УДК 517.95

©2012 р. **Г.А. Снітко**

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, Львів

ІДЕНТИФІКАЦІЯ МОЛОДШОГО КОЕФІЦІЄНТА ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення молодшого коефіцієнта з двома невідомими, залежними від часу, параметрами в одновимірному параболічному рівнянні з інтегральними умовами перевизначення в області з невідомою ділянкою межі.

The conditions of unique solvability of the inverse problem of finding the minor coefficient with two unknown time-dependent parameters in a one-dimensional parabohc equation with integral overdetermination conditions in a free boundary domain are established.

Вступ. Завдяки своєму практичному застосуванню у численних галузях науки коефіцієнтні обернені задачі зайняли вагоме місце серед інших задач для рівнянь із частинними похідними. Сьогодні обернені задачі, в яких до невідомих належить один або декілька коефіцієнтів рівняння, в областях з відомими межами достатньо повно вивчені. В [1] знайдено умови локального за часом існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних розв'язку оберненої задачі для рівняння

$$u_t = u_{xx} + p(t)u_x, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T),$$

з невідомим коефіцієнтом $p(t)$ та умовою перевизначення

$$m(t) = \int\limits_0^{b(t)} u(x,t)dx, \quad t \in [0,T],$$

де $0 < b(t) < 1$, $t \in [0,T]$, – задана функція. Дослідження такої задачі з умовою перевизначення

$$u_x(0,t) + p(t)u(0,t) = g(t), \quad t > 0,$$

продовжено в [2, 3]. В [2] встановлено умови глобального існування розв'язку оберненої задачі, а в [3] отримано умови локального існування розв'язку, а також умови, за яких задача не може мати глобального розв'язку.

У [4, 5] досліджено обернені задачі визначення коефіцієнтів $(a(t), b(t))$, $(a(t), c(t))$, і $(a_0(t), a_1(t))$ у параболічних рівняннях

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t),$$

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(t)u + f(x,t),$$

$$u_t = (a_0(t) + xa_1(t))u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + \\ + f(x,t), \quad (x,t) \in (0,h) \times (0,T).$$

При розгляді цих задач для визначення невідомих параметрів були використані інтегральні теплові моменти.

Поряд із оберненими, в теорії рівнянь із частинними похідними важливе місце займають задачі з вільними межами. Заміною змінних задачі з вільними межами можна звести до коефіцієнтних обернених задач в областях з відомими межами. Такий підхід дозволяє застосувати до цих задач методику, розроблену для дослідження обернених задач. В [6, 7] знайдено умови однозначної розв'язності обернених задач для одновимірних параболічних рівнянь з невідомим, залежним від часу, старшим коефіцієнтом в області, частина або вся межа якої є невідомою. В [8, 9] досліджено обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при першій похідній за просторовою змінною невідомої функції у параболічному рівнянні в області, частина або вся межа якої є невідомою.

У цій роботі розглядається обернена задача визначення молодшого коефіцієнта одновимірного параболічного рівняння, який має вигляд лінійної функції за просторовою змінною з двома невідомими, залежними від часу, параметрами, в області з невідомою ділянкою межі.

1. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$ – невідома функція, розглядаємо обернену задачу визначення коефіцієнтів $b_1(t)$, $b_2(t)$ параболічного рівняння

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))u_x + c(x,t)u+$$
$$+f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \qquad (2)$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h(t),t) = \mu_2(t),$$
$$t \in [0,T], \qquad (3)$$

та умовами перевизначення

$$\int_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_3(t), \quad \int_0^{h(t)} xu(x,t)dx = \mu_4(t),$$

$$\int_0^{h(t)} x^2u(x,t)dx = \mu_5(t), \quad t \in [0,T]. \qquad (4)$$

Увівши нову змінну $y = \dfrac{x}{h(t)}$ задачу (1)–(4) зводимо до оберненої задачі з невідомими $(h(t), b_1(t), b_2(t), v(y,t))$, де $v(y,t) = u(yh(t),t)$, в області з відомою межею $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{yh(t)b_1(t) + b_2(t)}{h(t)} + \right.$$
$$\left. + \frac{yh'(t)}{h(t)}\right) v_y + c(yh(t),t)v+$$
$$+f(yh(t),t), \quad (y,t) \in Q_T, \qquad (5)$$

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)), \quad y \in [0,1], \qquad (6)$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \; v(1,t) = \mu_2(t), \; t \in [0,T], \quad (7)$$

$$h(t) \int_0^1 v(y,t)dy = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \qquad (8)$$

$$h^2(t) \int_0^1 y\, v(y,t)dy = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \qquad (9)$$

$$h^3(t) \int_0^1 y^2v(y,t)dy = \mu_5(t), \quad t \in [0,T]. \quad (10)$$

2. Існування розв'язку задачі (5)–(10).

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $a \in C^{1,0}([0,\infty) \times [0,T]), \varphi \in C^2[0,h_0]$, $c, f \in H^{\alpha,0}([0,\infty) \times [0,T])$, $\alpha \in (0,1)$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = \overline{1,5}$;

2) $0 < a_0 \le a(x,t) \le a_1$, $c(x,t) \le 0$, $f(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in [0,\infty) \times [0,T]$, $\varphi(x) \ge \varphi_0 > 0$, $x \in [0,\infty)$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,h_0]$, $\varphi'(h_0 - x) - \varphi'(x) > 0$, $(h_0 - x)\varphi'(x) - x\varphi'(h_0 - x) > 0$, $x \in \left[0, \dfrac{h_0}{2}\right)$, $\mu_i(t) > 0$, $i = \overline{1,5}$, $t \in [0,T]$, *де* $h_0 = h(0) > 0$ *є розв'язком рівняння* $\displaystyle\int_0^{h(0)} \varphi(x)dx = \mu_4(0)$;

