УДК 517.988.6

©2011 р. В.Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

# УМОВИ ОБМЕЖЕНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ $x'' + F(x', x) = y(t)$

Наведено умови існування обмежених на $\mathbb{R}$ розв'язків нелінійного диференціального рівняння $x'' + F(x', x) = y(t),\ t \in \mathbb{R}$.

We obtain a conditions for the existence of bounded on the $\mathbb{R}$ solutions of nonhnear differential equation $x'' + F(x', x) = y(t),\ t \in \mathbb{R}$.

**1. Основний об'єкт досліджень.** Позначимо через $C^0$ банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ із нормою

$$\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|,$$

а через $C^m$, де $m \in \mathbb{N}$, – банаховий простір елементів $x$ простору $C^0$, для кожного з яких $\frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^m x}{dt^m} \in C^0$, з нормою

$$\|x\|_{C^m} = \sup_{k=\overline{0,m}} \left\| \frac{d^k x}{dt^k} \right\|_{C^0}.$$

Тут $\frac{d^0 x}{dt^0} = x$.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F\left(\frac{dx}{dt}, x\right) = h(t),\ t \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

де $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – неперервна функція і $h \in C^0$.

У цьому рівнянні функція $F$ може бути недиференційовною в усіх точках множини $\mathbb{R}^2$.

Нас цікавитимуть умови існування обмежених розв'язків рівняння (1).

Зазначимо, що нелінійні диференціальні рівняння другого порядку були об'єктом досліджень багатьох математиків (див., наприклад, [1]–[6]). Особлива увага була приділена з'ясуванню умов існування періодичних розв'язків цих рівнянь.

**2. Основний результат.** При дослідженні рівняння (1) будемо використовувати лінійний оператор $L_{k_1,k_2} : C^2 \to C^0$, що визначається рівністю

$$(L_{k_1,k_2}x)(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + k_1\frac{dx(t)}{dt} + k_2x(t), \qquad (2)$$

де $k_1$ і $k_2$ – такі дійсні числа, що цей оператор має неперервний обернений $L^{-1}_{k_1,k_2}$, і $x \in C^2$. Множину всіх таких операторів позначимо через $\mathcal{E}$.

**Теорема 1.** *Нехай для кожного числа $H > 0$ існують таке число $r > 0$ і оператор $L_{k_1,k_2} \in \mathcal{E}$, що виконується нерівність*

$$\max_{|x_1|\leqslant r,\ |x_2|\leqslant r} \left| F(x_1, x_2) - (k_1x_1 + k_1x_2) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{\left\| L^{-1}_{k_1,k_2} \right\|_{L(C^0,C^1)}} - H. \qquad (3)$$

*Тоді для кожної функції $h \in C^0$ рівняння (1) має хоча б один розв'язок $x \in C^2$.*

Це теорема – окремий випадок теореми про існування обмежених розв'язків нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з використанням локальних лінійних апроксимацій рівнянь [7].

Щоб можна було застосовувати теорему 1 до рівняння (1), потрібно знати, коли оператор $L_{k_1,k_2} : C^2 \to C^0$ має обернений неперервний оператор $L^{-1}_{k_1,k_2}$, зображення оператора $L^{-1}_{k_1,k_2}$ і норму $\left\| L^{-1}_{k_1,k_2} \right\|_{L(C^0,C^1)}$. Тому далі наведемо умови неперервної оборотності оператора $L_{k_1,k_2}$, з'ясуємо, в якому вигляді подається оператор $L^{-1}_{k_1,k_2}$, і знайдемо для цього оператора норму $\left\|L^{-1}_{k_1,k_2}\right\|_{L(C^0,C^1)}$.

**3. Умови оборотності $L_{k_1,k_2}$ і зображення $L^{-1}_{k_1,k_2}$.** Розглянемо квадратне рівняння

$$\lambda^2 + k_1\lambda + k_2 = 0.$$

Розв'язками цього рівняння є дійсні числа

$$\lambda_1 = \frac{-k_1 - \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2}, \tag{4}$$

$$\lambda_2 = \frac{-k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2}, \tag{5}$$

якщо

$$k_1^2 - 4k_2 \ge 0,$$

і комплексні числа

$$\lambda_1 = \frac{-k_1 - i\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2}, \tag{6}$$

$$\lambda_2 = \frac{-k_1 + i\sqrt{4k_2 - k_1^2}}{2}, \tag{7}$$

якщо

$$k_1^2 - 4k_2 < 0.$$

Згідно з [8] визначений рівністю (2) оператор $L_{k_1,k_2}$ має неперервний обернений $L^{-1}_{k_1,k_2}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\} = \varnothing. \tag{8}$$

Розглянемо випадки:
1) $k_1 > 0,\ k_2 > 0,\ k_1^2 > 4k_2$;
2) $k_1 < 0,\ k_2 > 0,\ k_1^2 > 4k_2$;
3) $k_1 > 0,\ k_1^2 = 4k_2$;
4) $k_1 < 0,\ k_1^2 = 4k_2$;
5) $k_1 > 0,\ k_1^2 < 4k_2$;
6) $k_1 < 0,\ k_1^2 < 4k_2$;
7) $k_2 < 0$.

Очевидно, що тільки в цих випадках виконується співвідношення (8).

