УДК 517.9

©2012 р. С.І. Балога

Ужгородський національний університет

ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНОГО ТОРА ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У даній статті розглянуто питання існування інваріантної тороїдальної множини одного класу систем диференціальних рівнянь, визначених на прямому добутку m-вимірного тора і n-вимірного евклідового простору. Досліджено один клас нелінійних задач з малим збуренням, для якого умови існування інваріантної тороїдальної множини виконуються.

In this article of existence invariant toroidal set for system of differential equation of certain class, defined in direct product of m-measurable torus and n-measurable Euclidean is considered. Certain class of weakly perturbated nonlinear problems that satisfies the conditions of existence of invariant toroidal set is investigated.

Системи диференціальних рівнянь, що є розширенням динамічної системи на торі, описують процеси, що мають коливний характер. Важливим питанням теорії розширень динамічної системи на торі є встановлення умов існування інваріантних торів автономних систем диференціальних рівнянь, дослідження їх стійкості, а також питання їх існування і збереження при малих збуреннях. Фундаментальні дослідження в цьому напрямку проведено в роботах [1] і [2]. Дану статтю присвячено дослідженню умов існування інваріантної тороїдальної множини одного класу систем диференціальних рівнянь з малим збуренням.

Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

в якій $\varphi \in T^m$, $x \in R^n$, $a(\varphi)$ — ліпшицева векторна функція на m-вимірному торі T^m, 2π-періодична по кожній компоненті φ_j, $j = 1, 2, ..., m$. $\Lambda(\varphi)$ і $f(\varphi)$ — неперервні матрична та векторна 2π-періодичні по φ_j функції відповідно.

Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ розв'язок першого з рівнянь системи (1) такий, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, а через $\Omega^t_\tau(\varphi)$ — матрицант однорідної системи

$$\dot{x} = \Lambda(\varphi_t(\varphi))x \tag{2}$$

залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра. Покладемо

$$G(t,\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega^t_\tau(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le t, \\ \Omega^t_\tau(\varphi)(C(\varphi_\tau(\varphi)) - E), & \tau > t, \end{cases}$$

де $C(\varphi)$, $\varphi \in T^m$ — неперервна матрична функція, яка називається функцією Гріна-Самойленка системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = \Lambda(\varphi)x,$$

якщо

$$\|G(t,\tau,\varphi)\| \le Ke^{-\gamma|t-\tau|}, \tag{3}$$

для всіх $t, \tau \in R$, $\varphi \in T^m$, K і γ — деякі додатні сталі. Функція $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє систему (2) при $t \ne \tau$, а при $t = \tau$ вона має розрив першого роду зі стрибком

$$G(\tau + 0, \tau, \varphi) - G(\tau - 0, \tau, \varphi) = E.$$

Нехай Ω_φ — ω-гранична множина розв'язку $\varphi_t(\varphi)$ першого із рівнянь системи (1) такого, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$. Як відомо, наприклад із [2], Ω_φ непорожня множина для всіх $\varphi \in T^m$ внаслідок компактності фазового простору T^m, $\Omega = \bigcup\limits_{\varphi\in T^m} \Omega_\varphi$. Нехай $A = \bigcup\limits_{\varphi\in T^m} A_\varphi$, де A_φ — α-гранична множина розв'язку першого із рівнянь системи (1), $\varphi_0(\varphi) = \varphi$.

Нехай для всіх $\varphi \in T^m$ існує границя

$$\lim_{|t|\to+\infty} \Lambda(\varphi_t(\varphi)) = \Lambda. \tag{4}$$

Це означає, що матрична функція $\Lambda(\varphi)$ на множинах Ω і A є сталою матрицею $\Lambda(\varphi) =$

Λ для всіх $\varphi \in \Omega \cup A$. Крім того, будемо розглядати випадок, коли матриця $\Lambda(\varphi)$ блочно-діагонального вигляду:

$$\Lambda(\varphi) = \begin{pmatrix} \Lambda_-(\varphi) & 0 \\ 0 & \Lambda_+(\varphi) \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Поряд із системою (1) розглянемо збурену систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = (\Lambda(\varphi) + B(\varphi))x + f(\varphi). \quad (6)$$

Сформулюємо спочатку дві теореми [3], які встановлюють умови існування інваріантних тороїдальних множин для систем рівнянь (1) і (6).

