

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

## ЕЛІПТИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ІЗ ОСОБЛИВОСТЯМИ

У просторах класичних функцій із степеневою вагою доведено існування та єдиність розв'язків крайових задач для лінійних еліптичних диференціальних рівнянь зі степеневими особливостями в коефіцієнтах довільного порядку на координатних площинах.

Boundary problems for linear elliptic differential equations with a power peculiarities in the equation coefficients of an arbitrary order are considered. Existence and uniqueness of solution has been established for a classic functions space with power weight.

Математичне моделювання багатьох фізичних та біологічних явищ приводить до задач з виродженнями та особливостями для рівнянь із частинними похідними. Дослідженню таких задач присвячено праці [1 – 4]. У працях [5, 6] розроблено методи розв'язання крайової задачі для осесиметричного потенціалу, який задовольняє еліптичне рівняння з виродженням за однією змінною.

Вивченню розв'язків нелокальної крайової задачі для системи двох еліптичних рівнянь з особливостями присвячено працю [7]. Дослідження питань існування і якісних властивостей розв'язків еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями приведені у працях [8, 9].

У цій статті розглядаються еліптичні крайові задачі для лінійного диференціального рівняння із степеневими особливостями довільного порядку у коефіцієнтах на координатних площинах  $x_i = 0$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Одержано інтегральне зображення розв'язку першої крайової задачі, задачі зі скісною похідною та встановлені оцінки розв'язків у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

**Постановка задачі та основні обмеження.** Нехай  $(x_1, \dots, x_n)$  – координати точки  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega_j = \{x, x \in \mathbb{R}^n, x_j = 0\}$ ,  $D$  – обмежена область з множини  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j \geq 0, j \in \{1, \dots, n\}\}$  з межею  $\partial D$  така, що  $\partial D \cap \Omega_j \neq \emptyset$ . Розглянемо в області  $D$  задачу знаходження функції  $u$ , яка задовольняє

$$(Lu)(x) = \left[ \sum_{ij=1}^n A_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{i=1}^n A_i(x) \partial_{x_i} + A_0(x) \right] u(t, x) = f(x), \quad (1)$$

а на межі області  $\partial D$  одну з крайових умов

$$\lim_{x \rightarrow z \in \partial D} [u(x) - \varphi(x)] = 0, \quad (2)$$

$$(\mathcal{B}u)(x) = \lim_{x \rightarrow z \in \partial D} \left[ \sum_{k=1}^n b_k(x) \partial_{x_k} u + b_0(x) u - g(x) \right] = 0. \quad (3)$$

Порядок особливості коефіцієнтів диференціальних виразів  $L$  і  $\mathcal{B}$  будуть характеризувати функції  $s(a_i, x_i)$ :  $s(a_i, x_i) = x_i^{a_i}$  при  $0 \leq x_i \leq 1$ ,  $s(a_i, x_i) = 1$  при  $x_i = 1$ ;  $S(a, x) = \min\{s(a_1, x_1), \dots, s(a_n, x_n)\}$ ,  $a_1, \dots, a_n$  – довільні фіксовані дійсні числа.

Нехай  $\bar{D} = D \cup \partial D$ ,  $P_1(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ ,  $H_i(x_1^{(1)}, \dots, x_{i-1}^{(1)}, x_i^{(2)}, x_{i+1}^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$  – точки з  $\bar{D}$ ,  $p, l$  – додатні фіксовані дійсні числа. Визначимо функціональні простори, в яких будуть вивчатися задачі (1) – (3).

$C^l(\gamma; \beta; p; D)$  – множина функцій  $u$ , які мають неперервні частинні похідні в  $D$  вигляду  $\partial_x^k u(P)$ ,  $P(x_1, \dots, x_n) \in D$ ,  $|k| \leq [l]$ , для яких скінченна норма