Легко переконатися, що оператор $L^{-1}_{k_1,k_2}$ у випадках 1) і 5) подається у вигляді

$$(L^{-1}_{k_1,k_2}y)(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{\lambda_2(t-s)} - e^{\lambda_1(t-s)}}{\lambda_2 - \lambda_1} y(s)ds, \tag{9}$$

у випадках 2) і 6) – у вигляді

$$(L^{-1}_{k_1,k_2}y)(t) =$$

$$= \int_{t}^{+\infty} \frac{e^{\lambda_1(t-s)} - e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_2 - \lambda_1} y(s)ds, \tag{10}$$

у випадку 3) – у вигляді

$$(L^{-1}_{k_1,k_2}y)(t) = \int_{-\infty}^{t} (t-s)e^{\lambda_1(t-s)} y(s)ds, \tag{11}$$

у випадку 4) – у вигляді

$$(L^{-1}_{k_1,k_2}y)(t) = \int_{t}^{+\infty} (s-t)e^{\lambda_1(t-s)} y(s)ds \tag{12}$$

і у випадку 7) – у вигляді

$$(L^{-1}_{k_1,k_2}y)(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{\lambda_1(t-s)}y(s)}{\lambda_1 - \lambda_2} ds + \int_{t}^{+\infty} \frac{e^{\lambda_2(t-s)}y(s)}{\lambda_1 - \lambda_2} ds, \tag{13}$$

де $y \in C^0$.

**4. Знаходження норми $\left\|L^{-1}_{k_1,k_2}\right\|_{L(C^0,C^1)}$.** Визначимо норму $\left\|L^{-1}_{k_1,k_2}\right\|_{L(C^0,C^1)}$ в кожному з розглянутих випадків.

***4.1. Допоміжне твердження.*** При знаходженні норми $\left\|L^{-1}_{k_1,k_2}\right\|_{L(C^0,C^1)}$ будемо використовувати співвідношення (9)–(13) та наступне твердження.

**Лема 1.** *Нехай функція $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ і для деяких чисел $N \ge 1$ і $\gamma > 0$ задовольняє співвідношення*

$$|G(t)| \le Ne^{-\gamma|t|}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

*Тоді для норми $\|\Upsilon\|_{L(C^0,C^0)}$ лінійного неперервного оператора $\Upsilon : C^0 \to C^0$, що визначається рівністю*

$$(\Upsilon x)(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t-s)x(s)ds,$$

*де $x \in C^0$, виконується співвідношення*

$$\|\Upsilon\|_{L(C^0,C^0)} = \int_{\mathbb{R}} |G(s)|ds. \tag{15}$$

**Доведення.** Нагадаємо, що

$$\|\Upsilon\|_{L(C^0,C^0)} =$$

$$= \sup_{\|x\|_{C^0}=1,\ t\in\mathbb{R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} G(t-s)x(s)ds \right|. \qquad (16)$$

Оскільки для кожного нормованого елемента $x \in C^0$ ($\|x\|_{C^0} = 1$) виконуються співвідношення

$$\sup_{\|x\|_{C^0}=1,\ t\in\mathbb{R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} G(t-s)x(s)ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|_{C^0}=1,\ t\in\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \big|G(t-s)\big|\big|x(s)\big|ds \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} |G(t-s)|ds = \int\limits_{\mathbb{R}} |G(s)|ds,$$

то

$$\|\Upsilon\|_{L(C^0,C^0)} \leq \int\limits_{\mathbb{R}} |G(s)|ds. \qquad (17)$$

Далі використаємо очевидне співвідношення

$$\sup_{\|x\|_{C^0}=1,\ t\in\mathbb{R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} G(t-s)x(s)ds \right| \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\|x\|_{C^0}=1} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} G(-s)x(s)ds \right| \qquad (18)$$

і неперервні й обмежені на $\mathbb{R}$ функції

$$y_n(t) = \frac{z_n(t)}{\|z_n\|_{C^0}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де

$$z_n(t) = \begin{cases} \sqrt[2n+1]{\sin|t|G(-t)}, & \text{якщо } |t| \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ \sqrt[2n+1]{G(-t)}, & \text{якщо } |t| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Очевидно, що

$$\|y_n\|_{C^0} = 1,\ n \in \mathbb{N},$$

і

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(t) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{якщо } G(-t) > 0, \\ 0, & \text{якщо } t = 0 \text{ або } G(-t) = 0, \\ -1, & \text{якщо } G(-t) < 0. \end{cases}$$

Тому завдяки (14)

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} G(-s)z_n(s)ds \right| =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} G(-s) \lim_{n\to+\infty} z_n(s)ds =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} |G(-s)|ds = \int\limits_{\mathbb{R}} |G(s)|ds.$$

Із цього співвідношення та співвідношень (16) і (18) випливає, що також

$$\|\Upsilon\|_{L(C^0,C^0)} \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |G(s)|ds.$$

Тому на підставі (17) виконується співвідношення (15).

Лему 1 доведено.

Далі знайдемо норму $\left\|L^{-1}_{k_1,k_2}\right\|_{L(C^0,C^1)}$.

***4.2. Випадок*** $k_1 > 0,\ \ k_2 > 0,\ \ k_1^2 > 4k_2$**.** Визначимо $\left\|L^{-1}_{k_1,k_2}\right\|_{L(C^0,C^1)}$, ураховуючи, що

$$\left\|L^{-1}_{k_1,k_2}\right\|_{L(C^0,C^1)} = \max\{a,b\},$$

де

$$a = \sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\|L^{-1}_{k_1,k_2}y\right\|_{C^0},$$

$$b = \sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\| \frac{d\left(L^{-1}_{k_1,k_2}y\right)}{dt} \right\|_{C^0}.$$

Оскільки

$$e^{\lambda_2(t-s)} - e^{\lambda_1(t-s)} > 0,$$

якщо $s < t$, то завдяки співвідношенню (9) і лемі 1

$$\sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\|L^{-1}_{k_1,k_2}y\right\|_{C^0} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \int\limits_{-\infty}^{0} \left(e^{-\lambda_2 s} - e^{-\lambda_1 s}\right) ds =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(-\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1}\right) = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{1}{k_2}.$$

Тут використано те, що $\lambda_1\lambda_2 = k_2$.

