УДК 517.929

©2012 р. Я.Й. Бігун, І.Д. Скутар

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

УСЕРЕДНЕННЯ В ОДНІЙ БАГАТОЧАСТОТНІЙ СИСТЕМІ ЗІ ЗВИЧАЙНИМИ ТА ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ І З ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМИ АРГУМЕНТАМИ

Розглянуто початкову задачу для рівняння коливання струни під дією збурення, яке описується багаточастотною системою диференціальних рівнянь з лінійно перетвореними аргументами. Обґрунтовано для цієї задачі метод усереднення за швидкими змінними.

The object of this paper is an initial problem for fluctuation of string under perturbation equation which is described by multi-frequency differential equation system with linearly transformed arguments. Averaging method by rapid changes for this problem is grounded.

1. Вступ. Системи диференціальних рівнянь із звичайними і частинними похідними є математичними моделями в задачах управління коливаннями, в яких один із об'єктів описується хвильовим рівнянням, а інший – диференціальним рівнянням зі звичайними похідними [1], струнного генератора і підсилювача із запізненням [2], при керуванні динамічною системою під дією високочастотних збурень [3], в задачах хімії [4] та інших.

У даній роботі розглядається задача коливання нескінченної струни під дією збурення, викликаного коливним процесом, який описується багаточастотною системою диференціальних рівнянь із запізненням. Запізнення задається за допомогою лінійно перетворених аргументів $\lambda_\nu \tau, \tau \geq 0, \lambda_\nu \in (0,1)$ в повільних змінних і $\theta_\nu \tau, \theta_\nu \in (0,1)$ в швидких змінних багаточастотної системи. Така задача з постійним запізненням досліджувалась в роботі [5], системи з лінійно перетвореним аргументом – в [6].

Багаточастотні системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = A(\tau, a, \varphi, \varepsilon),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, a)}{\varepsilon} + B(\tau, a, \varphi, \varepsilon),$$

де $a \in D$, D - обмежена область в R^n, $\varphi \in T^m, m \geq r, T^m$ – m-вимірний тор, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, з початковими і крайовими умовами досліджені в працях А. М. Самойленка і Р. І. Петришина, зокрема, в монографії [7]. Грунтуючись на оцінках відповідних осциляційних інтегралів у цих працях обгрунтовано метод усереднення за швидкими змінними на скінченному і нескінченному інтервалах.

Аналогічні задачі для одно- і багаточастотних систем із запізненням вивчались у працях А. М. Самойленка і Я. Й. Бігуна [8], Я. Й. Бігуна [9], І. М. Данилюка [10] та ін.

2. Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,\tau)u + f(x, \tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta, \varepsilon), \tag{1}$$

$$\frac{da}{d\tau} = A(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta, \varepsilon),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + B(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta, \varepsilon), \tag{2}$$

де $\tau \in [0, L], \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \varepsilon_0 \ll 1, a \in D \subset R^n, \varphi \in T^m, m \geq 1, \Lambda = (\lambda_1, .., \lambda_r), 0 < \lambda_1 < ... < \lambda_r \leq 1, a_\Lambda(\tau) = (a(\lambda_1 \tau), ..., a(\lambda_r \tau)); \Theta = (\theta_1, .., \theta_s), 0 < \theta_1 < ... < \theta_s \leq 1, \varphi_\Theta(s) = (\varphi(\theta_1 \tau), ..., \varphi(\theta_s \tau))$. Функція f і вектор-функції A, B 2π-періодичні за кожною з компонент векторної змінної φ_Θ. Змінні a_ν називаються повільними, φ_ν - швидкими.

Задано початкові умови:

$$u(x,0) = v(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = w(x), x \in R;$$

$$a(0,\varepsilon)=y,\varphi(0,\varepsilon)=\psi,y\in D_1\subset D,\psi\in R^m. \quad (3)$$

Зауважимо, що початкова множина для змінних a і φ є одноточковою.

Відповідна (1), (2) усереднена система рівнянь набуває вигляду

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\tau^2}=c^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}+b(x,\tau)\bar{u}+f_0(x,\tau,\bar{a}_\Lambda), \quad (4)$$

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau}=A_0(\tau,\bar{a}_\Lambda),$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+B_0(\tau,\bar{a}_\Lambda), \quad (5)$$

де

$$F_0(x,\tau,a_\Lambda)=\frac{1}{(2\pi)^{ms}}\int_0^{2\pi}F(x,\tau,a_\Lambda,\varphi_\Theta,0)d\varphi_\Theta,$$

$F=(f,A,B)$.