$$\|u; \gamma; \beta; 0; D\|_0 = \sup_{\bar{D}} |u| \equiv \|u; D\|_0,$$

$$\begin{aligned} \|u; \gamma; \beta; p; D\|_l &= \sum_{|k|=0}^{|l|} \|u; \gamma; \beta; p; D\|_{|k|} + \\ &+ \langle u; \gamma; \beta; p; D \rangle_l \equiv \\ &\equiv \sum_{|k|=0}^{|l|} \sup_{P \in \bar{D}} S((|k|+p)\gamma, x) \prod_{m=1}^n s(-k_m \beta_m, x_m) \times \\ &\times |\partial_x^k u(P)| + \sum_{|k|=|l|} \sum_{i=1}^n \sup_{(P_i, H_i) \subset \bar{D}} S((l+p)\gamma, \tilde{x}) \times \\ &\times \prod_{m=1}^n s(-k_m \beta_m, \tilde{x}_m) s(-\{l\} \beta_i, \tilde{x}_i) \times \\ &\times |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|^{-\{l\}} |\partial_x^k u(P_i) - \partial_x^k u(H_i)|, \end{aligned}$$

$\gamma, \beta_i$  – фіксовані дійсні числа,  $\gamma \geq 0$ ,  $\beta_i \in (-\infty, \infty)$ ,  $|k| = k_1 + \dots + k_n$ ,  $s(a, \tilde{x}_i) = \min\{s(a, x_i^{(1)}), s(a, x_i^{(2)})\}$ ,  $S(a, \tilde{x}) = \min\{S(a, x^{(1)}), S(a, x^{(2)})\}$ .

Щодо задач (1) – (3) вважаємо виконаними умови:

а) для довільного вектора  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  виконується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \leq \sum_{ij=1}^n s(\beta_i, x_i) s(\beta_j, x_j) A_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \pi_2 |\xi|^2,$$

$\pi_1, \pi_2$  – додатні фіксовані сталі і  $s(\beta_i, x_i) s(\beta_j, x_j) A_{ij} \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; D)$ ,  $s(\mu_i, x_i) A_i \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; D)$ ,  $S(\mu_0, x) A_0 \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; D)$ ,  $A_0(x) < 0$  для  $x \in \bar{D}$ ,  $f \in C^\alpha(\gamma; \beta; \mu_0; D)$ ,  $\mu_0 \geq 0$ ,  $\mu_i \geq 0$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , межа  $\partial D \in C^{2+\alpha}$ ,  $\alpha \in (0; 1)$ ;

б) функція  $\varphi \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$

$$\gamma = \max \left\{ \max_i (1 + \beta_i), \max_i (\mu_i - \beta_i), \frac{\mu_0}{2} \right\},$$

в) вектори  $\vec{b}^{(s)} = \{b_1^{(s)}, \dots, b_n^{(s)}\}$ ,  $b_k^{(s)} = s(\beta_k, x_k) b_k(x)$  і  $\vec{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $e_k = \frac{b_k}{|\vec{b}|}$ ,

$|\vec{b}| = \left[ \sum_{k=1}^n b_k^2(x) \right]^{1/2}$  утворюють з напрямком зовнішньої нормалі  $\vec{n}$  до  $\partial D$  в тій же

точці  $P \in \partial D$  кут менший  $\frac{\pi}{2}$ ,  $s(\beta_k, x_k) b_k \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$ ,  $S(\delta, x) b_0 \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$ ,  $b_0 > 0$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $g \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; \delta; D)$ ,

$$\gamma = \max \left\{ \max_i (1 + \beta_i), \max_i (\mu_i - \beta_i), \frac{\mu_0}{2}, \delta \right\}.$$

Правильні такі теореми.

**Теорема 1.** Нехай для задачі (1), (2) виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) із простору  $C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$  і справджується оцінка

$$\|u; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \leq c \left( \|f; \gamma; \beta; \mu_0; D\|_\alpha + \|\varphi; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \right). \quad (4)$$

**Теорема 2.** Якщо для задачі (1), (3) виконуються умови а), в), то існує єдиний розв'язок задачі (1), (3) із простору  $C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$  і справджується оцінка

$$\|u; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \leq c \left( \|f; \gamma; \beta; \mu_0; D\|_\alpha + \|g; \gamma; \beta; \delta; D\|_{1+\alpha} \right). \quad (5)$$

Для дослідження задачі (1) – (3) встановимо спочатку коректну розв'язність послідовностей допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами, граничними значеннями послідовностей розв'язків яких будуть розв'язки задач (1) – (3).