Отже,

$$\left\|L^{-1}_{k_1,k_2}\right\|_{L(C^0,C^0)} = \frac{1}{k_2}. \qquad (19)$$

Тепер визначимо $\sup\limits_{\|y\|_{C^0}=1} \left\|\frac{d\left(L^{-1}_{k_1,k_2}y\right)}{dt}\right\|_{C^0}$. Використаємо співвідношення

$$\frac{d\left(L^{-1}_{k_1,k_2}y\right)(t)}{dt} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2(t-s)} - \lambda_1 e^{\lambda_1(t-s)}}{\lambda_2-\lambda_1} y(s)ds, \qquad (20)$$

що випливає з (9). Позначимо через $t^*$ додатне число, для якого

$$\lambda_2 e^{\lambda_2 t^*} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t^*} = 0. \qquad (21)$$

Таке число існує, оскільки функція

$$\mu(t) = \lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$$

неперервна на проміжку $[0,+\infty)$,

$$\mu(0) > 0$$

і

$$\mu(t) < 0$$

для всіх досить великих додатних $t$. Тому на підставі (20) і леми 1

$$\sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\|\frac{d\left(L^{-1}_{k_1,k_2}y\right)}{dt}\right\|_{C^0} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\left|\lambda_2 e^{-\lambda_2 s} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 s}\right|}{\lambda_2-\lambda_1} ds =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\left|\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\right|}{\lambda_2-\lambda_1} dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{t*} \frac{\left|\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\right|}{\lambda_2-\lambda_1} dt +$$

$$+ \int\limits_{t^*}^{+\infty} \frac{\left|\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\right|}{\lambda_2-\lambda_1} dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{t*} \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2-\lambda_1} dt +$$

$$+ \int\limits_{t^*}^{+\infty} \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1} dt = \frac{2\left(e^{\lambda_2 t^*} - e^{\lambda_1 t^*}\right)}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

Оскільки на підставі (21)

$$t^* = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

то

$$\sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\|\frac{d\left(L^{-1}_{k_1,k_2}y\right)}{dt}\right\|_{C^0} =$$

$$= \frac{2\left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}\right)}{\lambda_2-\lambda_1}. \qquad (22)$$

Отже, завдяки (19) і (22) справджується рівність

$$\left\|L^{-1}_{k_1,k_2}\right\|_{L(C^0,C^1)} =$$

$$= \max\left\{\frac{1}{k_2}, \frac{2\left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}\right)}{\lambda_2-\lambda_1}\right\}.$$

На підставі (4) і (5)

$$\left\|L^{-1}_{k_1,k_2}\right\|_{L(C^0,C^1)} =$$

$$= \max\left\{\frac{1}{k_2}, \omega_1(k_1,k_2)\right\}, \qquad (23)$$

де

$$\omega_1(k_1,k_2) =$$

$$= \frac{2\left(\frac{k_1^2-2k_2+|k_1|\sqrt{k_1^2-4k_2}}{2k_2}\right)^{\frac{-|k_1|+\sqrt{k_1^2-4k_2}}{2\sqrt{k_1^2-4k_2}}}}{\sqrt{k_1^2-4k_2}} -$$

$$- \frac{2\left(\frac{k_1^2-2k_2+|k_1|\sqrt{k_1^2-4k_2}}{2k_2}\right)^{\frac{-|k_1|-\sqrt{k_1^2-4k_2}}{2\sqrt{k_1^2-4k_2}}}}{\sqrt{k_1^2-4k_2}}. \qquad (24)$$

***4.3. Випадок*** $k_1 < 0,\ \ k_2 > 0,\ \ k_1^2 > 4k_2$**.** У цьому випадку для $\left\|L^{-1}_{k_1,k_2}\right\|_{L(C^0,C^1)}$ також виконується співвідношення (23). Це можна встановити безпосередньо, використовуючи (10) замість (9). Можна також звести цей випадок до попереднього випадку заміною $t$ на $-t$.

***4.4. Випадок*** $k_1 > 0$, $k_1^2 = 4k_2$. Спочатку знайдемо $\left\|L_{k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(C^0,C^0)}$. Використовуючи (11) і лему 1, отримуємо

$$\left\|L_{k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(C^0,C^0)} = \int\limits_{-\infty}^{0} se^{-\lambda_1 s}ds = \frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{1}{k_2}.$$

Отже,

$$\left\|L_{k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(C^0,C^0)} = \frac{1}{k_2}. \qquad (25)$$

Далі визначимо $\sup\limits_{\|y\|_{C^0}=1} \left\|\frac{d\left(L_{k_1,k_2}^{-1}y\right)}{dt}\right\|_{C^0}$. Використовуючи співвідношення

$$\frac{d\left(L_{k_1,k_2}^{-1}y\right)(t)}{dt} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{t} (1+\lambda_1(t-s))e^{\lambda_1(t-s)}y(s)ds,$$