3) *умови узгодження нульового та першого порядків.*

Тоді можна вказати таке число T_0, $0 < T_0 \le T$, *яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок* $(h, b_1, b_2, v) \in C^1[0,T_0] \times (C[0,T_0])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T_0]$, *задачі (5)–(10).*

Доведення. Доведення існування розв'язку задачі (5)–(10) базується на застосуванні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Спочатку встановимо оцінки функції, що задає невідому частину межі області. З умови (8) одержуємо рівняння

$$h(t)=\frac{\mu_3(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy},\quad t\in[0,T]. \qquad (11)$$

Використовуючи принцип максимуму [10] для розв'язку прямої задачі (5)–(7), отримуємо

$$v(y,t)\ge M_0>0,\quad (y,t)\in\overline{Q}_T.$$

Тоді для розв'язків рівняння (11) справедлива оцінка

$$h(t)\le\frac{1}{M_0}\max_{[0,T]}\mu_3(t)\equiv H_1<\infty,\quad t\in[0,T].$$

Застосовуючи принцип максимуму для розв'язку задачі (5)–(7), одержуємо

$$v(y,t)\le M_1<\infty,\quad (y,t)\in\overline{Q}_T.$$

Тоді для $h(t)$ справедлива оцінка

$$h(t)\ge\frac{1}{M_1}\min_{[0,T]}\mu_3(t)\equiv H_0>0,\quad t\in[0,T].$$

Таким чином,

$$0<M_0\le v(y,t)\le M_1<\infty,\quad (y,t)\in\overline{Q}_T,$$

$$0<H_0\le h(t)\le H_1<\infty,\quad t\in[0,T], \quad (12)$$

де числа M_0, M_1 визначаються вихідними даними.

Зведемо задачу до системи рівнянь. Введемо нову функцію

$$\widetilde{v}(y,t)=v(y,t)-\varphi(yh_0)-y(\mu_2(t)-\mu_2(0))+$$
$$+(y-1)(\mu_1(t)-\mu_1(0)).$$

Для функції $\widetilde{v}(y,t)$ одержуємо задачу

$$\widetilde{v}_t=\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\widetilde{v}_{yy}+\left(\frac{yh(t)b_1(t)+b_2(t)}{h(t)}+\right.$$
$$\left.+\frac{yh'(t)}{h(t)}\right)(\widetilde{v}_y+d(y,t))+c(yh(t),t)\,\widetilde{v}+$$
$$+F(y,t),\quad (y,t)\in Q_T,$$
$$\widetilde{v}(y,0)=0,\quad y\in[0,1],$$
$$\widetilde{v}(0,t)=\widetilde{v}(1,t)=0,\quad t\in[0,T], \qquad (13)$$

де

$$d(y,t)=h_0\varphi'(yh_0)+\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+$$
$$+\mu_1(0),$$
$$F(y,t)=h_0^2\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\varphi''(yh_0)+c(yh(t),t)\times$$
$$\times\big(\varphi(yh_0)+y(\mu_2(t)-\mu_2(0))+(1-y)(\mu_1(t)-$$
$$-\mu_1(0))\big)+f(yh(t),t)-y\mu_2'(t)+\mu_1'(t)(y-1).$$

За допомогою функції Гріна $G_1(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\widetilde{v}_t=\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\,\widetilde{v}_{yy}+c(yh(t),t)\,\widetilde{v}$$

задачу (13) зводимо до рівняння

$$\widetilde{v}(y,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Big((\widetilde{v}_\eta(\eta,\tau)+$$
$$+d(\eta,\tau))\frac{\eta h(\tau)b_1(\tau)+b_2(\tau)+\eta h'(\tau)}{h(\tau)}+$$
$$\left.+F(\eta,\tau)\right)d\eta d\tau. \qquad (14)$$

Позначимо $w(y,t)=v_y(y,t)$, $p(t)=h'(t)$. Подамо (14) у вигляді

$$v(y,t)=\varphi(yh_0)+(1-y)(\mu_1(t)-\mu_1(0))+$$
$$+y(\mu_2(t)-\mu_2(0))+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\times$$
$$\times\left(\frac{\eta h(\tau)b_1(\tau)+b_2(\tau)+\eta p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau)+\right.$$
$$\left.+F(\eta,\tau)\right)d\eta d\tau,\qquad (y,t)\in\overline{Q}_T. \qquad (15)$$

Продиференціювавши (15) за змінною y, одержуємо

$$w(y,t)=h_0\varphi'(yh_0)+\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+$$
$$+\mu_1(0)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\Big(F(\eta,\tau)+$$
$$\left.+\frac{\eta h(\tau)b_1(\tau)+b_2(\tau)+\eta p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau)\right)d\eta d\tau,$$

$$(y,t)\in\overline{Q}_T. \qquad (16)$$

Продиференціювавши (8)–(10) за змінною t і використавши (5), одержуємо

$$b_1(t)=\Big[(h(t)\mu_3(t)-2\mu_4(t))a(0,t)w(0,t)+$$
$$+\int\limits_0^1(h(t)a_x(yh(t),t)(h(t)y^2(h(t)\mu_1(t)-$$
$$-\mu_3(t))+y(2\mu_4(t)-h^2(t)\mu_1(t))+h(t)\times$$
$$\times\mu_3(t)-2\mu_4(t))+a(yh(t),t)(2\mu_4(t)-$$
$$-h^2(t)\mu_1(t)+2yh(t)(h(t)\mu_1(t)-\mu_3(t))))\times$$
$$\times w(y,t)dy-h^2(t)\int\limits_0^1(c(yh(t),t)v(y,t)+$$
$$+f(yh(t),t))(h(t)y^2(h(t)\mu_1(t)-\mu_3(t))+$$
$$+y(2\mu_4(t)-h^2(t)\mu_1(t))+h(t)\mu_3(t)-$$
$$-2\mu_4(t))dy+(h(t)\mu_3(t)-2\mu_4(t))h(t)\times$$
$$\times\mu_3'(t)+\mu_4'(t)(2\mu_4(t)-h^2(t)\mu_1(t))+$$
$$+\mu_5'(t)(h(t)\mu_1(t)-\mu_3(t))\Big]\big(2h(t)\mu_3(t)\times$$
$$\times\mu_4(t)-4\mu_4^2(t)-h^2(t)\mu_3^2(t)+3(\mu_3(t)-$$
$$-h(t)\mu_1(t))\mu_5(t)+2h^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t)\big)^{-1},$$