Усереднена система рівнянь (4), (5) залишається системою із запізненням, але вона істотно простіша, ніж (1),(2), оскільки рівняння для $\bar{u}$ і $\bar{a}$ не залежать від швидких змінних $\bar{\varphi}_\Theta$, а також тому, що знаходження $\bar{\varphi}$ зводиться до задачі інтегрування, якщо відомо $\bar{a}(\tau)$.

Задача полягає в доведені існування розв'язку системи рівнянь (1), (2) з початковими умовами (3) й оцінці відхилення розв'язків задач (1)-(3), (4)-(6) при $(x,\tau,\varepsilon)\in R\times[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$, якщо ε_0 – досить мале і початкові умови збігаються.

3. Умова резонансу частот. Для системи рівнянь без запізнення з m повільно змінними частотами $\omega_1(\tau),\ldots,\omega_m(\tau)$ умова резонансу в точці τ набуває вигляду

$$(k,\omega(\tau)):=k_1\omega_1(\tau)+...+k_m\omega_m(\tau)=0. \quad (6)$$

Узагальненням на випадок одного лінійно перетвореного аргументу в швидких змінних є умови вигляду [9]

$$(k,\omega(\tau))+\theta(l,\omega(\theta\tau))=0,||k||+||l||\neq 0.$$

Відповідна умова для системи рівнянь (2)-(3) така:

$$\gamma_l(\tau):=\sum_{\nu=1}^{s}\theta_\nu(l^{(\nu)},\omega(\theta_\nu\tau))=0, \quad (7)$$

$$l^{(\nu)}\in Z^m,||l||=\sum_{\nu=1}^{s}||l^{(\nu)}||.$$

Врахування в умові (7) запізнення в швидких змінних є принциповим, що можна прослідкувати на такому прикладі.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+cos(k\varphi_1+l\varphi_{2,\theta})$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau}=\frac{1+2\tau}{\varepsilon},\frac{d\varphi_2}{d\tau}=\frac{1+\tau}{\varepsilon},\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0.$$

Якщо $2k=l=2,\theta=0.5$, то в системі є резонанс при $\tau=0$, оскільки $\gamma_{12}(\tau)=0.5\tau$. При цьому

$$u(x,1,\varepsilon)-\bar{u}(x,1)=$$

$$=2\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\varepsilon}}}cosz^2dz=O(\sqrt{\varepsilon}),$$

що випливає з оцінки інтеграла Френеля [11]. Якщо ж $8k=-l=8,\theta=0.5$, то $\gamma_{1,-1}(\tau)=-3$ і резонанс в системі відсутній. Тоді

$$u(x,1,\varepsilon)-\bar{u}(x,1)=\frac{4\varepsilon}{3}\sin\frac{3}{4\varepsilon}=O(\varepsilon).$$

У кожному з цих випадків умова резонансу (7) не виконується. При обґрунтуванні методу усереднення важливою є умова "незастрягання" системи в малому околі резонансу. Достатньою умовою виходу системи із околу резонансу $\gamma_{kl}(\tau)=0$ є виконання нерівності

$$V(\tau)\neq 0,\tau\in[0,L], \quad (8)$$

де $V(\tau)$ – визначник Вронського порядку ms, побудований за системою функцій $\omega(\theta_1\tau),\ldots,\omega(\theta_s\tau)$. Наприклад, для одночастотної системи з одним лінійно перетвореним аргументом

$$V(\tau)=\begin{vmatrix}\omega(\tau) & \omega(z)\\ \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} & \theta\frac{d\omega(z)}{dz}\end{vmatrix},z=\theta\tau,\theta\in(0,1).$$

Якщо $m=1$ і $s=2$, то

$$V(\tau)=\begin{vmatrix}\omega(z_1) & \omega(z_2) & \omega(z_3)\\ \theta_1\frac{d\omega(z_1)}{dz_1} & \theta_2\frac{d\omega(z_2)}{dz_2} & \theta_3\frac{d\omega(z_3)}{dz_3}\\ \theta_1^2\frac{d^2\omega(z_1)}{dz_1^2} & \theta_2^2\frac{d^2\omega(z_2)}{dz_2^2} & \theta_3^2\frac{d^2\omega(z_3)}{dz_3^2}\end{vmatrix},$$

$z_\nu = \theta_\nu \tau$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \le 1$.

3. Обґрунтування методу усереднення. Покажемо, що при виконанні умови (8), аналогічної умові виходу з резонансу для багаточастотних систем систем без запізнення [7] і умові A в праці [12], можна отримати оцінку відхилення розв'язків, порядок якої $\alpha = (ms)^{-1}$.