що випливає з (11), та додатне число

$$\tau^* = -\lambda_1^{-1}, \qquad (26)$$

на підставі 1 отримуємо

$$\sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\|\frac{d\left(L_{k_1,k_2}^{-1}y\right)}{dt}\right\|_{C^0} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} \left|(1-\lambda_1 s)e^{-\lambda_1 s}\right| ds =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} |1+\lambda_1\tau|e^{\lambda_1\tau}d\tau =$$

$$= \int\limits_{0}^{\tau^*}(1+\lambda_1\tau)e^{\lambda_1\tau}d\tau - \int\limits_{\tau^*}^{+\infty}(1+\lambda_1\tau)e^{\lambda_1\tau}d\tau =$$

$$= \left(\tau e^{\lambda_1\tau^*}\right)\Big|_0^{\tau^*} - \left(\tau e^{\lambda_1\tau^*}\right)\Big|_{\tau^*}^{+\infty} = 2\tau^* e^{\lambda_1\tau^*}.$$

Тому на підставі (26) і того, що $\lambda_1^2 = k_2$

$$\sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\|\frac{d\left(L_{k_1,k_2}^{-1}y\right)}{dt}\right\|_{C^0} = \frac{2}{e\sqrt{k_2}}.$$

Із цього співвідношення і (25) випливає, що

$$\left\|L_{k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(C^0,C^1)} = \max\left\{\frac{1}{k_2}, \frac{2}{e\sqrt{k_2}}\right\}. \qquad (27)$$

***4.5. Випадок*** $k_1 < 0$, $k_1^2 = 4k_2$. Цей випадок зводиться до попереднього випадку заміною $t$ на $-t$. Тому також виконується рівність (27).

***4.6. Випадок*** $k_1 > 0$, $k_1^2 < 4k_2$. Визначимо $\left\|L_{k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}))}$, використавши (9). Оскільки на підставі (6) і (7)

$$e^{\lambda_2\tau} - e^{\lambda_1\tau} =$$

$$= e^{-\frac{k_1}{2}\tau}\left(e^{i\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau} - e^{-i\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau}\right) =$$

$$= 2ie^{-\frac{k_1}{2}\tau}\sin\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau \qquad (28)$$

і

$$\lambda_2 - \lambda_1 = i\sqrt{4k_2-k_1^2},$$

то

$$\left(L_{k_1,k_2}^{-1}y\right)(t) =$$

$$= 2\int\limits_{t}^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}(t-s)}\frac{\sin\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}(t-s)}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}\, y(s)\, ds$$

і тому

$$\left(L_{k_1,k_2}^{-1}y\right)(t) =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}\tau}\frac{\sin\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}\, y(t-\tau)\, d\tau$$

для всіх $y \in C^0$ і $t \in \mathbb{R}$.

Отже, на підставі леми 1

$$\left\|L_{k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(C^0,C^0)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}\tau}\left|\sin\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau\right| d\tau.$$

Функція $\left|\sin \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau\right|$ періодична з періодом

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}. \tag{29}$$

Тому

$$\frac{2}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}\tau}\left|\sin \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau\right|d\tau=$$

$$=2\int\limits_0^{T} e^{-\frac{k_1}{2}\tau}\frac{\left|\sin \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau\right|}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}d\tau\left(\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\frac{k_1}{2}nT}\right)=$$

$$=\int\limits_0^{T} e^{-\frac{k_1}{2}\tau}\frac{\left|\sin \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau\right|}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}d\tau\frac{2}{1-e^{-\frac{k_1}{2}T}}=$$

$$=\int\limits_0^{T} e^{-\frac{k_1}{2}\tau}\frac{\left|\sin \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau\right|}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}d\tau\frac{2}{1-e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}}.$$

На підставі (28) і (29)

$$\frac{2}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}\int\limits_0^{T} e^{-\frac{k_1}{2}\tau}\left|\sin \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau\right|d\tau=$$

$$=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int\limits_0^{T}\left(e^{\lambda_2\tau}-e^{\lambda_1\tau}\right)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{e^{\lambda_2\tau}}{\lambda_2}-\frac{e^{\lambda_1\tau}}{\lambda_1}\right)\Bigg|_0^T=$$

$$=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{e^{\lambda_2T}}{\lambda_2}-\frac{e^{\lambda_1T}}{\lambda_1}\right)+\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}=$$

$$=\frac{1}{k_2}\left(1+\frac{\lambda_1e^{\lambda_2T}-\lambda_2e^{\lambda_1T}}{\lambda_2-\lambda_1}\right)=$$

$$=\frac{1}{k_2}\left(1+\frac{\lambda_1e^{-\frac{k_1}{2}T}-\lambda_2e^{-\frac{k_1}{2}T}}{\lambda_2-\lambda_1}\right)=$$

$$=\frac{1}{k_2}\left(1+e^{-\frac{k_1}{2}T}\right)=\frac{1}{k_2}\left(1+e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right).$$

Тут використано те, що

$$e^{\lambda_1T}=e^{\lambda_2T}=e^{-\frac{k_1}{2}T}.$$

Отже,

$$\left\|L_{k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(C^0,C^0)}=\frac{1+e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}}{k_2\left(1-e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right)}. \tag{30}$$

Тепер визначимо $\sup\limits_{\|y\|_{C^0}=1}\left\|\frac{d\left(L_{k_1,k_2}^{-1}y\right)}{dt}\right\|_{C^0}$. Використаємо (6), (7) і подамо (20) у вигляді

$$\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2\sqrt{k_2}}\cdot\frac{d\left(L_{k_1,k_2}^{-1}y\right)(t)}{dt}=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{k_1}{2}\tau}\left(\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2\sqrt{k_2}}\cos\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau-\right.$$

$$\left.-\frac{k_1}{2\sqrt{k_2}}\sin\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau\right)y(t-\tau)d\tau.$$

Оскільки

$$\left(\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2\sqrt{k_2}}\right)^2+\left(\frac{k_1}{2\sqrt{k_2}}\right)^2=1,$$