$$t\in[0,T], \qquad (17)$$

$$b_2(t)=\Big[(3\mu_5(t)-2h(t)\mu_4(t))a(0,t)w(0,t)+$$
$$+\int\limits_0^1(h(t)a_x(yh(t),t)(h(t)y^2(2\mu_4(t)-h(t)\times$$
$$\times\mu_3(t))+y(h^2(t)\mu_3(t)-3\mu_5(t))+3\mu_5(t)-$$
$$-h(t)\mu_4(t))+a(yh(t),t)(h^2(t)\mu_3(t)+2h(t)\times$$
$$\times y(2\mu_4(t)-h(t)\mu_3(t))-3\mu_5(t)))w(y,t)dy-$$
$$-h^2(t)\int\limits_0^1(c(yh(t),t)v(y,t)+f(yh(t),t))\times$$
$$\times(h(t)y^2(2\mu_4(t)-h(t)\mu_3(t))+(h^2(t)\mu_3(t)-$$
$$-3\mu_5(t))y-h(t)\mu_4(t)+3\mu_5(t)))dy+\mu_3'(t)\times$$
$$\times(3\mu_5(t)-2h(t)\mu_4(t))h(t)+(h^2(t)\mu_3(t)-$$
$$-3\mu_5(t))\mu_4'(t)+\mu_5'(t)(2\mu_4(t)-h(t)\mu_3(t))\Big]\times$$
$$\times\big(2h(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-h^2(t)\mu_3^2(t)-4\mu_4^2(t)+$$
$$+2h^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t)+3(\mu_3(t)-h(t)\mu_1(t))\times$$
$$\times\mu_5(t)\big)^{-1},\ t\in[0,T], \qquad (18)$$

$$p(t)=\Big[(3\mu_3(t)\mu_5(t)-3h(t)\mu_2(t)\mu_5(t)-$$
$$-h^3(t)\mu_2(t)\mu_3(t)+4h^2(t)\mu_2(t)\mu_4(t)-$$
$$-4\mu_4^2(t))\frac{a(0,t)}{h(t)}w(0,t)+(h^2(t)\mu_3^2(t)-$$
$$-2h(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-2h^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t)+$$
$$+4\mu_4^2(t)-3(\mu_3(t)-h(t)\mu_1(t))\mu_5(t))\times$$
$$\times\frac{a(h(t),t)}{h(t)}w(1,t)+\int\limits_0^1(a_x(yh(t),t)\times$$
$$\times(h^2(t)y^2(2(\mu_1(t)-\mu_2(t))\mu_4(t)-\mu_3^2(t)+$$
$$+2h(t)\mu_2(t)\mu_3(t)-h^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t))+$$
$$+yh(t)(2\mu_3(t)\mu_4(t)+3(\mu_2(t)-\mu_1(t))\times$$
$$\times\mu_5(t)-h^2(t)\mu_2(t)\mu_3(t)-2h(t)\mu_2(t)\times$$
$$\times\mu_4(t)+h^3(t)\mu_1(t)\mu_2(t))+3\mu_3(t)\mu_5(t)-$$
$$-3h(t)\mu_2(t)\mu_5(t)-h^3(t)\mu_2(t)\mu_3(t)-$$
$$-4\mu_4^2(t)+4h^2(t)\mu_2(t)\mu_4(t))+a(yh(t),t)\times$$
$$\times(2yh(t)(2\mu_4(t)(\mu_1(t)-\mu_2(t))-\mu_3^2(t)+$$
$$+2h(t)\mu_2(t)\mu_3(t)-h^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t))+$$
$$+3\mu_5(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))-h^2(t)\mu_2(t)\mu_3(t)-$$
$$-2h(t)\mu_2(t)\mu_4(t)+h^3(t)\mu_1(t)\mu_2(t)+$$
$$+2\mu_3(t)\mu_4(t)))w(y,t)dy-h(t)\int\limits_0^1(v(y,t)\times$$
$$\times c(yh(t),t)+f(yh(t),t))(h^2(t)y^2(2\mu_4(t)\times$$
$$\times(\mu_1(t)-\mu_2(t))+2h(t)\mu_2(t)\mu_3(t)-$$
$$-\mu_3^2(t)-h^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t))+yh(t)(2\mu_3(t)\times$$
$$\times\mu_4(t)+3\mu_5(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))-h^2(t)\times$$
$$\times\mu_2(t)\mu_3(t)-2h(t)\mu_2(t)\mu_4(t)+h^3(t)\times$$
$$\times\mu_1(t)\mu_2(t))-3h(t)\mu_2(t)\mu_5(t)+3\mu_3(t)\times$$
$$\times\mu_5(t)-h^3(t)\mu_2(t)\mu_3(t)-4\mu_4^2(t)+$$

$$+ 4h^2(t)\mu_2(t)\mu_4(t))dy + (3\mu_3(t)\mu_5(t)-$$
$$- 4\mu_4^2(t) - 3h(t)\mu_2(t)\mu_5(t) + 4h^2(t)\mu_2(t)\times$$
$$\times \mu_4(t) - h^3(t)\mu_2(t)\mu_3(t))\mu_3'(t) + \mu_4'(t)\times$$
$$\times (3(\mu_2(t) - \mu_1(t))\mu_5(t) - h^2(t)\mu_2(t)\mu_3(t)-$$
$$- 2h(t)\mu_2(t)\mu_4(t) + h^3(t)\mu_1(t)\mu_2(t)+$$
$$+ 2\mu_3(t)\mu_4(t)) + \mu_5'(t)(2(\mu_1(t) - \mu_2(t))\times$$
$$\times \mu_4(t) + 2h(t)\mu_2(t)\mu_3(t) - h^2(t)\mu_1(t)\times$$
$$\times \mu_2(t) - \mu_3^2(t))\Big] \big(\mu_2(t)(2h(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-$$
$$- h^2(t)\mu_3^2(t) - 4\mu_4^2(t) + 2h^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t)+$$
$$+ 3(\mu_3(t) - h(t)\mu_1(t))\mu_5(t))\big)^{-1},$$
$$t \in [0,T]. \tag{19}$$