**Оцінки розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами.** Нехай  $D_m = D \cap \{x \in D \mid s(1, x_i) \geq m^{-1}\}$ ,  $m > 1$ , – послідовність областей, яка при  $m \rightarrow \infty$  збігається до  $D$ . Розглянемо в області  $D$  задачу знаходження розв'язків рівняння

$$\begin{aligned} (L_1 u_m)(x) &= \left[ \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^n a_i(x) \partial_{x_i} + a_0(x) \right] u_m(x) = f_m(x), \quad (6) \end{aligned}$$

які задовольняють на межі області одну з умов

$$\lim_{x \rightarrow z \in \partial D} [u_m(x) - \varphi_m(x)] = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_1 u_m)(x) &= \lim_{x \rightarrow z \in \partial D} \left[ \sum_{k=1}^n l_k(x) \partial_{x_k} u_m + \right. \\ &+ \left. l_0(x) u_m - g_m(x) \right] = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Тут коефіцієнти  $a_{ij}$ ,  $a_i$ ,  $a_0$ ,  $l_k$ ,  $l_0$  і функції  $f_m$ ,  $\varphi_m$ ,  $g_m$  при  $x \in D_m$  співпадають з  $A_{ij}$ ,

$A_i, A_0, b_k, b_0$  і  $f, \varphi, g$  відповідно, а при  $x \in D \setminus D_m$  є продовженням зі збереженням норм і гладкості [10, стор. 82].

Знайдемо оцінки похідних розв'язків  $u_m(x)$ . Введемо у просторі  $C^{2+\alpha}(D)$  норму  $\|u_m; \gamma; \beta; p; D\|_{2+\alpha}$ , еквівалентну при кожному фіксованому  $m$  гельдерівій нормі, яка визначається так само, як і  $\|u; \gamma; \beta; p; D\|_{2+\alpha}$ , тільки замість функції  $s(a_i, x_i)$  беремо відповідно  $d(a_i, x_i) = \max(s(a_i, x_i), m_i^{-a_i})$ , якщо  $a_i \geq 0$ , і  $d(a_i, x_i) = \min(s(a_i, x_i), m_i^{-a_i})$ , якщо  $a_i < 0$ ,  $\rho(a, x) = \max(S(a, x), \max_i m_i^{-a_i})$ , якщо  $a_i \geq 0$ , і  $\rho(a, x) = \min(S(a, x), \max_i m_i^{-a_i})$ , якщо  $a_i < 0$ .

Сформулюємо принцип максимуму для розв'язків задач (6) – (8). Правильні теореми.

**Теорема 3.** *Нехай  $u_m$  – класичний розв'язок задачі (6), (7) в області  $D$  і виконані умови а), б). Тоді для  $u_m$  правильна нерівність*

$$|u_m| \leq \max\{\|f_m a_0^{-1}; D\|_0, \|\varphi_m; D\|_0\}. \quad (9)$$

Доводиться ця теорема за схемою доведення теореми 1.1 ([11], стор. 145), тобто аналізуються всі можливі розміщення додатного максимуму і від'ємного мінімуму розв'язку  $u_m(x)$ .

**Теорема 4.** *Якщо  $u_m$  – класичний розв'язок задачі (6), (8) в області  $D$  і виконані умови а), в), то для  $u_m$  правильна нерівність*

$$|u_m| \leq \max\{\|f_m a_0^{-1}; D\|_0, \|l_0^{-1} g_m; D\|_0\}. \quad (10)$$

Нерівність (10) одержується за схемою доведення теореми 1.1 ([11], стор. 145). Відмінність є тільки у випадку, коли  $0 < \max_{\bar{D}} u_m = \max_{\partial D} u = u_m(P_3)$ . В точці  $P_3$  маємо  $\frac{du_m}{d\vec{l}} \geq 0$  (вектор  $\vec{l}$  задовольняє умову в)), тому з крайової умови (8) отримаємо

$$u_m(P_3) \leq l_0^{-1}(P_3)g_m(P_3).$$

Якщо  $P_4$  (точка мінімуму для  $u_m(x)$ ) належить  $\partial D$ , то  $\frac{du_m(P_4)}{d\vec{l}} \leq 0$ . Враховуючи

крайову умову (8), одержуємо

$$u_m(P_4) \geq l_0^{-1}(P_4)g_m(P_4).$$

При виконанні умов а) – в), згідно з теоремою 2.17 із [12, стор. 231], існують єдині розв'язки задач (6) – (8) із простору  $C^{2+\alpha}(D)$ . Ці розв'язки мають скінченну норму  $\|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha}$  при кожному  $m$ . Знайдемо оцінку цієї норми.