то можна використати співвідношення

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2\sqrt{k_2}},\quad \cos\alpha=\frac{k_1}{2\sqrt{k_2}},$$

де

$$\alpha=\arcsin\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2\sqrt{k_2}}=\arccos\frac{k_1}{2\sqrt{k_2}}.$$

Отримаємо

$$\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2\sqrt{k_2}}\cos\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau-$$

$$-\frac{k_1}{2\sqrt{k_2}}\sin\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau=$$

$$=\sin\left(\alpha-\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau\right).$$

Тому для кожної функції $y\in C^0$

$$\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2\sqrt{k_2}}\cdot\frac{d\left(L_{k_1,k_2}^{-1}y\right)(t)}{dt}=$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}\tau} \sin\left(\alpha - \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau\right) y(t-\tau)d\tau.$$

Отже, завдяки лемі 1

$$\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2\sqrt{k_2}} \cdot \sup_{\|y\|_{C^0}=1} \left\| \frac{d\left(L^{-1}_{k_1,k_2}y\right)}{dt} \right\|_{C^0} =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}\tau} \left|\sin\left(\alpha - \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau\right)\right| d\tau.$$

Визначимо праву частину цієї рівності. Використаємо нову змінну інтегрування $s$, що визначається рівністю

$$\alpha - \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau = -\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}s.$$

Також використаємо число

$$\tau_0 = \frac{2\alpha}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}.$$

Тоді на підставі (30)

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{k_2}e^{-\frac{k_1}{2}\tau}}{\sqrt{4k_2-k_1^2}} \left|\sin\left(\alpha - \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau\right)\right| d\tau =$$

$$= \frac{2\sqrt{k_2}e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{4k_2-k_1^2}} \int_{-\tau_0}^{0} e^{-\frac{k_1}{2}s} \left|\sin \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}s\right| ds +$$

$$+ \frac{2\sqrt{k_2}e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{4k_2-k_1^2}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{k_1}{2}s} \left|\sin \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}s\right| ds =$$

$$= \frac{2\sqrt{k_2}e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{4k_2-k_1^2}} \int_{-\tau_0}^{0} e^{-\frac{k_1}{2}s} \left|\sin \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}s\right| ds +$$

$$+ \frac{e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}\left(1+e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right)}{\sqrt{k_2}\left(1-e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right)} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}\left(1+e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right)}{\sqrt{k_2}\left(1-e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right)} -$$

$$- \frac{2\sqrt{k_2}e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{4k_2-k_1^2}} \int_{-\tau_0}^{0} e^{-\frac{k_1}{2}s} \sin \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}s ds.$$

Далі використаємо відому формулу

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C,$$

де $C$ – довільна стала [9]. Отримаємо

$$\int_{-\tau_0}^{0} e^{-\frac{k_1}{2}s} \sin \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}s ds =$$

$$= \frac{e^{-\frac{k_1}{2}s}}{k_2}\left(-\frac{k_1}{2}\sin\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}s -\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\cos\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}s\right)\right|_{-\tau_0}^{0} =$$

$$= \frac{e^{\frac{k_1}{2}\tau_0}}{k_2}\left(-\frac{k_1}{2}\sin\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau_0 +\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\cos\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\tau_0\right) -$$

$$- \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2k_2} =$$

$$= \frac{e^{\frac{k_1}{2}\tau_0}\left(-\frac{k_1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}\cos\alpha\right)}{k_2} -$$

$$- \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2k_2} = -\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2k_2}.$$

Таким чином,

$$- \frac{2\sqrt{k_2}e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{4k_2-k_1^2}} \int_{-\tau_0}^{0} e^{-\frac{k_1}{2}s} \sin \frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2}s ds +$$

$$+ \frac{e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{k_2}} \cdot \frac{1+e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}}{1-e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{k_2}}\left(1 + \frac{1+e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}}{1-e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}}\right) =$$

$$= \frac{2e^{-\frac{k_1}{2}\tau_0}}{\sqrt{k_2}\left(1 - e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{k_2}\left(1 - e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right)} e^{-\frac{k_1 \arcsin\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2\sqrt{k_2}}}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}$$

і

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \|y\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}=1} \left| \frac{d\left(L_{k_1,k_2}^{-1}y\right)(t)}{dt} \right| =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{k_2}\left(1 - e^{-\frac{k_1\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right)} e^{-\frac{k_1 \arcsin\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2\sqrt{k_2}}}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}.$$

Отже,

$$\left\|L_{k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(C^0,C^1)} = = \max\{\omega_2(k_1,k_2), \omega_3(k_1,k_2)\}, \qquad (31)$$

де

$$\omega_2(k_1,k_2) = \frac{1 + e^{-\frac{|k_1|\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}}{k_2\left(1 - e^{-\frac{|k_1|\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right)} \qquad (32)$$

і

$$\omega_3(k_1,k_2) = = \frac{2}{\sqrt{k_2}\left(1 - e^{-\frac{|k_1|\pi}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}\right)} e^{-\frac{|k_1| \arcsin\frac{\sqrt{4k_2-k_1^2}}{2\sqrt{k_2}}}{\sqrt{4k_2-k_1^2}}}. \qquad (33)$$

***4.7. Випадок*** $k_1 < 0,\ \ k_1^2 < 4k_2$**.** Цей випадок зводиться до попереднього випадку заміною $t$ на $-t$. Тому також виконується рівність (31).