Теорема 1. *Якщо дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці* Λ *відмінні від нуля:* $Re(\lambda_j(\Lambda)) \neq 0$, $(j = 1,2,...,n)$, *причому* $Re(\lambda_j(\Lambda)) < 0$, $j = 1,2,...,k$ *і* $Re(\lambda_j(\Lambda)) > 0$, $j = k+1,...,n$, *то для довільної неперервної* 2π*-періодичної по* φ_j, $j = 1,2,...,m$ *функції* $f(\varphi)$ *система (1) має інваріантну тороїдальну множину* $x = u(\varphi)$.

Теорема 2. *Нехай для всіх* $\varphi \in T^m$ *існує границя (4) і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці* Λ *відмінні від нуля:* $Re(\lambda_j(\Lambda)) \neq 0$ $(j = 1,2,...,n)$, *причому* $Re(\lambda_j(\Lambda)) < 0$ *при* $j = 1,2,...,k$, $Re(\lambda_j(\Lambda)) > 0$ *при* $j = k+1,...,n$. *Тоді існує таке* $b > 0$, *що для будь-якої неперервної* 2π*-періодичної по* φ_j, $j = 1,2,...,m$ *матриці* $B(\varphi)$ *такої, що* $\max\limits_{\varphi\in T^m} \|B(\varphi)\| \leq b$, *система (6) має інваріантну тороїдальну множину.*

В [4] доведено існування асимптотично стійкої інваріантної тороїдальної множини систем (1) і (6) у випадку від'ємних дійсних частин всіх власних чисел граничної матриці Λ.

Розглянемо збурену нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + a_1(\varphi, x),\ \dot{x} = F(\varphi, x) + \Lambda(\varphi)x, \quad (7)$$

в якій $\varphi \in T^m$, $a(\varphi) \in C^1(T^m)$, $a_1(\varphi,x) \in C^{(1,0)}_{Lip(x)}(\varphi \in T^m, x \in R^n)$, $\Lambda(\varphi) \in C^1(T^m)$, $F(\varphi,x) \in C^{(1,2)}_{\varphi,x}(\varphi \in T^m, x \in R^n)$, $\|x\| \leq h$, $\Lambda(\varphi)$ — вигляду (5). Запишемо цю систему у вигляді

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + a_1(\varphi, x), \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi, x)x + f(\varphi), \quad (8)$$

де $f(\varphi) = F(\varphi, 0)$, $B(\varphi, x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial F(\varphi,\, \tau x)}{\partial(\tau x)} d\tau$.

Наведемо достатні умови існування інваріантного многовиду системи (7).

Цей многовид шукатимемо методом послідовних наближень як границю послідовності

$$M_k:\ x = u^{(k)}(\varphi),\ \varphi \in T^m,\ k = 1,2,...,$$

кожна з яких є інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь:

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi} = a(\varphi) + a_1(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi)), \\ &\dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi))x + f(\varphi), \end{aligned} \qquad (9)$$

тобто многовид

$$x = u^{(k)}(\varphi) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{G}(0, s, \varphi, \Lambda + B_{k-1}) f(\varphi_s^{(k-1)}(\varphi)) ds, \qquad (10)$$

де $\varphi_t^{(k-1)}(\varphi)$ розв'язок системи (9) такий, що $\varphi_0^{(k-1)}(\varphi) = \varphi$. За початковий многовид M_0 візьмемо многовид $x \equiv 0$. Оскільки для незбуреної системи (1), як і при доведенні теореми 1, функція Гріна-Самойленка системи рівнянь (2)

$$G(t, \tau, \varphi) = \begin{cases} diag(\Omega^t_\tau(\varphi, \Lambda_-), 0), & t \geq \tau, \\ -diag(0, \Omega^t_\tau(\varphi, \Lambda_+)), & t < \tau. \end{cases}$$

допускає оцінку (3), то легко встановити, як і при доведенні теореми 2, що функція Гріна-Самойленка системи рівнянь

$$\dot{x} = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), 0))x$$

допускає оцінку

$$\|G(t, \tau, \varphi, \Lambda + B_0)\| \leq K_1 e^{-\gamma_1 |t-\tau|}, \qquad (11)$$