Правильна така теорема.

**Теорема 5.** *Нехай виконані умови теореми 1. Тоді для розв'язку задачі (6), (7) правильна оцінка*

$$\|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \leq c(\|f; \gamma; \beta; \mu_0; D\|_\alpha + \|\varphi; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha}). \quad (11)$$

**Доведення.** В задачі (6), (7) зробимо заміну  $u_m(x) = v_m(x) + \varphi_m(x)$ . Тоді  $v_m(x)$  буде розв'язком однорідної задачі

$$(L_1 v_m)(x) = f_m(x) - (L\varphi_m)(x) \equiv F_m(x), \quad (12)$$

$$v_m|_{\partial D} = 0. \quad (13)$$

Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [10, 13] маємо

$$\|v_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \leq (1+\varepsilon^\alpha) \langle v_m; \gamma; \beta; 0; D \rangle_{2+\alpha} + c(\varepsilon) \|v_m; D\|_0,$$

де  $\varepsilon$  – довільне дійсне число із  $(0, 1)$ . Тому досить оцінити півнорму  $\langle v_m; \gamma; \beta; 0; D \rangle_{2+\alpha}$ . Із визначення півнорми випливає існування в  $D$  точок  $P_1$  та  $H_i$ , для яких правильна нерівність

$$\frac{1}{2} \|v_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \leq E(v_m), \quad (14)$$

$$E(v_m) = \sum_{|k|=2} \sum_{i=1}^n \rho((2+\alpha)\gamma, \tilde{x}) d(-\alpha\beta_i, \tilde{x}_i) \times \prod_{m=1}^n d(-k_m\beta_m, \tilde{x}_m) \times |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|^{-\alpha} |\partial_x^k v_m(P_1) - \partial_x^k v_m(H_i)|.$$

Розглянемо випадок  $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \leq n^{-1}\rho(\gamma, \tilde{x})d(-\beta_i, \tilde{x}_i)\frac{r}{4} \equiv T$ ,  $r \in (0, 1)$ ,  $r$  - довільна стала. Нехай  $\tilde{x} = x^{(1)}$ . Будемо вважати, що  $|x^{(1)} - y| \geq 2Tn$ , або  $|x_n^{(1)} - y_n| \geq 2T$ . Запишемо задачу (12), (13) у вигляді

$$\begin{aligned} (L_2 v_m)(x) &\equiv \left[ \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x^{(1)}) \partial_{x_i} \partial_{x_j} - \lambda \right] v_m = \\ &= \sum_{ij=1}^n [a_{ij}(x^{(1)}) - a_{ij}(x)] \partial_{x_i} \partial_{x_j} v_m + \\ &+ \sum_{i=1}^n a_i(x) \partial_{x_i} v_m + (a_m(x) - \lambda) v_m + F_m(x) \equiv \\ &\equiv \Phi(x, v_m) + F_m(x), \end{aligned} \quad (15)$$

$$v_m|_{\partial D} = 0, \quad (16)$$

де  $\lambda$  - довільне число, яке задовольняє нерівність  $\sup_{\bar{D}} A_0(x) - \lambda \geq 0$ .

Нехай  $V_\nu^{(1)}$  - область із  $D$ ,  $V_\nu^{(1)} = \{x \in D, |x_j - x_j^{(1)}| \leq \nu T, j \in \{1, \dots, n\}\}$ . Зробимо в задачі (15), (16) заміну

$$v_m(x) = \omega_m(z), \quad z_j = d(\beta_j, x_j^{(1)})x_j,$$

одержимо

$$\begin{aligned} (L_3 \omega_m)(x) &\equiv \left[ \sum_{ij=1}^n d(\beta_i, x_i^{(1)}) d(\beta_j, x_j^{(1)}) \times \right. \\ &\times a_{ij}(x^{(1)}) \partial_{z_i} \partial_{z_j} - \lambda \left. \right] \omega_m = \Phi(z, \omega_m) + F_m(Z), \\ &\omega_m|_{\partial D} = 0, \end{aligned}$$

де  $Z = (d(-\beta_1, x_1^{(1)})z_1, \dots, d(-\beta_n, x_n^{(1)})z_n)$ .