***4.8. Випадок*** $k_2 < 0$**.** Визначимо $\left\|L_{k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(C^0,C^1)}$, використовуючи (13) і співвідношення

$$\frac{d\left(L_{k_1,k_2}^{-1}y\right)(t)}{dt} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\int_{-\infty}^{t} \lambda_1 e^{\lambda_1(t-s)}y(s)ds + \right.$$

$$\left. + \int_{t}^{+\infty} \lambda_2 e^{\lambda_2(t-s)}y(s)ds\right),$$

що випливає з (13), де також $y \in C^0$ і $t \in \mathbb{R}$. Ці співвідношення можна подати відповідно у вигляді

$$\left(L_{k_1,k_2}^{-1}y\right)(t) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\int_{0}^{+\infty} e^{\lambda_1\tau}y(t-\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda_2\tau}y(t-\tau)d\tau\right)$$

і

$$\frac{d\left(L_{k_1,k_2}^{-1}y\right)(t)}{dt} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\int_{0}^{+\infty} \lambda_1 e^{\lambda_1\tau}y(t-\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{0} \lambda_2 e^{\lambda_2\tau}y(t-\tau)d\tau\right).$$

Завдяки лемі 1

$$\left\|L_{k_1,k_2}^{-1}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}))} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\int_{0}^{+\infty} e^{\lambda_1\tau}d\tau + \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda_2\tau}d\tau\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{e^{\lambda_1\tau}}{\lambda_1}\Big|_0^{+\infty} + \frac{e^{\lambda_2\tau}}{\lambda_2}\Big|_{-\infty}^{0}\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(-\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_1\lambda_2} = -\frac{1}{k_2}$$

і

$$\sup_{\|y\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}=1} \left\| \frac{d\left(L_{k_1,k_2}^{-1}y\right)}{dt} \right\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( - \int\limits_0^{+\infty} \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau} d\tau + \int\limits_{-\infty}^{0} \lambda_2 e^{\lambda_2 \tau} d\tau \right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( -e^{\lambda_1 \tau} \Big|_0^{+\infty} + e^{\lambda_2 \tau} \Big|_{-\infty}^{0} \right) =$$

$$= \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{2}{\sqrt{k_1^2 - 4k_2}}.$$

Таким чином,

$$\left\| L_{k_1,k_2}^{-1} \right\|_{L(C^0,C^1)} = \max \left\{ -\frac{1}{k_2}, \frac{2}{\sqrt{k_1^2 - 4k_2}} \right\}.$$

Отже, норма $\left\| L_{k_1,k_2}^{-1} \right\|_{L(C^0,C^1)}$ для оберненого оператора $L_{k_1,k_2}^{-1}$ знайдена.

На підставі проведених досліджень можна розглянути визначену на множині

$$\mathscr{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t_1, t_2) : t_2 = 0 \text{ або } t_1 = 0 \text{ і } t_2 > 0\}$$

функцію

$$S(k_1, k_2) = \\ = \begin{cases} S_1(k_1, k_2), & \text{якщо } k_1^2 > 4k_2 > 0, \\ S_2(k_1, k_2), & \text{якщо } k_1^2 = 4k_2 > 0, \\ S_3(k_1, k_2), & \text{якщо } 0 < k_1^2 < 4k_2, \\ S_4(k_1, k_2), & \text{якщо } k_2 < 0, \end{cases} \tag{34}$$

де

$$S_1(k_1, k_2) = \max \left\{ \frac{1}{k_2}, \omega_1(k_1, k_2) \right\},$$

$$S_2(k_1, k_2) = \max \left\{ \frac{1}{k_2}, \frac{2}{e\sqrt{k_2}} \right\},$$

$$S_3(k_1, k_2) = \max \left\{ \omega_2(k_1, k_2), \omega_3(k_1, k_2) \right\},$$

$$S_4(k_1, k_2) = \max \left\{ -\frac{1}{k_2}, \frac{2}{\sqrt{k_1^2 - 4k_2}} \right\}$$

і $\omega_1(k_1, k_2)$, $\omega_2(k_1, k_2)$ і $\omega_3(k_1, k_2)$, – функції, що визначаються рівностями (24), (32) і (33). Ця функція є неперервною на множині $\mathscr{A}$, оскільки навіть у загальному випадку норма оберненого оператора $A^{-1}$ неперервно залежить від оператора $A$ [10]. Неперервність функції $S(k_1, k_2)$ на $\mathscr{A}$ можна перевірити також і безпосередньо.

Легко перевірити, що для кожного $k_2 > 0$

$$\lim_{|k_1| \to +\infty} \omega_1(k_1, k_2) = 0 \tag{35}$$

і

$$\lim_{k_1 \to 0} S(k_1, k_2) = +\infty.$$

Отже, справджується наступне твердження.

**Теорема 2.** *Оператор* $L_{k_1,k_2} : C^2 \to C^0$ *для всіх* $(k_1, k_2) \in \mathscr{A}$ *має неперервний обернений* $L_{k_1,k_2}^{-1}$ *і*

$$\left\| L_{k_1,k_2}^{-1} \right\|_{L(C^0,C^1)} = S(k_1, k_2).$$

**5. Приклади.** Наведемо приклади застосування теореми 1.

**Приклад 1.** Зафіксуємо довільне додатне число $a > 2$ і розглянемо непарну неперервну на $\mathbb{R}$ кусково-лінійну функцію $\omega_a(t)$, що на проміжку $[0, +\infty)$ визначається рівностями

$$\omega_a(t) = -t,$$

якщо $t \in [0, a^0)$,

$$\omega_a(t) = -a^{2n} + \frac{a+1}{a-1} \left( t - a^{2n} \right),$$

якщо $t \in [a^{2n}, a^{2n+1})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, і

$$\omega_a(t) = a^{2n+1} - \frac{a+1}{a-1} \left( t - a^{2n+1} \right),$$

якщо $t \in [a^{2n+1}, a^{2n+2})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Будемо вважати, що в рівнянні (1) функція $F(x_1, x_2)$ має вигляд

$$F(x_1, x_2) = G(x_1, x_2) + \omega_a(x_2), \tag{36}$$

де $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – неперервна і обмежена на $\mathbb{R}^2$ функція (ця функція може бути недиференційовною на $\mathbb{R}^2$). Використаємо позначення

$$b = \sup_{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2} |G(x_1, x_2)|.$$