Отже, задачу (5)–(10) зведено до системи інтегральних рівнянь (11), (15)–(19) відносно невідомих $(h(t), v(y,t), w(y,t), b_1(t), b_2(t), p(t))$. Зада-ча (5)–(10) та система рівнянь (11), (15)–(19) є еквівалентними у такому сенсі: якщо $(h, b_1, b_2, v) \in C^1[0,T] \times (C[0,T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5)–(10), то $(h, v, w, b_1, b_2, p) \in C[0,T] \times (C(\overline{Q}_T))^2 \times (C[0,T])^3$ є розв'язком системи рівнянь (11), (15)–(19). Покажемо, що правильним є і обернене твердження.

Нехай $(h(t), v(y,t), w(y,t), b_1(t), b_2(t), p(t))$ є неперервним розв'язком системи рівнянь (11), (15)–(19). Продиференціюємо (15) за змінною y. Праві частини отриманої рівності та рівності (16) співпадають, тому можемо зробити висновок, що $w(y,t) = v_y(y,t)$. Отже, функція $v \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}v_{yy} + \left(\frac{y(h(t)b_1(t) + p(t))}{h(t)}+\right.$$
$$\left.+\frac{b_2(t)}{h(t)}\right)v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t),$$
$$(y,t) \in Q_T, \tag{20}$$

та умови (6), (7) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $b_1(t), b_2(t), h(t), p(t)$. З рівності (11) випливає умова (8). Подамо (17)–(19) у вигляді

$$b_1(t)(h(t)\mu_2(t) - \mu_3(t)) + b_2(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t))+$$
$$+p(t)\mu_2(t) = \int_0^1 a_x(yh(t),t)v_y(y,t)dy + \mu_3'(t)-$$
$$-h(t)\int_0^1 (c(yh(t),t)v(y,t) + f(yh(t),t))dy+$$
$$+\frac{a(0,t)v_y(0,t) - a(h(t),t)v_y(1,t)}{h(t)}, \tag{21}$$

$$b_1(t)(h^2(t)\mu_2(t) - 2\mu_4(t))+$$
$$+b_2(t)(h(t)\mu_2(t) - \mu_3(t)) + p(t)h(t)\mu_2(t) =$$
$$= -a(h(t),t)v_y(1,t) + \int_0^1 (yh(t)a_x(yh(t),t)+$$
$$+a(yh(t),t))v_y(y,t)dy - h^2(t)\int_0^1 y(v(y,t)\times$$
$$\times c(yh(t),t) + f(yh(t),t))dy + \mu_4'(t), \tag{22}$$

$$b_1(t)(h^3(t)\mu_2(t) - 3\mu_5(t))+$$
$$+b_2(t)(h^2(t)\mu_2(t) - 2\mu_4(t)) + p(t)h^2(t)\mu_2(t) =$$
$$= -h(t)a(h(t),t)v_y(1,t) + h(t)\int_0^1 yv_y(y,t)\times$$
$$\times(yh(t)a_x(yh(t),t) + 2a(yh(t),t))dy-$$
$$-h^3(t)\int_0^1 y^2(c(yh(t),t)v(y,t)+$$
$$+f(yh(t),t))dy + \mu_5'(t). \tag{23}$$

Припущення теореми дозволяють нам продиференціювати (11) за t. Використавши те, що функція $v(y,t)$ задовольняє рівняння (20), та віднявши від отриманої рівності (21), одержимо

$$(h'(t) - p(t))\frac{\mu_3(t)}{h(t)} = 0.$$

Звідси робимо висновок, що $p(t) = h'(t)$, $h \in C^1[0,T]$ і функція $v(y,t)$ задовольняє рівняння (5). Зведемо (22), (23) до вигляду

$$2h'(t)h(t)\int_0^1 yv(y,t)dy + h^2(t)\int_0^1 y\Big(f(yh(t),t)+$$

$$+c(yh(t),t)v(y,t)+\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}v_{yy}(y,t)+$$

$$+\frac{yh(t)b_1(t)+b_2(t)+yh'(t)}{h(t)}v_y(y,t)\Big)dy=$$

$$=\mu_4'(t),$$

$$3h'(t)h^2(t)\int\limits_0^1 y^2v(y,t)dy+h^3(t)\int\limits_0^1 y^2\Big(v(y,t)\times$$

$$\times c(yh(t),t)+f(yh(t),t)+\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}v_{yy}(y,t)+$$

$$+\frac{yh(t)b_1(t)+b_2(t)+yh'(t)}{h(t)}v_y(y,t)\Big)dy=$$

$$=\mu_5'(t).$$

Використавши рівняння (5) та проінтегрувавши від 0 до t, одержуємо умови (9), (10).

Отже, еквівалентність задачі (5)–(10) та системи рівнянь (11), (15)–(19) у вище зазначеному сенсі доведено.

