування системами, стан яких визначається еволюційними рівняннями першого порядку за часовою змінною в гільбертовому просторі (зокрема, параболічного типу), які задані на скінченому часовому проміжку і сильно вироджуються в початковий момент часу. Сильне виродження рівнянь не допускає задання стандартних початкових умов, а їх потрібно замінити, наприклад, на обмеження поведінки розв'язку при $t \to +0$. Такого типу рівняння розглядалися в багатьох роботах (див., наприклад, [6], [9], [10]). Зауважимо, що рівняння, які задані на обмеженому знизу проміжку часу і сильно вироджуються в початковий момент, тісно пов'язані з рівняннями, які задані на необмеженому знизу часовому проміжку. Цей зв'язок детально описано, зокрема, в [6] (див. також [13]) і тут ми його використали для обґрунтування основних результатів.

В даній роботі доведено існування єдиного розв'язку задачі оптимального керування системами, що описуються еволюційними рівняннями, які сильно вироджуються в початковий момент часу, при відсутності стандартних початкових умов. Дослідження проведені для випадку фінального спостереження. Також отримані співвідношення, які характеризують оптимальне керування. В одному частковому випадку знаходження оптимального керування зведено до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, розв'язок якого можна знайти методом послідовних наближень.

1. Вихідні положення. Спочатку нагадаємо деякі потрібні нам далі позначення. Нехай P – який-небудь проміжок дійсної осі, а X – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і нормою $\|\cdot\|_X$. Під $C(P;X)$ розумітимемо лінійний простір, складений з функцій, які визначені на P, приймають значення в X та є неперервними. Через $L_2(P;X)$ позначатимемо гільбертів простір вимірних (класів) функцій $f : P \to X$, для яких $\|f(\cdot)\|_X \in L_2(P)$, зі скалярним добутком

$$(f,g)_{L_2(P;X)} := \int_P (f(t),g(t))_X\,dt.$$

Під $L_{2,\mathrm{loc}}(P;X)$ розумітимемо лінійний простір вимірних (класів) функцій, які визначені на P, приймають значення в X і їх звуження на довільний відрізок $[t_1,t_2] \subset P$ належать простору $L_2([t_1,t_2];X)$. Через $W_2^1(P;X)$ позначатимемо гільбертів простір функцій $f \in L_2(P;X)$, які мають узагальнені похідні f' в сенсі $D'(\mathrm{int}P;X)$ ($\mathrm{int}P$ – внутрішність проміжку P) з простору $L_2(P;X)$, зі скалярним добутком

$$(f,g)_{W_2^1(P;X)} := \int_P \{(f(t),g(t))_X +$$
$$+(f'(t),g'(t))_X\}\,dt.$$

Під $W_{2,\mathrm{loc}}^1(P;X)$ розумітимемо лінійний простір вимірних (класів) функцій, які визначені на P, приймають значення в X і їх звуження на довільний відрізок $[t_1,t_2] \subset P$ належать простору $W_2^1([t_1,t_2];X)$. Відомо [14], що $W_{2,\mathrm{loc}}^1(P;X) \subset C(P;X)$.

Далі через $\mathcal{L}(X,Y)$, де X,Y – банахові простори, позначаємо банахів простір лінійних неперервних операторів, які діють на X і приймають значення в Y, з операторною нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Під $\mathcal{L}(X)$ розуміємо простір $\mathcal{L}(X,X)$.

Тепер введемо позначення і припущення, які будемо використовувати у формулюванні задачі та основних результатів роботи. Нехай V і H – гільбертові простори над полем дійсних чисел з, відповідно, скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_V$ і $(\cdot,\cdot)$ та нормами $\|\cdot\|_V$ і $|\cdot|$. Припустимо, що простір V компактно і щільно вкладається в H, тобто, V є підмножиною H, замикання V за нормою H збігається з H, з будь-якої послідовності елементів з V, обмеженої за нормою простору V, можна виділити підпослідовність, яка збігається за нормою простору H, а також існує стала $\lambda_* > 0$ така, що $|v| \le \lambda_* \|v\|_V$ для будь-якого $v \in V$.

Нехай $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ – білінійна форма, яка володіє властивостями симетричності:

$$a(v,w) = a(w,v), \quad v,w \in V,$$

$V-$коерцитивності:

$$a(v,v) \ge \alpha \|v\|_V^2, \quad v \in V,$$

і неперервності:

$$|a(v,w)| \le \beta \|v\|_V \|w\|_V,\ v,w \in V,$$

де α і β – деякі додатні сталі (очевидно, що $\alpha \le \beta$).