Легко переконатися, використовуючи графік функції $\omega_a(t)$, що для кожного числа $r_n = a^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, виконуються співвідношення

$$\max_{|x_1| \leqslant r_n, \ |x_2| \leqslant r_n} |F(x_1, x_2) - (-x_2)| \leqslant$$

$$\leqslant b + \max_{|x_1| \leqslant r_n, \ |x_2| \leqslant r_n} |\omega_a(x_2) + x_2| =$$

$$= b + 2a^{2n-1} = a^{2n} - \left( a^{2n} - 2a^{2n-1} - b \right).$$

Оскільки

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a^{2n}-2a^{2n-1}-b\right)=+\infty,$$

то для кожного числа $H>0$ існує такий номер $n_0\in\mathbb{N}$, що

$$\max_{|x_1|\leqslant r_n,\ |x_2|\leqslant r_n}|F(x_1,x_2)-(-x_2)|\leqslant$$

$$\leqslant r_n-H \qquad (37)$$

для всіх $n\geqslant n_0$.

За теоремою 2 оператор $L_{0,-1}$ має неперервний обернений $L_{0,-1}^{-1}$ і

$$\left\|L_{0,-1}^{-1}\right\|_{L(C^0,C^1)}=S(0,-1)=1. \qquad (38)$$

Тому нерівність (37) можна подати у вигляді

$$\max_{|x_1|\leqslant r_n,\ |x_2|\leqslant r_n}|F(x_1,x_2)-(0x_1+(-1)x_2)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{r_n}{S(0,-1)}-H.$$

Отже, на підставі теореми 1 диференціальне рівняння (1), в якому функція $F(x_1,x_2)$ визначається рівністю (36), має для кожної функції $h\in C^0$ хоча б один розв'язок $x\in C^2$.

**Приклад 2.** Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2}+l\left(\frac{dx}{dt}\right)+z\left(\frac{dx}{dt}\right)+\omega(x)=h(t), \quad (39)$$

де $l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – неперервна функція, що визначається рівністю

$$l(x)=\begin{cases}x\ln|x|, & \text{якщо } |x|\geqslant e,\\ x, & \text{якщо } |x|<e,\end{cases}$$

$z$ – довільний елемент простору $C^0$, $\omega$ – розглянута у прикладі 1 функція $\omega_a$ при $a=10$ і $t\in\mathbb{R}$.

Покажемо, що для функції

$$F(x_1,x_2)=l(x_1)+z(x_1)+\omega(x_2) \qquad (40)$$

виконуються умови теореми 1.

Розглянемо числа $r_n=10^{2n+1}$, $n\geq1$. Покладемо $k_1=\ln r_n$ і $k_2=\dfrac{9}{10}$. Використовуючи методи диференціального числення, легко показати існування такого числа $n_0\in\mathbb{N}$, що

$$\max_{|x|\leqslant r_n}|l(x)-(\ln r_n)x|=\frac{r_n}{e} \qquad (41)$$

для всіх $n\geqslant n_0$. Ураховуючи те, що функція $\omega(x)$ є кусково-лінійною і непарною, легко показати, що для кожного $n\in\mathbb{N}$ виконуються співвідношення

$$\max_{|x|\leq r_n}|\omega(x)-k_2x|=$$

$$=\max\left\{\left|\omega\left(10^{2n}\right)-k_2 10^{2n}\right|,\right.$$

$$\left.\left|\omega\left(10^{2n+1}\right)-k_2 10^{2n+1}\right|\right\}=$$

$$=\max\left\{10^{2n-1}19,10^{2n}\right\}=\frac{19}{100}r_n.$$

Завдяки рівності (41) для всіх $n\geqslant n_0$

$$\max_{|x|\leqslant r_n}|l(x)+z(x)-(\ln r_n)x|\leqslant\frac{r_n}{e}+\|z\|_{C^0}.$$

Тому для $n\geqslant n_0$

$$\max_{|x_1|\leqslant r_n,\ |x_2|\leqslant r_n}\Bigg|l(x_1)+z(x_1)+\omega(x_2)-$$

$$-\left((\ln r_n)x_1+\frac{9}{10}x_2\right)\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{|x_1|\leqslant r_n}|l(x_1)+z(x_1)-(\ln r_n)x_1|+$$

$$+\max_{|x_2|\leqslant r_n}\left|\omega(x_2)-\frac{9}{10}x_2\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{e}+\frac{19}{100}\right)r_n+\|z\|_{C^0}.$$

Оскільки $\dfrac{1}{e}+\dfrac{19}{100}<\dfrac{9}{10}$, то для кожного числа $H>0$ існує такий номер $n_1\geqslant n_0$, що

$$\max_{|x_1|\leqslant r_n,\ |x_2|\leqslant r_n}\Bigg|l(x_1)+z(x_1)+\omega(x_2)-$$

$$-\left((\ln r_n)x_1+\frac{9}{10}x_2\right)\Bigg|\leqslant\frac{9}{10}r_n-H \qquad (42)$$

для всіх $n\geqslant n_1$.