Подамо знаменник у (17)–(19) у вигляді

$$2h(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-h^2(t)\mu_3^2(t)-4\mu_4^2(t)+$$

$$+2h^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t)+3(\mu_3(t)-h(t)\mu_1(t))\mu_5(t)=$$

$$=\frac{h^4(t)}{2}\Big[\int\limits_0^1(1-y)(1-2y)w(y,t)dy\times$$

$$\times\int\limits_0^1 y(1-y)w(y,t)dy+\int\limits_0^1(1-y)w(y,t)dy\times$$

$$\times\int\limits_0^1 y(1-y)(2y-1)w(y,t)dy\Big].$$

Згідно з припущеннями теореми з (16) можемо зробити висновок про існування такого числа t_1, $0<t_1\le T$, що

$$w(y,t)\ge\frac{h_0}{2}\min_{[0,1]}\varphi'(yh_0)>0,\quad (y,t)\in\overline{Q}_{t_1}.$$

Тоді

$$\int\limits_0^1(1-y)w(y,t)dy>0,\quad t\in[0,t_1],$$

$$\int\limits_0^1 y(1-y)w(y,t)dy>0,\quad t\in[0,t_1].$$

Подамо вирази $\int\limits_0^1(1-y)(1-2y)w(y,t)dy$, $\int\limits_0^1 y(1-y)(2y-1)w(y,t)dy$ у вигляді

$$\int\limits_0^1(1-y)(1-2y)w(y,t)dy=\int\limits_0^{\frac12}(1-2y)\times$$

$$\times((1-y)w(y,t)-yw(1-y,t))dy,\qquad(24)$$

$$\int\limits_0^1 y(1-y)(2y-1)w(y,t)dy=\int\limits_0^{\frac12}y(1-y)\times$$

$$\times(1-2y)(w(1-y,t)-w(y,t))dy.\qquad(25).$$

Підставимо (16) в (24). Всі доданки, крім першого, при $t\to0$ прямують до нуля. Тоді можемо вважати, що існує таке число t_2, $0<t_2\le T$, що

$$\int\limits_0^1(1-y)(1-2y)w(y,t)dy\ge\frac{h_0}{2}\int\limits_0^{\frac12}(1-2y)\times$$

$$\times((1-y)\varphi'(yh_0)-y\varphi'(h_0(1-y)))dy>0,$$

$$t\in[0,t_2].$$

Підставивши (16) в (25), можемо зробити висновок про існування такого числа t_3, $0<t_3\le T$, що

$$\int\limits_0^1 y(1-y)(2y-1)w(y,t)dy\ge\frac{h_0}{2}\int\limits_0^{\frac12}y(1-y)\times$$

$$\times(1-2y)(\varphi'(h_0(1-y))-\varphi'(yh_0))dy>0,$$

$$t\in[0,t_3].$$

Таким чином,

$$2h(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+3(\mu_3(t)-h(t)\mu_1(t))\mu_5(t)-$$

$$-h^2(t)\mu_3^2(t)-4\mu_4^2(t)+2h^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t)\ge$$

$$\ge C_0>0,\qquad t\in[0,t_4],$$

$$t_4=\min\{t_1,t_2,t_3\}. \qquad (26)$$

Встановимо оцінки розв'язків системи рівнянь (11), (15)–(19).

Позначимо $W(t)=\max\limits_{y\in[0,1]}|w(y,t)|$. З (17)–(19), враховуючи (12), (26), одержуємо

$$|b_1(t)|\le C_1+C_2W(t), \quad |b_2(t)|\le C_3+C_4W(t),$$

$$|p(t)|\le C_5+C_6W(t) \quad t\in[0,t_4]. \qquad (27)$$

Використовуючи (12), (27) та оцінки функції Гріна [10], з (16) отримуємо

$$W(t)\le C_7+C_8\int\limits_0^t\frac{W(\tau)+W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau,\ t\in[0,t_4].$$

Метод розв'язування останньої нерівності подано в [11]. Звідси отримуємо оцінку

$$W(t)\le M_2<\infty, \quad t\in[0,t_5],$$

де t_5, $0<t_5\le t_4$, визначається сталими C_7,C_8. Тоді

$$|b_1(t)|\le C_1+C_2M_2\equiv B_1,$$

$$|b_2(t)|\le C_3+C_4M_2\equiv B_2,$$

$$|p(t)|\le C_5+C_6M_2\equiv B_3, \quad t\in[0,t_5].$$

Подамо систему рівнянь (11), (15)–(19) у вигляді операторного рівняння

$$\omega=P\omega,$$

де $\omega=(h(t),v(y,t),w(y,t),b_1(t),b_2(t),p(t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (11), (15)–(19).

Візьмемо довільні (h,v,w,b_1,b_2,p), для яких справедливі вище встановлені оцінки. Оцінимо праву частину рівняння (16):

$$|P_3w|\le C_9+C_{10}\sqrt{t}.$$

Вибираючи число $t_6, 0<t_6\le T$, так, щоб виконувалась нерівність $C_9+C_{10}\sqrt{t_6}\le M_2$, отримаємо

$$|P_3w|\le M_2, \quad (y,t)\in[0,1]\times[0,t_6].$$

Позначимо $N=\{(h,v,w,b_1,b_2,p)\in C[0,T_0]\times(C(\overline{Q}_{T_0}))^2\times(C[0,T_0])^3 : H_0\le h(t)\le H_1,\ M_0\le v(y,t)\le M_1,\ |w(y,t)|\le M_2,\ |b_1(t)|\le B_1,\ |b_2(t)|\le B_2,\ |p(t)|\le B_3\}$, де $T_0=\min\{t_5,t_6\}$. Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера, а оператор P переводить N в себе. Те, що оператор P цілком неперервний на N, доводиться як в [12].

Отже, за теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора існує розв'язок системи рівнянь (11), (15)–(19) і, відповідно, розв'язок задачі (5)–(10) при $(y,t)\in\overline{Q}_{T_0}$.