Позначимо  $z_i^{(1)} = d(\beta_i, x_i^{(1)})x_i^{(1)}$ ,  $H_\nu^{(1)} = \left\{ Z, |z_i - z_i^{(1)}| \leq \nu n^{-1}\rho(\gamma, x^{(1)})\frac{r}{4}, i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}$  і візьмемо тричі диференційовну функцію  $\eta(z)$ , яка задовольняє умови

$$\eta(z) = \begin{cases} 1, & z \in H_{1/4}^{(1)}, 0 \leq \eta(z) \leq 1; \\ 0, & z \notin H_{3/4}^{(1)}, |\partial_z^k \eta| \leq \\ & \leq c|k|\rho(-|k|\gamma, x^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція  $V_m(z) = \omega_m(z)\eta(z)$  задовольняє задачу Діріхле

$$\begin{aligned} (L_3 V_m)(z) &= \sum_{ij=1}^n d(\beta_i, x_i^{(1)}) d(\beta_j, x_j^{(1)}) \times \\ &\times [\partial_{z_i} \omega_m \partial_{z_j} \eta + \partial_{z_j} \omega_m \partial_{z_i} \eta] + \\ &+ \omega_m \left[ \sum_{ij=1}^n d(\beta_i, x_i^{(1)}) d(\beta_j, x_j^{(1)}) \partial_{z_i} \partial_{z_j} \eta(z) \right] + \\ &+ \eta \Phi + \eta F_m \equiv \Phi_1(\eta, \omega_m) + \eta F_m, \\ &V_m|_{\partial D} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Згідно з теоремою 1.1 із ([11], стор. 145) для розв'язку задачі (17), (18) і довільних точок  $M_1$  та  $M_2 \in H_{1/4}^{(1)}$  правильна нерівність

$$\begin{aligned} &|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}|^\alpha |\partial_\xi^2 \omega_m(M_1) - \partial_\xi^2 \omega_m(M_2)| \leq \\ &\leq c(\|\Phi_1(\eta, \omega_m)\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(1)})} + \|\eta F_m\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(1)})}). \end{aligned} \quad (19)$$

Враховуючи властивості функції  $\eta(z)$ , знаходимо

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(\eta, \omega_m)\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(1)})} &\leq c\rho(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)}) \times \\ &\times (\|\omega_m; \gamma; 0; 0; H_{3/4}^{(1)}\|_2 + \\ &+ \|\omega_m; H_{3/4}^{(1)}\|_0 + \|\Phi; \gamma; 0; 2\gamma; H_{3/4}^{(1)}\|_\alpha), \quad (20) \\ \|\eta F_m\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(1)})} &\leq c\rho(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)}) \times \\ &\times \|F_m; \gamma; 0; 2\gamma; H_{3/4}^{(1)}\|_\alpha. \end{aligned}$$

Підставляючи (20) у (19) і повертаючись до змінних  $x$ , одержимо

$$\begin{aligned} E(v_m) &\leq c_1(\|F_m; \gamma; \beta; 2\gamma; V_{3/4}^{(1)}\|_\alpha + \\ &+ \|\Phi; \gamma; \beta; 2\gamma; V_{3/4}^{(1)}\|_\alpha + \\ &+ \|v_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}^{(1)}\|_2 + \|v_m; V_{3/4}^{(1)}\|_0). \end{aligned} \quad (21)$$

Знайдемо оцінку норми виразу  $\Phi(x, v_m)$ . Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити півнорму кожного доданка. Наприклад,  $\langle a_0 v_m; \gamma; \beta; 2\gamma; V_{3/4}^{(1)} \rangle_\alpha$ . Маємо

$$\langle a_0 v_m; \gamma; \beta; 2\gamma; V_{3/4}^{(1)} \rangle_\alpha \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^n \sup_{\{A, B_j\} \subset V_{3/4}^{(1)}} \{|v_m|(\rho((2+\alpha)\gamma, \tilde{\xi})|\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}|^{-\alpha} \times \\ &\times |a_0(A) - a_0(B_j)|) + \rho(2\gamma, \tilde{\xi})|a_0(B_j)|(\rho(\alpha\gamma, \tilde{\xi}) \times \\ &\times d(-\alpha\beta_j, \tilde{\xi})|\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}|^{-\alpha} \times \\ &\times |v_m(A) - v_m(B_j)|)\} \leq c_2(\|v_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}^{(1)}\|_1 + \\ &+ \|v_m; V_{3/4}^{(1)}\|_0). \end{aligned}$$