для всіх t, $\tau \in R$, $\varphi \in T^m$, K_1 і γ_1 — деякі додатні сталі, якщо тільки

$$\max_{\varphi\in T^m} \|B(\varphi, 0))\| \leq b_0,$$

де b_0 — достатньо мале. Позначимо через $C'(T^m)$ підпростір $C(T^m)$, утворений функціями $u(\varphi)$, для яких функція $u(\varphi_t(\varphi))$ неперервно диференційовна по t при всіх $t \in$

$R,\ \varphi\in T^m$. З оцінки (11) випливає [1], що існує симетрична матрична функція $S(\varphi)\in C^{'}(T^m)$, яка задовольняє нерівність

$$\langle(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi_i}a_i(\varphi)-S(\varphi)(\Lambda^*(\varphi)+B^*(\varphi,0))-$$
$$-(\Lambda(\varphi)+B(\varphi,0))S(\varphi))x,x\rangle\leq-\|x\|^2.$$

Оскільки $a(\varphi)\in C^1(T^m)$ та $\Lambda(\varphi)+B(\varphi,0)\in C^1(T^m)$, випливає, що $\varphi_t(\varphi)$ і $\Omega_\tau^t(\varphi)$ є неперервно диференційовними по φ на торі T^m функціями. Врахувавши, що неперервна диференційовність матричної функції $S(\varphi)$ безпосередньо залежить від властивостей гладкості матриціанта $\Omega_\tau^0(\varphi)\in C^1(T^m)$ та розв'язку $\varphi_t(\varphi)\in C^1(T^m)$, то $\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi_j}$ є неперервними функціями для всіх $\varphi\in T^m$, $j=1,...,m$, тобто $S(\varphi)\in C^1(T^m)$. Додаючи до координат $a_i(\varphi),\ i=1,...,m$ векторфункції $a(\varphi)$ координати $a_i^{(1)}(\varphi,0)$ векторфункції $a_1(\varphi,0)$ одержимо

$$\langle(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi_i}(a_i(\varphi)+a_i^{(1)}(\varphi,0))-S(\varphi)(\Lambda^*(\varphi)+$$
$$+B^*(\varphi,0))-(\Lambda(\varphi)+B(\varphi,0))S(\varphi))x,x\rangle\leq$$
$$\leq-\|x\|^2+\left\|\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi_i}a_i^{(1)}(\varphi,0)\right\|\|x\|^2\leq$$
$$\leq-(1-\|a_1(\varphi,0)\|\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}})\|x\|^2.$$

З останньої нерівності видно, що вибір числа $\varepsilon_0>0$, яке задовольняє нерівність $\beta=1-\varepsilon_0P>0$, де

$$P=\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

гарантує від'ємну визначеність похідної квадратичної форми $V(\varphi,x)=\langle S(\varphi)x,x\rangle$, обчисленої вздовж розв'язків збуреної системи

$$\dot\varphi=a(\varphi)+a_1(\varphi,0),\ \dot x=-(\Lambda^*(\varphi)+B^*(\varphi,0))x,$$

при умові $\|a_1(\varphi,0)\|\leq\varepsilon_0$. Таким чином, функція Гріна-Самойленка системи

$$\dot x=(\Lambda(\varphi_t^{(0)}(\varphi))+B(\varphi_t^{(0)}(\varphi),0))x,$$

де $\varphi_t^{(0)}(\varphi)-$ розв'язок системи

$$\dot\varphi=a(\varphi)+a_1(\varphi,0)$$

такий, що $\varphi_0^{(0)}(\varphi)=\varphi$, допускає оцінку

$$\left\|\widetilde{G}(t,\tau,\varphi,\Lambda+B_0)\right\|\leq K_1(\varepsilon_0)e^{-\gamma_1(\varepsilon_0)|t-\tau|},\qquad(12)$$