3. Єдиність розв'язку задачі (5)–(10).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

$$a\in C^{2,0}([0,\infty)\times[0,T]),\ a(x,t)>0,\ (x,t)\in$$

$$\in[0,\infty)\times[0,T],\ c,f\in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,T]),$$

$$\mu_i(t)>0,\ i=2,3,\ t\in[0,T],\ \varphi(x)\ge\varphi_0>0,$$

$$x\in[0,\infty),\ (h_0-x)\varphi'(x)-x\varphi'(h_0-x)>0,$$

$$\varphi'(h_0-x)-\varphi'(x)>0,\ x\in\left[0,\frac{h_0}{2}\right),\varphi'(x)>0,$$

$$x\in[0,h_0].$$

Тоді можна вказати таке число t_4, $0<t_4\le T$, *яке визначається вихідними даними, що задача (5)–(10) не може мати двох різних розв'язків* $(h,b_1,b_2,v)\in C^1[0,t_4]\times(C[0,t_4])^2\times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_4})$, $h(t)>0$, $t\in[0,t_4]$.

Доведення. Припустимо, що $(h_i(t),b_{1i}(t),b_{2i}(t),v_i(y,t))$, $i=1,2$, – два розв'язки задачі (5)–(10). Позначимо

$$\frac{b_{2i}(t)}{h_i(t)}=q_i(t), \qquad \frac{h_i'(t)}{h_i(t)}=s_i(t), \quad i=1,2,$$

$$r(t)=b_{11}(t)-b_{12}(t),\ q(t)=q_1(t)-q_2(t),$$

$$s(t)=s_1(t)-s_2(t),\ v(y,t)=v_1(y,t)-v_2(y,t).$$

Функції $r(t),q(t),s(t),v(y,t)$ задовольняють рівняння

$$v_t=\frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)}v_{yy}+(y(b_{11}(t)+s_1(t))+$$

$$+q_1(t))v_y+c(yh_1(t),t)v+\left(\frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)}-\right.$$

$$\left.-\frac{a(yh_2(t),t)}{h_2^2(t)}\right)v_{2yy}+(y(r(t)+s(t))+$$

$$+q(t))v_{2y}+(c(yh_1(t),t)-c(yh_2(t),t))v_2+$$
$$+f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t),\ (y,t)\in Q_T, \quad (28)$$

та умови

$$v(y,0)=0,\quad y\in[0,1], \quad (29)$$

$$v(0,t)=v(1,t)=0,\quad t\in[0,T], \quad (30)$$

$$\int\limits_0^1 v(y,t)dy=\mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right),$$

$$\int\limits_0^1 yv(y,t)dy=\mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right),$$

$$\int\limits_0^1 y^2v(y,t)dy=\mu_5(t)\left(\frac{1}{h_1^3(t)}-\frac{1}{h_2^3(t)}\right),$$

$$t\in[0,T]. \quad (31)$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t=\frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)}v_{yy}+(y(b_{11}(t)+s_1(t))+$$
$$+q_1(t))v_y+c(yh_1(t),t)v$$

з урахуванням умов (29), (30) функцію $v(y,t)$ подамо у вигляді

$$v(y,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg[\left(\frac{a(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1^2(\tau)}-\right.$$
$$\left.-\frac{a(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+(\eta(r(\tau)+s(\tau))+$$
$$+q(\tau))v_{2\eta}(\eta,\tau)+(c(\eta h_1(\tau),\tau)-c(\eta h_2(\tau),\tau))\times$$
$$\times v_2(\eta,\tau)+f(\eta h_1(\tau),\tau)-f(\eta h_2(\tau),\tau)\Bigg]d\eta d\tau,$$
$$(y,t)\in\overline{Q}_T. \quad (32)$$

Оскільки для $b_{1i}(t)$, $b_{2i}(t)$, $h_i'(t)$, $i=1,2$, справджуються рівності, аналогічні до (17)–(19), то звідси отримуємо

$$s(t)\mu_2(t)+q(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))+r(t)\Bigg(\mu_2(t)-$$
$$-\frac{\mu_3(t)}{h_1(t)}\Bigg)=\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right)\Bigg(b_{12}(t)\mu_3(t)+$$
$$+\mu_3'(t)+\int\limits_0^1 a_x(yh_2(t),t)v_{2y}(y,t)dy\Bigg)+$$
$$+(a(0,t)v_{2y}(0,t)-a(h_2(t),t)v_{2y}(1,t))\times$$
$$\times\left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right)-\frac{v_{2y}(1,t)}{h_1^2(t)}(a(h_1(t),t)-$$
$$-a(h_2(t),t))+\frac{1}{h_1(t)}\int\limits_0^1((a_x(yh_1(t),t)-$$
$$-a_x(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t)+a_x(yh_1(t),t)\times$$
$$\times v_y(y,t))dy-\int\limits_0^1(c(yh_1(t),t)v(y,t)+$$
$$+(c(yh_1(t),t)-c(yh_2(t),t))v_2(y,t)+$$
$$+f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t))dy+a(0,t)\times$$
$$\times\frac{v_y(0,t)}{h_1^2(t)}-a(h_1(t),t)\frac{v_y(1,t)}{h_1^2(t)},\ t\in[0,T], \quad (33)$$

$$q(t)(h_1(t)\mu_1(t)-\mu_3(t))+r(t)\Bigg(\mu_3(t)-$$
$$-\frac{2\mu_4(t)}{h_1(t)}\Bigg)=\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right)\Bigg(\mu_4'(t)+$$
$$+\int\limits_0^1 v_{2y}(y,t)(h_2(t)(y-1)a_x(yh_2(t),t)+$$
$$+a(yh_2(t),t))dy-a(0,t)v_{2y}(0,t)+$$
$$+2b_{12}(t)\mu_4(t)\Bigg)+\Bigg(\int\limits_0^1(1-y)(v_2(y,t)\times$$
$$\times c(yh_2(t),t)+f(yh_2(t),t))dy+\frac{1}{h_1(t)}\times$$
$$\times\int\limits_0^1(y-1)a_x(yh_2(t),t)v_{2y}(y,t)dy-$$
$$-q_2(t)\mu_1(t)\Bigg)(h_1(t)-h_2(t))-a(0,t)\times$$
$$\times\frac{v_y(0,t)}{h_1(t)}+\frac{1}{h_1(t)}\int\limits_0^1(h_1(t)a_x(yh_1(t),t)\times$$
$$\times(y-1)+a(yh_1(t),t))v_y(y,t)dy+\frac{1}{h_1(t)}\times$$
$$\times\int\limits_0^1(h_1(t)(a_x(yh_1(t),t)-a_x(yh_2(t),t))\times$$
$$\times(y-1)+a(yh_1(t),t)-a(yh_2(t),t))\times$$