Аналогічно одержуються оцінки інших доданків виразу  $\Phi(x, v_m)$ :

$$\begin{aligned} \|\Phi; \gamma; \beta; 2\gamma; V_{3/4}^{(1)}\|_\alpha &\leq \varepsilon_1 \|v_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}^{(1)}\|_{2+\alpha} + \\ &+ c_3 \|v_m; V_{3/4}^{(1)}\|_0, \end{aligned} \quad (22)$$

де  $\varepsilon_1 = \varepsilon^\alpha(n+2) + n^2 r^2 c_1$ .

Підставляючи (22) у (21) знаходимо

$$\begin{aligned} E(v_m) &\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon^\alpha) \|v_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} + \\ &+ c_4 \|v_m; D\|_0 + c_5 \|F_m; \gamma; \beta; 2\gamma; D\|_\alpha. \end{aligned} \quad (23)$$

Розглянемо випадок, коли  $|x^{(1)} - y| \leq 2Tn$  і  $|x_n^{(1)} - y_n| \leq 2T$ ,  $y \in \partial D$ . Нехай  $K_R(P)$  – куля радіуса  $R$ ,  $R \geq 4Tn$ , з центром в деякій точці  $P \in \partial D$ , яка містить точки  $P_1$  та  $H_i$ . Використовуючи обмеження на гладкість межі  $\partial D$ , можна розпрямити  $\partial D \cap K_R(P)$  за допомогою взаємно однозначного перетворення  $x = \psi(\tau)$  із ([10], стор. 126). В результаті такого перетворення область  $D \cap K_R(P)$  переходить в область  $Q$ , для точок якої  $\tau_n \geq 0$ .

Вважаємо, що  $v_m(x)$ ,  $P_1$ ,  $H_i$  при цьому перетворенні переходять відповідно в  $\omega_m(\tau)$ ,  $M_1$ ,  $N_i$ . Позначимо коефіцієнти диференціального виразу  $L_1$  в області  $Q$  через  $p_{ij}(\tau)$ ,  $p_i(\tau)$ ,  $p_0(\tau)$ . Тоді  $\omega_m(\tau)$  буде розв'язком задачі

$$\begin{aligned} &\left[ \sum_{ij=1}^n p_{ij}(M_1) \partial_{\tau_i} \partial_{\tau_j} - \lambda \right] \omega_m = \\ &= \Phi(\psi(\tau), \omega_m) + F_m(\psi(\tau)), \\ &\omega_m|_{\tau_n=0} = 0. \end{aligned}$$

Повторюючи міркування, наведені при знаходженні оцінки розв'язку задачі (15), (16) і використовуючи при цьому теорему

1.1 із ([11], стор. 145), одержимо нерівність (23).

Якщо  $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \geq T$ , то використовуючи інтерполяційні нерівності, маємо

$$\begin{aligned} E(v_m) &\leq \varepsilon^\alpha \|v_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} + \\ &+ C(\varepsilon) \|v_m; D\|_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Скориставшись нерівностями (14), (23), (24) і вибравши  $r$  та  $\varepsilon$  досить малими, одержимо оцінку

$$\begin{aligned} \|v_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} &\leq \\ &\leq c_6 (\|F_m; \gamma; \beta; 2\gamma; D\|_\alpha + \|v_m; D\|_0). \end{aligned} \quad (25)$$

Оскільки  $u_m = v_m + \varphi_m$ , то враховуючи нерівності (9), (25) і умову б), отримаємо оцінку (11).