Визначимо оператор $A : \mathcal{D}(A) \to H$ за таким правилом. Нехай $\mathcal{D}(A) := \{v \in V \,\big|\, |a(v,w)| \le c_v |w|,\ w \in V$ ($c_v \ge 0$ – стала, яка залежить від v)$\}$. Отож, якщо $v \in \mathcal{D}(A)$, то відображення $V \ni w \mapsto a(v,w) \in \mathbb{R}$ однозначно продовжується до лінійного неперервного функціоналу на H. Звідси за теоремою Ріса отримуємо існування для кожного $v \in \mathcal{D}(A)$ єдиного елемента $Av \in H$ такого, що

$$(Av,w) = a(v,w), \quad w \in V. \qquad (1)$$

Очевидно, що оператор A є лінійним, симетричним:

$$(Av,w) = (v,Aw), \quad v,w \in \mathcal{D}(A), \qquad (2)$$

і $V-$коерцитивним:

$$(Av,v) \ge \alpha \|v\|_V^2, \quad v \in \mathcal{D}(A). \qquad (3)$$

Зі сказанного випливає (див., наприклад, [12, Chapter IV]), що A – замкнений оператор в H (тобто володіє властивістю: якщо $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ – послідовність елементів з $\mathcal{D}(A)$ і елементи $v,w \in H$ такі, що $v_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} v$ і $Av_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} w$ в H, то $v \in \mathcal{D}(A)$ і $Av = w$) та вкладення $\mathcal{D}(A) \subset H$ є щільним.

Введемо на $\mathcal{D}(A)$ скалярний добуток

$$(v,w)_{\mathcal{D}(A)} = (v,w) + (Av,Aw), \quad v,w \in \mathcal{D}(A),$$

який породжує норму графіка

$$\|v\|^2 := |v|^2 + |Av|^2, \quad v \in \mathcal{D}(A).$$

Оскільки оператор A є замкненим, то простір $\mathcal{D}(A)$ з введеним скалярним добутком є гільбертовим. Також зі сказанного випливає, що $\mathcal{D}(A)$ компактно і щільно вкладається в H.

Як доведено, наприклад, в [12, Chapter IV], оператор $-A : \mathcal{D}(A) \to H$ є генератором аналітичної півгрупи $\{T(\tau) \equiv e^{-\tau A} \,\big|\, \tau \geq 0\}$ лінійних обмежених операторів на H і

$$e^{-\tau A}v = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m \tau}(v, v_m)\, v_m, v \in H, \ \tau \geq 0, \quad (4)$$

де $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ – послідовності, відповідно, дійсних чисел та елементів з $\mathcal{D}(A)$ такі, що

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_m \leq ...,$$

$$Av_m = \lambda_m v_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\{v_m\}_{m=1}^{\infty} \quad \text{– ортонормована база в} \quad H.$$

Очевидно, для кожного $m \in \mathbb{N}$ число λ_m – власне значення (взяте стільки разів, яка його кратність), а v_m – власний елемент, відповідний λ_m, оператора A.

На підставі рівності Парсеваля з (4) отримаємо

$$|e^{-\tau A}v|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\lambda_m \tau}|(v, v_m)|^2 \leq$$

$$\leq e^{-2\lambda_1 \tau} \sum_{m=1}^{\infty} |(v, v_m)|^2 = e^{-2\lambda_1 \tau}|v|^2,$$

$$v \in H, \ \tau \geq 0,$$

звідки маємо оцінку

$$\|e^{-\tau A}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq e^{\omega_0 \tau}, \quad \tau \geq 0, \quad (5)$$

де $\omega_0 := -\lambda_1 < 0$.

Нехай $S := (0, T]$, а φ – функція, яка задовольняє умови: $\varphi \in C([0, T])$, $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$, $\varphi(0) = 0$ і $\int_0^T [\varphi(t)]^{-1} dt = +\infty$.

Покладемо

$$\theta(t) := \int_T^t [\varphi(s)]^{-1} ds, \ t \in S. \quad (6)$$

і позначимо через θ^{-1} функцію, яка є оберненою до функції θ, заданої в (6).