$$
\begin{aligned}
&\times v_{2y}(y,t)dy+h_1(t)\int\limits_0^1(1-y)(c(yh_1(t),t)\times\\
&\times v(y,t)+(c(yh_1(t),t)-c(yh_2(t),t))\times\\
&\times v_2(y,t)+f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t))dy,
\end{aligned}
$$

$$
t\in[0,T], \tag{34}
$$

$$
\begin{aligned}
r(t)=\Big[&(h_2(t)\mu_3(t)-2\mu_4(t))a(0,t)v_{2y}(0,t)+\\
&+\int\limits_0^1 v_{2y}(y,t)(h_2(t)a_x(yh_2(t),t)(h_2(t)y^2\times\\
&\times(h_2(t)\mu_1(t)-\mu_3(t))+y(2\mu_4(t)-h_2^2(t)\times\\
&\times\mu_1(t))+h_2(t)\mu_3(t)-2\mu_4(t))+(2\mu_4(t)-\\
&-h_2^2(t)\mu_1(t)+2yh_2(t)(h_2(t)\mu_1(t)-\mu_3(t)))\times\\
&\times a(yh_2(t),t))dy-h_2^2(t)\int\limits_0^1(c(yh_2(t),t)\times\\
&\times v_2(y,t)+f(yh_2(t),t))(h_2(t)y^2(h_2(t)\times\\
&\times\mu_1(t)-\mu_3(t))+y(2\mu_4(t)-h_2^2(t)\mu_1(t))+\\
&+h_2(t)\mu_3(t)-2\mu_4(t))dy+(h_2(t)\mu_3(t)-\\
&-2\mu_4(t))h_2(t)\mu_3'(t)+\mu_4'(t)(2\mu_4(t)-h_2^2(t)\times\\
&\times\mu_1(t))+\mu_5'(t)(h_2(t)\mu_1(t)-\mu_3(t))\Big]\times\\
&\times((h_1(t)-h_2(t))(3\mu_1(t)\mu_5(t)-2\mu_3(t)\times\\
&\times\mu_4(t))+(h_1^2(t)-h_2^2(t))(\mu_3^2(t)-2\mu_1(t)\times\\
&\times\mu_4(t)))\big((2h_1(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-4\mu_4^2(t)-\\
&-h_1^2(t)\mu_3^2(t)+3(\mu_3(t)-h_1(t)\mu_1(t))\mu_5(t)+\\
&+2h_1^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t))(2h_2(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-\\
&-4\mu_4^2(t)-h_2^2(t)\mu_3^2(t)+3(\mu_3(t)-h_2(t)\times\\
&\times\mu_1(t))\mu_5(t)+2h_2^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t))\big)^{-1}+\\
&+\Big[(h_1(t)-h_2(t))(\mu_1(t)\mu_5'(t)-2\mu_3'(t)\mu_4(t)+\\
&+\mu_3(t)a(0,t)v_{2y}(0,t))+(h_1^2(t)-h_2^2(t))\times\\
&\times(\mu_3(t)\mu_3'(t)-\mu_1(t)\mu_4'(t))+(h_1(t)\mu_3(t)-\\
&-2\mu_4(t))a(0,t)v_y(0,t)+h_1^2(t)\int\limits_0^1(h_1(t)y^2\times\\
&\times(\mu_3(t)-h_1(t)\mu_1(t))+y(h_1^2(t)\mu_1(t)-\\
&-2\mu_4(t))-h_1(t)\mu_3(t)+2\mu_4(t))(c(yh_1(t),t)\times\\
&\times v(y,t)+(c(yh_1(t),t)-c(yh_2(t),t))\times\\
&\times v_2(y,t)+f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t))dy+\\
&+\int\limits_0^1(2\mu_4(t)(1-y)(h_1^2(t)-h_2^2(t))+\mu_3(t)\times\\
&\times(y^2-1)(h_1^3(t)-h_2^3(t))+\mu_1(t)y(1-y)\times\\
&\times(h_1^4(t)-h_2^4(t)))(c(yh_2(t),t)v_2(y,t)+\\
&+f(yh_2(t),t))dy+\int\limits_0^1(a(yh_1(t),t)(2\mu_4(t)-\\
&-h_1^2(t)\mu_1(t)+2yh_1(t)(h_1(t)\mu_1(t)-\mu_3(t)))+\\
&+h_1(t)a_x(yh_1(t),t)(h_1(t)y^2(h_1(t)\mu_1(t)-\\
&-\mu_3(t))+y(2\mu_4(t)-h_1^2(t)\mu_1(t))-2\mu_4(t)+\\
&+h_1(t)\mu_3(t)))v_y(y,t)dy+\int\limits_0^1((a(yh_1(t),t)-\\
&-a(yh_2(t),t))(2\mu_4(t)-h_1^2(t)\mu_1(t)+2y\times\\
&\times h_1(t)(h_1(t)\mu_1(t)-\mu_3(t)))+h_1(t)(h_1(t)\times\\
&\times y^2(h_1(t)\mu_1(t)-\mu_3(t))+y(2\mu_4(t)-\\
&-h_1^2(t)\mu_1(t))+h_1(t)\mu_3(t)-2\mu_4(t))\times\\
&\times(a_x(yh_1(t),t)-a_x(yh_2(t),t))+2(h_1(t)-\\
&-h_2(t))(\mu_4(t)(y-1)a_x(yh_2(t),t)-y\mu_3(t)\times\\
&\times a(yh_2(t),t))+(h_1^2(t)-h_2^2(t))(\mu_3(t)\times\\
&\times(1-y^2)a_x(yh_2(t),t)+(2y-1)\mu_1(t)\times\\
&\times a(yh_2(t),t))+(h_1^3(t)-h_2^3(t))\mu_1(t)(y^2-\\
&-y)a_x(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t)dy\Big]\big(2h_1(t)\mu_3(t)\times\\
&\times\mu_4(t)-4\mu_4^2(t)-h_1^2(t)\mu_3^2(t)+3(\mu_3(t)-\\
&-h_1(t)\mu_1(t))\mu_5(t)+2h_1^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t)\big)^{-1},
\end{aligned}
$$