Теорема. *Нехай виконуються умови:*

1) функції $\omega_\nu \in C^{sm-1}[0, L], \nu = 1, \dots, m$, і справджується нерівність (8);

2) для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ вектор-функція $F \in C^1_{\tau, a_\Lambda}(G, \sigma), G = R \times [0, L] \times D^s \times (0, \varepsilon_0]$;

3)$||F(x, \tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta, \varepsilon) - F(x, \tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta, 0)|| \le \sigma_2 \varepsilon^{\alpha_1}$, $\alpha_1 \ge \alpha$;

4) в області $G_1 = R \times [0, L] \times D^s$ для коефіцієнтів Фур'є вектор-функції F при $\varepsilon = 0$ виконується нерівність

$$\sum_{l \ne 0} \Big[\sum_{\nu=1}^{s} \theta_\nu ||l^{(\nu)}|| \sup_{G_1} ||F_l(\tau, a_\Lambda)|| +$$

$$+ \frac{1}{||l||_\Theta} (\sup_{G_1} || \frac{\partial F_l(\tau, a_\Lambda)}{\partial \tau} || +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \sup_{G_1} || \frac{\partial F_l(\tau, a_\Lambda)}{\partial a^{(\nu)}} ||) \Big] \le \sigma_3,$$

де $\|l\|_\Theta = \sum_{\nu=1}^{s} \theta_\nu \|l^{(\nu)}\|$;

5) $v \in C^2(R), w \in C^1(R)$;

6)$|b(x, \tau)| \le b_0$, при $x \in \mathbb{R}$ і $\tau \ge 0$;

7) існує єдиний розв'язок системи рівнянь (4), (5) з початковими умовами (3), причому компонента розв'язку $\bar{a} = \bar{a}(\tau), \bar{a}(0) = y \in D_1 \subset D$, лежить в D разом із деяким околом.

Тоді для досить малого $\varepsilon_0 > 0$ існує єдиний розв'язок задачі (2)-(4) такий, що для всіх $(x, \tau, \varepsilon) \in R \times [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$ виконується нерівність

$$||a(\tau, \varepsilon) - \bar{a}(\tau)|| +$$

$$+ ||\varphi(\tau, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon)|| +$$

$$+ |u(x, \tau, \varepsilon) - \bar{u}(x, \tau)| \le c_1 \varepsilon^\alpha, \qquad (9)$$

де $c_1 > 0$ і не залежить від ε.

Доведення. На підставі формули Даламбера із рівнянь (1) і (4) одержимо

$$u(x, \tau, \varepsilon) - \bar{u}(x, \tau) =$$

$$= \frac{1}{2c} \int_0^\tau \int_{x - c(\tau - t)}^{x + c(\tau - t)} \Big[b(z, t)(u(z, t, \varepsilon) - \bar{u}(z, t)) +$$

$$+ f(z, t, a_\Lambda, \varphi_\Theta, \varepsilon) - f(z, t, \bar{a}_\Lambda, \bar{\varphi}_\Theta, 0) \Big] dz dt +$$

$$+ \frac{1}{2c} \int_0^\tau \int_{x - c(\tau - t)}^{x + c(\tau - t)} [f(z, t, \bar{a}_\Lambda(t, \varepsilon), \bar{\varphi}_\Theta(t, \varepsilon), 0) -$$

$$- f_0(z, t, \bar{a}_\Lambda(t, \varepsilon))] dz dt.$$

При виконанні умов 1-3 і 7 теореми в роботі [13] встановлена оцінка

$$\|a(\tau, \varepsilon) - \bar{a}(\tau)\| + \|\varphi(\tau, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon)\| \le c_2 \varepsilon^\alpha \qquad (10)$$

коли $\tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і початкові умови для систем (2) і (5) збігаються.

Позначимо через $\Delta(\tau, \varepsilon)$ максимум модуля функції $u(z, \tau, \varepsilon) - \bar{u}(z, \tau)$ на відрізку $x - c(L - \tau) \le z \le x + c(L - \tau)$ при фіксованих $x \in \mathbb{R}, \tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