$t,\tau\in R,\ \varphi\in T^m$, якщо тільки $\varepsilon_0>0$ таке, що $\|a_1(\varphi,0)\|\leq\varepsilon_0$. Враховуючи, що додатні сталі $K_1(\varepsilon_0)$ і $\gamma_1(\varepsilon_0)$ представляються безпосередньо через $S(\varphi)$, матричну функцію $\Lambda(\varphi)+B(\varphi,0)$ та β [1, §2.10], то вони залежать лише від ε_0. Тоді на основі теореми 2 робимо висновок, що тороїдальний многовид $x=u^{(1)}(\varphi)$ системи

$$\dot\varphi=a(\varphi)+a_1(\varphi,0),\ \dot x=(\Lambda(\varphi)+B(\varphi,0))x+f(\varphi)$$

існує і має вигляд

$$x=u^{(1)}(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{G}(0,s,\varphi,\Lambda+B_0)f(\varphi_s^{(0)}(\varphi))ds.$$

За многовид M_2 візьмемо інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь

$$\dot\varphi=a(\varphi)+a_1(\varphi,u^{(1)}(\varphi)),$$
$$\dot x=(\Lambda(\varphi)+B(\varphi,u^{(1)}(\varphi)))x+f(\varphi),$$

а саме,

$$x=u^{(2)}(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{G}(0,s,\varphi,\Lambda+B_1)f(\varphi_s^{(1)}(\varphi))ds.$$

Якщо таким чином ми побудували многовиди $M_1,M_2,...,M_{k-1}$, то за многовид M_k беремо інваріантний тороїдальний многовид (10) системи рівнянь (9). Враховуючи оцінки для функції Гріна-Самойленка $\widetilde{G}(t,\tau,\varphi,\Lambda+B_k)$ на кожному кроці, можна вказати таке $\varepsilon>0$, що для будь-якого k :

$$\left\|\widetilde{G}(t,\tau,\varphi,\Lambda+B_k)\right\|\leq K_1(\varepsilon)e^{-\gamma_1(\varepsilon)|t-\tau|},\quad(13)$$

$t,\tau\in R,\ \varphi\in T^m$. Покажемо, що таким методом можна побудувати інваріантний многовид системи (7). Для цього треба переконатись в тому, що можна побудувати функцію

$u^{(k)}(\varphi)$ для будь-якого $k = 1,2,...$, довести рівномірну збіжність $u^{(k)}(\varphi) \rightrightarrows u(\varphi)$, $\varphi \in T^m$ і показати, що $x = u(\varphi)$ задає інваріантний тороїдальний многовид вихідної системи (7).

Нехай $\max\limits_{\varphi\in T^m} \|F(\varphi,0))\| = m$,

$$\max_{\varphi\in T^m,\ \|x\|\le h} \|B(\varphi,x))\| = b_0.$$

Із (10) випливає нерівність

$$\left\|u^{(1)}(\varphi)\right\| \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\|\widetilde{G}(0,s,\varphi,\Lambda+B_0)\right\| \left\|f(\varphi_s^0(\varphi))\right\| ds$$

або, враховуючи оцінку (13),

$$\max_{\varphi\in T^m} \left\|u^{(1)}(\varphi)\right\| \le \frac{2K_1(\varepsilon)}{\gamma_1(\varepsilon)} \max_{\varphi\in T^m} \|f(\varphi)\|.$$

Вважаємо, що $\gamma_1(\varepsilon)h > 2K_1(\varepsilon)m$, тому

$$\max_{\varphi\in T^m} \left\|u^{(1)}(\varphi)\right\| < h. \tag{14}$$

Нехай для $u^{(j)}(\varphi)$, $j = 1,2,...,k-1$ нерівність (14) виконується. Тоді для $j = k$ маємо:

$$\max_{\varphi\in T^m} \left\|u^{(k)}(\varphi)\right\| \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\|\widetilde{G}(0,s,\varphi,\Lambda+B_{k-1})\right\| \left\|f(\varphi_s^{(k-1)}(\varphi))\right\| ds \le$$

$$\le \frac{2K_1(\varepsilon)}{\gamma_1(\varepsilon)} \max_{\varphi\in T^m} \|f(\varphi)\|.$$