Введемо ще позначення. Під $L_{2,\varphi}(S; X)$, де X – гільбертів простір, будемо розуміти гільбертів простір, складений з функцій $v \in L_2(S; X)$ таких, що $\int_S [\varphi(t)]^{-1} \|v(t)\|_X^2 \, dt < \infty$, зі скалярним добутком $(v, w)_{L_{2,\varphi}(S;X)} = \int_S [\varphi(t)]^{-1} (v(t), w(t))_X \, dt$. Нехай $W_{2,\varphi}^1(S; X)$ – гільбертів простір функцій $w \in W_{2,\mathrm{loc}}^1(S; X)$ таких, що $\int_S \left\{[\varphi(t)]^{-1}\|w(t)\|_X^2 + \varphi(t)\|w'(t)\|_X^2\right\} dt < \infty$, зі скалярним добутком $(v, w)_{W_{2,\varphi}^1(S;X)} = \int_S \left\{[\varphi(t)]^{-1}(v(t), w(t))_X + \varphi(t)(v'(t), w'(t))_X\right\} dt$. Тут і далі $[\varphi(t)]^{-1} := 1/\varphi(t), \ t \in S$.

Розглянемо задачу без початкових умов для еволюційного рівняння: для заданої функції $f \in L_{2,\varphi}(S; H)$ знайти функцію $y : S \to H$ таку, що

$$\varphi(t)\frac{dy}{dt} + Ay(t) = f(t), \quad t \in S, \quad (7)$$

$$y \in L_{2,\varphi}(S; H). \quad (8)$$

Цю задачу коротко називатимемо задачею (7),(8). Зауважимо, що вона є задачею $\mathbf{Q_2}$ з роботи [6] при $\mu = 0$, $q = 2$, а також $-A$ замість A.

Згідно з [6] *слабким розв'язком* задачі (7),(8) називають функцію $y \in C(S; H) \cap L_{2,\varphi}(S; H)$, яка задається формулою

$$y(t) = Lf(t) := \quad (9)$$

$$:= \int_0^t [\varphi(s)]^{-1} e^{-(\theta(t)-\theta(s))A} f(s)\, ds, \quad t \in S.$$

2. Формулювання задачі та основних результатів. Нехай U – гільбертів простір керувань зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_U$ і нормою $|\cdot|_U$; $B \in \mathcal{L}(U; L_{2,\varphi}(S; H))$ – деякий оператор. Через $B^* : L_{2,\varphi}(S; H) \to U$ позначимо оператор, спряжений до оператора B, тобто $(B^* f, v)_U = (f, Bv)_{L_{2,\varphi}(S;H)}$ для будь-яких $f \in L_{2,\varphi}(S; H)$, $v \in U$.

Припускаємо, що для кожного керування $v \in U$ стан системи визначається як слабкий розв'язок задачі без початкових умов

$$\varphi(t)\frac{dy(t; v)}{dt} + Ay(t; v) = g(t) + Bv(t), \quad t \in S, \quad (10)$$

$$y(v) \in L_{2,\varphi}(S;H), \qquad (11)$$

де $g \in L_{2,\varphi}(S;H)$ – задана функція, $Bv(t) := (Bv)(t)$, $t \in S$.

Нехай $N \in \mathcal{L}(U)$ – симетричний і коерцитивний оператор, тобто $(Nv,w)_U = (v,Nw)_U$ і $(Nv,v)_U \geq \nu\|v\|_U^2$ для будь-яких $v,w \in U$, де $\nu = \text{const} > 0$.

Введемо функціонал

$$J(v) = |y(T;v) - z_*|^2 + (Nv,v)_U, \quad v \in U,$$

де $y(\cdot;v)$ – розв'язок задачі (10),(11), z_* – який-небудь елемент з H.

Нехай U_∂ – опукла замкнена множина простору U.

Розглянемо *задачу оптимального керування*: знайти керування $u \in U_\partial$ таке, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v). \qquad (12)$$

Будь-яке таке значення u називається *оптимальним керуванням.*

Далі цю задачу коротко називатимемо *задачею* (12).

Метою даної роботи є вирішення таких проблем: (i) отримання умов існування глобального мінімуму функціоналу J; (ii) вивчення структури і властивостей рівнянь, які виражають ці умови.

Сформулюємо основні результати роботи.