**Доведення теореми 1.** Права частина нерівності (11) не залежить від  $m$ , тоді послідовності  $\{W_m^{(0)}\} \equiv \{u_m\}$ ,  $\{W_m^{(1)}\} \equiv \{\rho(\gamma, x)d(-\beta_i, x_i)\partial_{x_i} u_m(x)\}$ ,  $\{W_m^{(2)}\} \equiv \{\rho(2\gamma, x)d(-\beta_i, x_i)d(-\beta_j, x_j)\partial_{x_i} \partial_{x_j} u_m(x)\}$  рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні в області  $\bar{D}$ . За теоремою Арчела існують підпослідовності  $\{W_{m_k}^{(\nu)}\}$ , рівномірно збіжні в  $\bar{D}$  до  $W^{(\nu)}$ ,  $\nu \in \{0, 1, 2\}$ . Переходячи до границі при  $m_k \rightarrow \infty$  в задачі (6), (7), одержимо, що  $u(x) = W^{(0)}$  єдиний розв'язок задачі (1), (2),  $u \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$ .

**Теорема 6.** Якщо  $f \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; D)$  і виконані умови теореми 1, то єдиний розв'язок задачі (1), (2) із простору  $C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$  визначається інтегралами Стільтьєса з борелівською мірою

$$\begin{aligned} u(x) = u_1 + u_2 &= \int_D G_1(x; d\xi) f(\xi) + \\ &+ \int_{\partial D} G_2(x; d_\xi S) \varphi(\xi), \end{aligned} \quad (26)$$

компоненти  $(G_1, G_2)$  задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} \left| \int_D G_1(x; d\xi) \right| &\leq \sup_{\bar{D}} |A_0^{-1}(x)|, \\ \left| \int_{\partial D} G_2(x; d_\xi S) \right| &\leq 1. \end{aligned} \quad (27)$$

**Доведення.** Оскільки функція  $f \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; D)$ , то враховуючи теорему 1 і нерівність  $\|f; \gamma; \beta; \mu_0; D\|_\alpha \leq c\|f; \gamma; \beta; 0; D\|_\alpha$  для розв'язку задачі (1), (2) одержуємо оцінку

$$\|u; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \leq c(\|f; \gamma; \beta; 0; D\|_\alpha + \|\varphi; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha}). \quad (28)$$

Розглядатимемо  $u(x)$  при фіксованих  $x$  як лінійний неперервний функціонал на нормованому просторі  $C^\alpha(\gamma; \beta; 0; D) \subset C(D)$  з нормою, що дорівнює правій частині нерівності (28). На підставі теореми Рісса можна вважати, що  $u(x)$  породжує борелівську міру  $\Gamma(x, Y)$ , яка визначена на  $\sigma$ -алгебрі підмножин області  $D$ , включаючи  $D$  і всі відкриті підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулою (26).

З теорем 1, 5 для розв'язків задачі (1), (2) впливає справедливості нерівностей

$$\|u_1; D\|_0 \leq \|f A_0^{-1}(x); D\|_0, \quad \|u_2; D\|_0 \leq \|\varphi; D\|_0, \quad (29)$$

де  $u_1(x)$  – розв'язок однорідної крайової задачі (1), (2) при  $\varphi(x) \equiv 0$ , а  $u_2(x)$  – розв'язок задачі (1), (2) при  $f \equiv 0$ .

Підставивши в нерівності (29)  $\varphi \equiv 1$ ,  $f \equiv 1$ , одержимо нерівності (27).

**Теорема 7.** *Нехай виконані умови теореми 2. Тоді для розв'язку задачі (6), (8) правильна оцінка*

$$\|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \leq c(\|f; \gamma; \beta; \mu_0; D\|_\alpha + \|g; \gamma; \beta; \delta; D\|_{1+\alpha}). \quad (30)$$

**Доведення.** Оцінка (30) встановлюється за схемою доведення нерівності (11). Покажемо найсуттєвіші моменти.

Будемо вважати, що  $\tilde{x} = x^{(1)}$ . Тоді у випадку  $|x^{(1)} - y| \geq 2Tn$ , або  $|x_n^{(1)} - y_n| \geq 2T$ ,  $y \in \partial D$ , запишемо задачу (6), (8) у вигляді