За індукцією робимо висновок: якщо $\gamma_1(\varepsilon)h > 2K_1(\varepsilon)m$, то для кожного $k = 1,2,...$ функцію $u^{(k)}(\varphi)$ можна побудувати, а, отже, можна побудувати і множину M_k, що є інваріантною тороїдальною множиною системи (9). Враховуючи оцінку (13) та з того, що $a(\varphi) + a_1(\varphi,u^{(k-1)}(\varphi)) \in C^1(T^m)$, $\Lambda(\varphi) + B(\varphi,u^{(k-1)}(\varphi)) \in C^1(T^m)$ та $f(\varphi) \in C^1(T^m)$ випливає, що функція $u^{(k)}(\varphi)$ задовольняє умови теореми про гладкість інваріантного тора [2, §3.12], а тому для кожного $k = 1,2,...$ $u^{(k)}(\varphi) \in C^1(T^m)$. Встановимо умови збіжності послідовності $u^{(k)}(\varphi)$.

Оцінимо різницю $v^{(k+1)}(\varphi) = u^{(k+1)}(\varphi) - u^{(k)}(\varphi)$. Оскільки функції $u^{(k)}(\varphi)$ гладкі, то вони задовольняють рівність

$$\frac{\partial u^{(k)}(\varphi)}{\partial\varphi}(a(\varphi) + a_1(\varphi,u^{(k-1)}(\varphi))) =$$

$$= (\Lambda(\varphi) + B(\varphi,u^{(k-1)}(\varphi)))u^{(k)}(\varphi) + f(\varphi),$$

для будь-якого $\varphi \in T^m$ та $k = 1,2,...$ Звідси випливає, що функція $v^{(k+1)}(\varphi)$ задовольняє рівність

$$\frac{\partial v^{(k+1)}(\varphi)}{\partial\varphi}(a(\varphi) + a_1(\varphi,u^{(k)}(\varphi))) =$$

$$= (\Lambda(\varphi) + B(\varphi,u^{(k)}(\varphi)))v^{(k+1)}(\varphi) + f^{(k)}(\varphi),$$

де

$$f^{(k)}(\varphi) =$$

$$= (B(\varphi,u^{(k)}(\varphi)) - B(\varphi,u^{(k-1)}(\varphi)))u^{(k)}(\varphi) -$$

$$-\frac{\partial u^{(k)}(\varphi)}{\partial\varphi}(a_1(\varphi,u^{(k)}(\varphi)) - a_1(\varphi,u^{(k-1)}(\varphi))),$$

а тому $x = v^{(k+1)}(\varphi)$, $\varphi \in T^m$ є інваріантним тором системи рівнянь

$$\dot\varphi = a(\varphi) + a_1(\varphi,u^{(k)}(\varphi)),$$

$$\dot x = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi,u^{(k)}(\varphi))x + f^{(k)}(\varphi). \tag{15}$$

Функції $\frac{\partial u^{(k)}(\varphi)}{\partial\varphi}$ неперервні на компактній множині, тому для довільного k існує додатнє M таке, що $\|\frac{\partial u^{(k)}(\varphi)}{\partial\varphi}\| \le M$. Припускаючи, що функція $B(\varphi,x)$ ліпшицева по x зі сталою Ліпшиця L і враховуючи, що функції $\frac{\partial u^{(k)}(\varphi)}{\partial\varphi}$ обмежені, а функція $a_1(\varphi,x)$ - ліпшицева по x зі сталою Ліпшиця $\widetilde{L}$, правильна оцінка

$$\left\|v^{(k+1)}(\varphi)\right\| \le \frac{2K_1(\varepsilon)}{\gamma_1(\varepsilon)} \max_{\varphi\in T^m} \left\|f^{(k)}(\varphi)\right\| \le$$

$$\le \frac{2K_1(\varepsilon)}{\gamma_1(\varepsilon)}(\frac{2K_1(\varepsilon)}{\gamma_1(\varepsilon)}mL + M\widetilde{L}) \left\|v^{(k)}(\varphi)\right\| \le$$

$$\le \frac{2K_1(\varepsilon)}{\gamma_1(\varepsilon)}(hL + M\widetilde{L}) \left\|v^{(k)}(\varphi)\right\|.$$

Отже, вважаючи, що константи Ліпшиця L і $\widetilde{L}$ настільки малі, що

$$\frac{2K_1(\varepsilon)}{\gamma_1(\varepsilon)}(hL + M\widetilde{L}) < 1,$$

робимо висновок про рівномірну збіжність послідовності функцій $\{u^{(k)}(\varphi)\}$.