На підставі оцінки (11) і умов 2 і 3 одержимо

$$\Delta(\tau, \varepsilon) \le \frac{1}{2} L^2 (2 c_2 \sigma_1 + \sigma_2) \varepsilon^\alpha +$$

$$+ b_0 \int_0^\tau (\tau - t) \Delta(t, \varepsilon) dt +$$

$$+ \frac{1}{2c} \sum_{l \ne 0} \Big| \int_0^\tau dt \int_{x - c(\tau - t)}^{x + c(\tau - t)} f_l(z, t, a_\Lambda(t, \varepsilon), 0) \times$$

$$\times \exp \Big[i \sum_{\nu=1}^{s} (l^{(\nu)}, \varphi_\nu(\theta_\nu t, \varepsilon)) \Big] dz \Big|.$$

Останній доданок можна записати наступним чином

$$\frac{1}{2c} \sum_{l \ne 0} \Big| \int_0^\tau g_l(x, \tau, t, \varepsilon) \exp \Big[\frac{i}{\varepsilon} \int_0^t \gamma_l(t_1) dt_1 \Big] dt \Big|,$$

де

$$g_l(x,\tau,t,\varepsilon)=\int\limits_{x-c(\tau-t)}^{x+c(\tau-t)} f_l(z,t,a_\Lambda(t,\varepsilon),0)\times$$

$$\times\exp\left[i(l,\varphi_\Theta)-\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^t\gamma_l(t_1)dt_1\right)\right]dz.$$

Для функції g_l та її похідної нескладно одержати оцінки:

$$|g_l(x,\tau,t,\varepsilon)|\le 2x(\tau-t)\sup_{G_1}|f_l|\le$$

$$\le 2cL\sup_{G_1}|f_l|,$$

$$\left|\frac{\partial g_l(x,\tau,t,\varepsilon)}{\partial t}\right|\le$$

$$\le 2c(1+\sigma_1 L)\|l\|_\Theta\sup_{G_1}|f_l|+$$

$$+2cL(1+\sigma_1)\left(\sup_{G_1}\left|\frac{\partial f_l}{\partial t}\right|+\sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu\sup_{G_1}\left|\frac{\partial f_l}{\partial a_{\lambda_\nu}}\right|\right).$$

Для осциляційного інтеграла

$$I_l(x,\tau,\varepsilon)=\int\limits_0^\tau f(x,t,\varepsilon)\exp\left[\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^t\gamma_l(t_1)dt_1\right]dt$$

при виконанні умов 1 і 2 теореми справджується оцінка [13, 14]

$$\|I_l(x,\tau,\varepsilon)\|\le c_3\varepsilon^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{\|l\|_\Theta}\right)\sup_{G_1}\|f(x,t,\varepsilon)\|+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\|l\|_\Theta}\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial f(x,t,\varepsilon)}{\partial t}\right\|\right], \qquad (11)$$

де $c_3>0$ і не залежить від ε.

На підставі оцінки осциляційного інтеграла (11) для $\Delta(\tau,\varepsilon)$ маємо інтегральну нерівність

$$\Delta(\tau,\varepsilon)\le\frac{1}{2}(2c_2\sigma_1+\sigma_2)\varepsilon^\alpha+$$

$$+\frac{c_3\varepsilon^\alpha}{2c}\sum_{l\neq0}\left[\Big((2+\sigma_1)L+1\Big)\|l\|_\Theta\sup_{G_1}\|f_l\|+\right.$$

$$\left.+\frac{(1+\sigma_2)L}{\|l\|_\Theta}(\sup_{G_1}|\frac{\partial f_l}{\partial t}|+\sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu\sup_{G_1}|\frac{\partial f_l}{\partial a^{(\nu)}}|)\right]+$$

$$+b_0\int\limits_0^\tau(\tau-t)\Delta(\tau,\varepsilon)dt\le$$

$$\le c_4\varepsilon^\alpha+b_0\int\limits_0^\tau(\tau-t)\Delta(t,\varepsilon)dt,$$

де

$$c_4=\left[L^2(2c_2\sigma_1+\sigma_2)+\frac{c_3\sigma_3}{c}(1+(2+\sigma_1+\sigma_2)L)\right]/2.$$

Із нерівності Гронуола випливає, що

$$\Delta(\tau,\varepsilon)\le c_4\varepsilon^\alpha\exp\left[b_0\int\limits_0^\tau(\tau-t)dt\right]\le c_1\varepsilon^\alpha,$$

де $c_1=c_4\exp(b_0L^2)$. Одержана нерівність виконується для всіх $x\in\mathbb{R},\tau\in[0,L]$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, де ε_0 визначається при доведенні оцінок (10) і (11).