$$
t\in[0,T], \tag{35}
$$

Згідно з (26) маємо

$$
\begin{aligned}
&2h_i(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+3(\mu_3(t)-h_i(t)\mu_1(t))\mu_5(t)-\\
&-h_i^2(t)\mu_3^2(t)-4\mu_4^2(t)+2h_i^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t)\geq\\
&\geq C_0>0,\ t\in[0,t_4],\ i=1,2.
\end{aligned}
$$

Продиференціювавши (32) за змінною y, одержуємо

$$
v_y(y,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G^*_{1y}(y,t,\eta,\tau)\Big[\Big(\frac{a(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1^2(\tau)}-
$$

$$-\frac{a(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2^2(\tau)}\Bigg)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+(\eta(r(\tau)+s(\tau))+$$

$$+q(\tau))v_{2\eta}(\eta,\tau)+(c(\eta h_1(\tau),\tau)-c(\eta h_2(\tau),\tau))\times$$

$$\times v_2(\eta,\tau)+f(\eta h_1(\tau),\tau)-f(\eta h_2(\tau),\tau)\Bigg]d\eta d\tau,$$

$$(y,t)\in\overline{Q}_T. \qquad (36)$$

Виразимо $h_i(t)$ через $s_i(t)$

$$h_i(t)=h_i(0)\exp\left(\int\limits_0^t s_i(\tau)d\tau\right), \quad i=1,2,$$

де $h_1(0)=h_2(0)=h_0$. Звідси, використовуючи рівність

$$e^x-e^y=(x-y)\int\limits_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau,$$

отримуємо

$$\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}=-\frac{1}{h_0}\int\limits_0^t s(\tau)d\tau\times$$

$$\times\int\limits_0^1\exp\left(-\int\limits_0^t(\sigma s(\tau)+s_2(\tau))d\tau\right)d\sigma. \quad (37)$$

Аналогічно (37) можемо використати для зображення різниць $\dfrac{1}{h_1^2(t)}-\dfrac{1}{h_2^2(t)}$, $h_1(t)-h_2(t)$, $h_1^2(t)-h_2^2(t)$, $h_1^3(t)-h_2^3(t)$, $h_1^4(t)-h_2^4(t)$.

Припущення теореми забезпечують правильність рівності

$$f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t)=y(h_1(t)-h_2(t))\times$$

$$\times\int\limits_0^1 f_x(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t)d\sigma, \quad (38)$$

що справедлива і для $a(yh_i(t),t)$, $a_x(yh_i(t),t)$, $c(yh_i(t),t)$, $i=1,2$.

Використавши (37), (38) і підставивши (32), (36) в (33)–(35), одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно невідомих $s(t),q(t),r(t)$ з ядрами, що мають інтегровні особливості. Звідси отримуємо, що $s(t)=0$, $q(t)=0$, $r(t)=0$, $t\in[0,t_4]$. Тому $s_1(t)=s_2(t)$, $q_1(t)=q_2(t)$, $b_{11}(t)=b_{12}(t)$, $t\in[0,t_4]$. Отже, $h_1(t)=h_2(t)$, $b_{21}(t)=b_{22}(t)$, $t\in[0,t_4]$. Враховуючи це в задачі (28)–(30), знаходимо, що $v_1(y,t)=v_2(y,t)$, $(y,t)\in\overline{Q}_{t_4}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Cannon J.* Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation / *J. Cannon, S. Perez-Esteva* // Inverse Problems. – 1994. – **10**, N. 3. – P. 521–531.

2. *Hong-Ming Yin.* Global solvability for some parabolic inverse problems / *Yin Hong-Ming* // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – P. 392–403.

3. *Trong D.D.* Coefficient identification for a parabolic equation / *D.D. Trong, D.D. Ang* // Inverse Problems. – 1994. – **10**, N. 3. – P. 733–752.

4. *Іванчов М.І.* Однозначне визначення двох коефіцієнтів у параболічному рівнянні у випадку нелокальних та інтегральних умов / *М.І. Іванчов, Н.В. Пабирівська* // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 5 – С. 589–596.

5. *Пабирівська Н.В.* Теплові моменти в обернених задачах для параболічних рівнянь / *Н.В. Пабирівська* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 142–149.

6. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами / *І. Баранська* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20–38.

7. *Іванчов М.І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності / *М.І. Іванчов* // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.

8. *Снітко Г.А.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею / *Г.А. Снітко* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 7–18.

9. *Снітко Г.А.* Обернена задача визначення молодшого коефіцієнта в параболічному рівнянні в області з вільною межею / *Г.А. Снітко* // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка". "Фізико-математичні науки". – 2009. – Вип. 643, № 643. – С. 45–52.

10. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / *О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева* // Москва: Наука, 1967. – 736 с.

11. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type // Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10.)

12. *Снітко Г.А.* Коефіцієнтна обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею / *Г.А. Снітко* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 37–47.