Покладемо $\lim\limits_{k\to\infty} u^{(k)}(\varphi)=u(\varphi)$.

Переконаємося, що многовид $x=u(\varphi)$ є інваріантним многовидом вихідної системи. Позначимо через $\varphi_t^*(\varphi)$ розв'язок системи

$$\dot{\varphi}=a(\varphi)+a_1(\varphi,u(\varphi))$$

такий, що $\varphi_0^*(\varphi)=\varphi$.

Перейшовши до границі, коли $k\to\infty$ в рівності (10), бачимо, що функція $u(\varphi)$ має представлення

$$x=u(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{G}(0,s,\varphi,\Lambda+B)f(\varphi_s^{(*)}(\varphi))ds,$$

в якому $\widetilde{G}(t,\tau,\varphi,\Lambda+B)$ — функція Гріна-Самойленка системи

$$\dot{x}=[\Lambda(\varphi_t^*(\varphi))+B(\varphi_t^*(\varphi),u(\varphi_t^*(\varphi)))]x.$$

Отже, $u(\varphi_t^*(\varphi))$ для будь-якого $\varphi\in T^m$ задовольняє рівність

$$\dot{u}(\varphi_t^*(\varphi))=[\Lambda(\varphi_t^*(\varphi))+$$

$$+B(\varphi_t^*(\varphi),u(\varphi_t^*(\varphi)))]u(\varphi_t^*(\varphi))+f(\varphi_t^*(\varphi)),$$

а тому многовид $x=u(\varphi)$ є інваріантним многовидом системи (7). Таким чином, має місце теорема.

Теорема 3. *Нехай для всіх $\varphi\in T^m$ існує границя (4) і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці Λ відмінні від нуля $Re\lambda_j(\Lambda)\neq 0$, $(j=1,2,...,n)$, причому $Re\lambda_j(\Lambda)<0$, при $j=1,2,...,k$ і $Re\lambda_j(\Lambda)>0$, при $j=k+1,...,n$. Тоді існують такі сталі $b_0>0$, $m>0$, $\varepsilon>0$ і достатньо малі сталі Ліпшиця L і $\widetilde{L}$, що для будь-якої матриці $F(\varphi,x)\in C^{(1,2)}_{\varphi,x}(\varphi\in T^m,x\in R^n)$, $\|x\|\leq h$, такої, що $\max\limits_{\varphi\in\ T^m}\|F(\varphi,0)\|=m$,*

$$\max_{\varphi\in\ T^m,\ \|x\|\leq h}\|B(\varphi,x)\|=b_0$$

і

$$\left\|B(\varphi,x')-B(\varphi,x'')\right\|\leq L\left\|x'-x''\right\|,$$

де $B(\varphi,x)=\int\limits_0^1\frac{\partial F(\varphi,\ \tau x)}{\partial(\tau x)}d\tau$, для будь-якої функції $a(\varphi)\in C^1(T^m)$ і для будь-якої функції $a_1(\varphi,x)\in C^{(1,0)}_{Lip(x)}(\varphi\in T^m,x\in R^n)$ такої, що

$$\max_{\varphi\in\ T^m,\|x\|\leq h}\|a_1(\varphi,x)\|\leq\varepsilon,$$

$$\left\|a_1(\varphi,x')-a_1(\varphi,x'')\right\|\leq\widetilde{L}\left\|x'-x''\right\|,$$

система (7) має інваріантний тороїдальний многовид.

Зауважимо, якщо дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці Λ від'ємні [5], то інваріантний многовид системи (7) є асимптотично стійким.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — К.: Наук. думка, 1990. — 272 с.

2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

3. *Балога С. І., Король І. І., Питьовка О. Ю.* Інваріантні многовиди одного класу систем диференціальних рівнянь // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23, № 1. – С.4–12.

4. *Перестюк М. О., Балога С. І.* Існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – Т. 11, №4. – 2008. – С.520–529.

5. *Перестюк М. О., Фекета П. В.* Існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2009. – Вип. 18. – С.106–112.