На підставі (34) і (35) існує таке число $n_2\geqslant n_1$, що

$$S\left(\ln r_n,\frac{9}{10}\right)=\frac{10}{9}$$

для всіх $n\geqslant n_2$. Тому (42) можна подати у вигляді

$$\max_{|x_1|\leqslant r_n,\ |x_2|\leqslant r_n}\Bigg|l_e(x_1)+z(x_1)+\omega_{10}(x_2)-$$

$$-\left((\ln r_n)x_1+\frac{9}{10}x_2\right)\Bigg|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{r_n}{S\left(\ln r_n,\frac{9}{10}\right)}-H,$$

де $n\geqslant n_2$.

Отже, для функції $F(x_1,x_2)$, що визначається рівністю (40), виконуються умови теореми 1. Тоді диференціальне рівняння (39) для кожної функції $h\in C^0$ має хоча б один розв'язок $x\in C^2$.

Зазначимо, що в диференціальному рівнянні (39) функція $l(x)$ задовольняє умову

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{l(x)}{x}=+\infty$$

(при $|x|\to+\infty$ ця функція швидше зростає, ніж будь-яка лінійна функція), функція $\omega(x)$ є осцилюючою, причому

$$\overline{\lim_{|x|\to+\infty}}\,\omega(x)=+\infty$$

і

$$\underline{\lim_{|x|\to+\infty}}\,\omega(x)=-\infty,$$

а функція $z=z(x)$ може бути недиференційовною на $\mathbb{R}$. Тому з'ясувати існування навіть періодичних розв'язків цього рівняння для кожної періодичної правої частини $h\in C^0$ за допомогою методів, викладених, наприклад, в [6], неможливо.

**Приклад 3.** Розглянемо непарну неперервну функцію $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що на проміжку $[0,+\infty)$ визначається рівністю

$$G(x)=$$
$$=-\begin{cases}0, & \text{якщо } x\in[0,1],\\ 2(x-1), & \text{якщо } x\in I_0,\\ -2(x-2)+2, & \text{якщо } x\in I_1,\\ 2\left(x-2^2\right), & \text{якщо } x\in I_2,\\ -2\left(x-2^3\right)+2^3, & \text{якщо } x\in I_3,\\ 2\left(x-2^4\right), & \text{якщо } x\in I_4,\\ -2\left(x-2^5\right)+2^5, & \text{якщо } x\in I_5,\\ \vdots & \\ 2\left(x-2^n\right), & \text{якщо } x\in I_n,\\ -2\left(x-2^{n+1}\right)+2^{n+1}, & \text{якщо } x\in I_{n+1},\\ \vdots, & \end{cases}$$

де

$$I_0=(1,2],$$
$$I_1=\left(2,2^2\right],$$
$$I_2=\left(2^2,2^3\right],$$
$$\vdots$$
$$I_n=\left(2^n,2^{n+1}\right],$$
$$\vdots,$$

і диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\Omega(x)=h(t),\ t\in\mathbb{R},\tag{43}$$

де

$$\Omega(x)=G(x)+1.$$

Визначимо функцію $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ рівністю

$$F(x_1,x_2)=\Omega(x_2).$$

Легко переконатися, використовуючи графік функції $G$, що для послідовності чисел $r_n=2^{2n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, виконується співвідношення

$$\max_{|x|\leqslant r_n}|\Omega(x)+x|\leqslant\frac{r_n}{2}+1,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Отже, для кожного числа $H>0$ існує такий номер $n_0\in\mathbb{N}$, що для всіх $n\geqslant n_0$

$$\max_{|x_1|\leqslant r_n,\ |x_2|\leqslant r_n}|F(x_1,x_2)-(0x_1-x_2)|=$$
$$=\max_{|x|\leqslant r_n}|\Omega(x)+x|\leqslant r_n-H=$$
$$=\frac{r_n}{\left\|L_{0,-1}^{-1}\right\|_{L(C^0,C^1)}}-H.$$

Тут ураховано (38).

Таким чином, виконується нерівність (3) при $k_1=0$ і $k_2=-1$. Тому на підставі теореми 1 нелінійне диференціальне рівняння (43) для кожної функції $h\in C^0$ має хоча б один розв'язок $x\in C^2$.

**Зауваження 1.** Метод, який використано для з'ясування умов існування обмежених розв'язків диференціального рівняння (1) та рівнянь у прикладах 1 – 3, застосовувався автором для дослідження обмежених розв'язків як систем нелінійних диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь [7,11], так і систем нелінійних різницевих рівнянь [12,13]. Цей метод для деяких класів рівнянь дає не тільки достатні, але й необхідні умови існування обмежених розв'язків відповідних рівнянь [7,11].

**Зауваження 2.** Твердження теореми 1 зберігається, якщо в цій теоремі простори $C^0$, $C^1$ і $C^2$ замінити відповідними просторами $T$-періодичних функцій ($T$ – довільне додатне число).

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. – М: Наука, 1966. – 568 с.

2. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. – М: Наука, 1981. – 568 с.

3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.

4. *Конторович М. И.* Нелинейные колебания в радиотехнике. – М.: Советское радио, 1973. – 320 с.

5. *Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н.* Основы теории колебаний. – М.: Наука, 1978. – 392 с.

6. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 320 с.

7. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Матем. сб. – 2010. – **201**, № 8. – С. 103–126.

8. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1966. – Т. 2. – 800 с.

10. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664 с.

11. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1541–1556.

12. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. – 2009. – Вип. 454. Математика. – С. 88–94.

13. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – 109–115.