Теорема 1. *Задача (12) має єдиний розв'язок (оптимальне керування) і він характеризується нерівністю*

$$\big(y(T;u) - z_*, y(T;v) - y(T;u)\big) +$$
$$+\big(Nu, v-u\big)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial. \qquad (13)$$

Теорема 2. *Нехай $z_* \in \mathcal{D}(A)$, $g \in L_{2,\varphi}(S;\mathcal{D}(A))$, $B(U_\partial) \subset L_{2,\varphi}(S;\mathcal{D}(A))$. Тоді оптимальне керування в задачі (12) характеризується співвідношеннями*

$$\varphi(t)\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = g(t) + Bu(t), \quad t \in S,$$

$$-\varphi(t)\frac{dp(t)}{dt} + Ap(t) = 0, \quad t \in S,$$
$$p(T) = y(T) - z_*,$$
$$\big(B^*p + Nu, v-u\big)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial, \qquad (14)$$

$$y \in W^1_{2,\varphi}(S;H) \cap L_{2,\varphi}(S;\mathcal{D}(A)),$$
$$p \in C^1(S;H) \cap C(S;\mathcal{D}(A)) \cap L_{2,\varphi}(S;H),$$
$$u \in U_\partial.$$

Наслідок 1. (*Нехай виконуються умови теореми 2 і, крім того, $U = L_{2,\varphi}(S;\mathcal{D}(A))$, $B = I$ (I – тотожній оператор), $Nv = \nu v$, $v \in U (\nu = const > 0)$, $U_\partial = U$. Тоді розв'язок задачі оптимального керування еволюційною системою без початкових умов (12) є розв'язком інтегрального рівняння*

$$\nu u(t)) + \int_S [\varphi(s)]^{-1} e^{(\theta(t)+\theta(s))A} u(s)\, ds =$$

$$= e^{\theta(t)A} z_* - \int_S [\varphi(s)]^{-1} e^{(\theta(t)+\theta(s))A} g(s)\, ds, \ \ t \in S, \qquad (15)$$

($e^{\theta(t)A} := e^{-|\theta(t)|A}$, $t \in S$, а θ визначено в (6)) та навпаки, причому для $\nu > (2\lambda_1)^{-1}$ рівняння (15) можна розв'язати методом послідовних наближень.

3. Обґрунтування основних результатів. Нехай $\widetilde{S} := (-\infty, 0]$. Введемо лінійний оператор Z, який взаємно однозначно переводить лінійний простір функцій $F := \{h : S \to H\}$ на лінійний простір функцій $\widetilde{F} := \{\widetilde{h} : \widetilde{S} \to H\}$ за правилом

$$Zh = \widetilde{h}, \quad \text{де} \quad \widetilde{h}(\tau) := h(\theta^{-1}(\tau)), \ \ \tau \in \widetilde{S},$$

тобто оператор Z функції з простору F ставить у відповідність функцію з $\widetilde{F}$, отриману з даної в результаті заміни змінної

$$\tau = \theta(t), \quad t \in S, \quad \tau \in \widetilde{S}. \qquad (16)$$

Зауважимо, що звуження оператора Z на підпростори $L_{2,\varphi}(S;H)$ і $W^1_{2,\varphi}(S;H)$ простору F є ізометрією на, відповідно, підпростори $L_2(\widetilde{S};H)$ та $W^1_2(\widetilde{S};H)$ простору $\widetilde{F}$. Покажемо це на прикладі пари просторів $L_{2,\varphi}(S;H)$ і $L_2(\widetilde{S};H)$. Нехай $y \in L_{2,\varphi}(S;H)$ і $\widetilde{y} = Zy$. Враховуючи (16) і, зокрема, співвідношення $dt = \varphi(t)d\tau$, маємо

$$\|y\|^2_{L_{2,\varphi}(S;H)} \equiv \int_S [\varphi(t)]^{-1} \|y(t)\|^2 dt =$$
$$= \int_{\widetilde{S}} \|\widetilde{y}(\tau)\|^2 d\tau \equiv \|\widetilde{y}\|^2_{L_2(\widetilde{S};V)}.$$

Звідси легко випливає те, що потрібно. Аналогічно перевіряємо правильність нашого твердження стосовно іншої пари просторів.

Позначимо $\widetilde{B} := Z|_{L_{2,\varphi}(S;H)} \circ B$, де $Z|_{L_{2,\varphi}(S;H)}$ – звуження оператора Z на простір $L_{2,\varphi}(S;H)$. Очевидно, що $\widetilde{B} \in \mathcal{L}(U; L_2(\widetilde{S};H))$.

Розглянемо задачу на знаходження оптимального керування системою, стан якої для кожного керування $v \in U$ визначається як слабкий розв'язок задачі без початкових умов

$$\frac{d\widetilde{y}(\tau;v)}{d\tau} + A\widetilde{y}(\tau;v) = \widetilde{g}(\tau) + \widetilde{B}v(\tau), \quad \tau \in \widetilde{S}, \tag{17}$$

$$\widetilde{y}(v) \in L_2(\widetilde{S};H), \tag{18}$$

де $\widetilde{g} := Zg \in L_2(\widetilde{S};H)$,
$\widetilde{B}v(\tau) := (Z|_{L_{2,\varphi}(S;H)}\, Bv)(\tau)$, $\tau \in S$.