Як приклад розглянемо систему рівнянь з m частотами ($m\ge3$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos[\varphi_1+\dots+\varphi_m-$$

$$-p(\varphi_{1,\theta}+\dots+\varphi_{m,\theta})],$$

$$\frac{da}{d\tau}=\cos[\varphi_1+\dots+\varphi_m-p(\varphi_{1,\theta}+\dots+\varphi_{m,\theta})];$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau}=\frac{1}{\varepsilon},\quad \varphi_1(0)=0,$$

$$\frac{d\varphi_\nu}{d\tau}=\frac{1}{\varepsilon}(1-\tau^{\nu-1}+\tau^\nu-\tau^{m+\nu-2}+\tau^{m+\nu-1}),$$

$$\varphi_\nu(0)=0,\nu=2,\dots,m-1;$$

$$\frac{d\varphi_m}{d\tau}=\frac{1}{\varepsilon}(1-\tau^{m-1}-\tau^{2n-2}+a\tau^{2m-1}),\varphi_m(0)=0,$$

де $\theta\in(0,1)$, $p\theta=1$, $a=2m(1-\theta^{2m-1})^{-1}$.

При $\tau=0$ є резонанс частот, оскільки $\gamma_l(\tau)=2m\tau^{2m-1}$. Визначник Вронського

$$V(\tau)=2m^2(1-\theta^{m-1})^{m-1}\theta^{\frac{m(m-1)}{2}}\prod_{\nu=2}^{2m-1}\nu!\neq0,$$

умови теореми виконані і

$$u(x,\tau,\varepsilon)-\bar{u}(x,\tau)=$$

$$= \tau \int_0^\tau \cos \frac{t^{2m}}{\varepsilon} dt - \int_0^\tau t \cos \frac{t^{2m}}{\varepsilon} dt.$$

Скориставшись асимптотикою узагальненого інтеграла Френеля [11, с.154] при $\tau = 1$ і $x \in \mathbb{R}$ одержимо

$$u(x,1,\varepsilon) - \bar{u}(x,1) = \frac{\sqrt[2m]{\varepsilon}}{2m} \Big[\Gamma(\frac{1}{2m}) \cos(\frac{\pi}{4m}) -$$

$$- \sqrt[2m]{\varepsilon} \Gamma(\frac{1}{m}) \cos(\frac{\pi}{2m}) + \varepsilon \sin \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon^2) \Big] =$$

$$= O(\sqrt[2m]{\varepsilon})$$

при $\varepsilon \to 0$. Тут Γ – гамма-функція.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Журн. выч. матем. и матем. физики. — 2005. — **49**, № 5. — С. 815—825.

2. *Рубаник В.П.* Колебания сложных квазилинейных систем. — Минск: Изд-во "Университетское 1985. — 143 с.

3. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Анализ пространственных нелинейных колебаний струны. — ПММ, 1996. — Т. 60, Вып.1. — С. 88 — 101.

4. *Said S.E.H. Elnashaie, John R.* Grace Complexity, bifurcation and chaos in natural and man-made lumped and distributed systems // Chemical Engineering Science. — 2007. — **62**, № 13. — С. 3295—3325.

5. *Бігун Я.Й.* Усереднення в задачі про коливання струни і багаточастотної системи із запізненням // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 349. Математика. — Чернівці: Рута, 2007. — С. 14 — 17.

6. *Бигун Я.И.* Исследование методом усреднения колебания струны под действием многочастотных возмущений с запаздыванием // Вісн. Харківського нац-го ун-ту ім. В.Н. Каразіна. — Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. — Харків: Харківський нац. ун-т, 2011. — Вип. 16., №960. — С. 32—39.

7. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. — Київ: Наукова думка, 2004. — 475 с.

8. *Бигун Я.И., Самойленко А.М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. — 1999. — 35, № 1. — С. 8—14.

9. *Бігун Я.Й.* Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням // Укр. мат. журн. — 2007. — 59, №4. — С. 435–446.

10. *Данилюк І.М., Петришин Р.І.* Оцінка похибки методу усереднення на півосі початкової задачі для багаточастотної коливної системи вищого наближення із запізненням // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 421. Математика. — Чернівці: Рута, 2008. — С. 30–36.

11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974. — Т. 2. — 295 с.

12. *Арнольд В.И.* Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонанс // Докл. АН СССР. — 1965. — 161, № 1. — С. 9—12.

13. *Бігун Ярослав* Про усереднення початкової і крайової задачі з лінійно перетвореним аргументом // Математичний вісник НТШ. — 2008. — Т. 5. — С. 23—35.

14. *Петришин Р.І., Бігун Я.Й.* Про усереднення в системах із лінійно перетвореним аргументом в резонансному випадку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 421. Математика. — Чернівці: Рута, 2008. — С. 84—89.