Під слабким розв'язком цієї задачі розуміється функція $\widetilde{y}(v) \in C(\widetilde{S};H) \cap L_2(\widetilde{S};H)$, яка задається формулою

$$\widetilde{y}(\tau,v) = \widetilde{L}\big(\widetilde{g} + \widetilde{B}v\big)(\tau) :=$$

$$:= \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\tau-\gamma)A}\big\{\widetilde{g}(\gamma) + \widetilde{B}v(\gamma)\big\}\, d\gamma, \ \tau \in \widetilde{S}.$$

З теореми 2.9 роботи [6] випливає, що задача (17),(18) має слабкий розв'язок. Легко переконатися, використовуючи заміну змінних (16), що для будь-якого елемента v простору U і слабкого розв'язку $y(\cdot,v)$ задачі (10),(11) функція $\widetilde{y}(\cdot,v) := Z\widetilde{y(\cdot,v)}$ є слабким розв'язком задачі (17),(18) і навпаки.

Введемо функціонал

$$\widetilde{J}(v) = |\widetilde{y}(0;v) - z_*|^2 + (Nv,v)_U, \quad v \in U,$$

де $\widetilde{y}(\cdot;v)$ – розв'язок задачі (17),(18), і розглянемо таку задачу оптимального керування: знайти $\widetilde{u} \in U_\partial$ таке, що

$$\widetilde{J}(\widetilde{u}) = \inf_{v \in U_\partial} \widetilde{J}(v). \tag{19}$$

Цю задачу називатимемо *задачею* (19).

Легко бачити, що $\widetilde{J}(v) = J(v)$ для всіх $v \in U$, а отже, з існування єдиного розв'язку задачі (19) безпосередньо випливає існування єдиного розв'язку задачі (12). Існування ж єдиного розв'язку задачі (19) гарантується теоремою 1 роботи [8]. Це означає, що розв'язок задачі (12) існує та єдиний. Нерівність (13) безпосередньо випливає з нерівності в теоремі 1 роботи [8] і зв'язку між розв'язками задач (10),(11) та (17),(18). Отож, теорема 1 є правильною. Аналогічно доводиться правильність теореми 2 і наслідку 1, опираючись на теорему 2 і наслідок 1 роботи [8] та те, що $\widetilde{y} = Zy$, $\widetilde{p} = Zp$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными/ Ж.-Л. Лионс. // М.: Мир, 1972.
2. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределёнными параметрами / Бутковский А.Г. // М.: Наука, 1975.
3. *Balakrishnan V.* Semigroup theory and control theory/ Balakrishnan V. // Washington, 1965.
4. *Bermudez A.* Some applications of optimal control theory of distributed systems/A. Bermudez// Control, optimasation and calculus of variations. – 2002. – V.8. – P.195-218.
5. *Згуровский М.З.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями / Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н. // К.: Наукова думка, 2004.
6. *Bokalo M.* Linear evolution first-order problems without initial conditions / Mykola Bokalo and Alfredo Lorenzi // Milan Journal of Mathematics. – 2009. – V. 77. – 437-494.
7. *Бокало М.М.* Оптимальне керування еволюційними системами без початкових умов/ Бокало М.М. // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 85-113.
8. *Бокало М.М.* Задача оптимального керування еволюційними системами без початкових умов / Бокало М.М. // Нелінійні граничні задачі. – 2010. – Вып. 20. – С. 14-27.
9. *Freedman A.* Degenerate evolution equations in Hilbert space / Freedman A., Schuss Z. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 161. – P. 401-427.
10. *Горбачук М. Л.* О решениях эволюционных уравнений параболического типа с вырождением / Горбачук М. Л., Пивторак Н.И. // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, № 8. – С. 1317-1323.

11. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations /A. Pazy // Springer-Verlag, New York, 1983.

12. *Showalter R.E.* Hilbert space methods for partial differential equations/ R.E. Showalter // Monographs and studies in mathematics (Monographs in differential equations), Volume 1, Pitman, London, 1977.

13. *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations / Showalter R. E. // Amer. Math. Soc., Vol. 49, Providence, 1997.

14. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения/ Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас // М: Мир,1978.