$$(L_2 u_m)(x) = \Phi(x, u_m) + f_m(x), \quad (31)$$

$$\sum_{k=1}^n l_k(x^{(1)}) \partial_{x_k} u_m|_{\partial D} = \left\{ \sum_{k=1}^n [l_k(x^{(1)}) - l_k(x)] \times \right. \\ \left. \times \partial_{x_k} u_m - l_0(x) u_m + g_m(x) \right\} \Big|_{\partial D} \equiv$$

$$\equiv G_m(x, u_m)|_{\partial D}. \quad (32)$$

В задачі (31), (32) зробимо заміну  $u_m(t, x) = \omega_m^{(1)}(z)$ ,  $z_i = d(\beta_i, x_i^{(1)})x_i$ , одержимо

$$(L_3 \omega_m^{(1)})(z) = \Phi(z, \omega_m^{(1)}) + f_m(z), \quad (33)$$

$$\sum_{k=1}^n l_k(x^{(1)}) d(\beta_k; x_k^{(1)}) \partial_{z_k} \omega_m^{(1)}|_{\partial D} = \\ = G_m(z, \omega_m^{(1)})|_{\partial D}, \quad (34)$$

де  $Z = (d(-\beta_1, x_1^{(1)})z_1, \dots, d(-\beta_n, x_n^{(1)})z_n)$ .

Коефіцієнти рівняння (33) і крайової умови (34), згідно із зробленими припущеннями, обмежені сталими, незалежними від точки  $P_1$ . Тоді функція  $W_m(z) = \eta(z)\omega_m^{(1)}(z)$  є розв'язком крайової задачі

$$(L_3 W_m)(z) = \Phi_1(\eta, \omega_m^{(1)}) + \eta f_m(z), \quad (35)$$

$$\sum_{k=1}^n l_k(x^{(1)}) d(\beta_k; x_k^{(1)}) \partial_{z_k} W_m|_{\partial D^{(1)}} = \\ = \left[ \eta G_m - \sum_{k=1}^n l_k(x^{(1)}) \omega_m^{(1)} d(\beta_k, x_k^{(1)}) \partial_{z_k} \eta \right] \Big|_{\partial D^{(1)}}. \quad (36)$$

На підставі теореми 1.17 ([12], стор. 228) для розв'язку задачі (35), (36) і довільних точок  $M_1$  і  $M_2 \in H_{1/4}^{(1)}$  правильна нерівність

$$|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}|^{-\alpha} |\partial_\xi^2 u_m(M_1) - \partial_\xi^2 u_m(M_2)| \leq \\ \leq c(\|\Phi_1 + \eta f_m\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(1)})} + \\ + \left\| \eta G_m - \sum_{k=1}^n l_k(x^{(1)}) \omega_m^{(1)} \times \right. \\ \left. \times d(\beta_k, x_k^{(1)}) \partial_{z_k} \eta \right\|_{C^{1+\alpha}(H_{3/4}^{(1)})}). \quad (37)$$

Враховуючи властивості функції  $\eta(z)$ , знаходимо

$$\|\Phi_1 + \eta f_m\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(1)})} \leq c\rho(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)}) \times \\ \times (\|f_m; \gamma; 0; 2\gamma; H_{3/4}^{(1)}\|_\alpha + \\ + \|\Phi_m; \gamma; 0; 2\gamma; H_{3/4}^{(1)}\|_\alpha), \quad (38)$$

$$\left\| \eta G_m - \sum_{k=1}^n l_k(x^{(1)}) \omega_m^{(1)} d(\beta_k, x_k^{(1)}) \partial_{z_k} \eta \right\|_{C^{1+\alpha}(H_{3/4}^{(1)})} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq c\rho(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)}) \times \\ &\times (\|G_m; \gamma; 0; \gamma; H_{3/4}^{(1)}\|_{1+\alpha} + \\ &+ \|\omega_m^{(1)}; \gamma; 0; 0; H_{3/4}^{(1)}\|_1 + \|\omega_m^{(1)}; H_{3/4}^{(1)}\|_0). \end{aligned} \quad (39)$$

Підставляючи (38), (39) у (37) і повертаючись до змінних  $x$ , одержимо нерівність

$$\begin{aligned} E(u_m) &\leq c(\|f_m; \gamma; \beta; 2\gamma; V_{3/4}^{(1)}\|_\alpha + \\ &+ \|\Phi_m; \gamma; \beta; 2\gamma; V_{3/4}^{(1)}\|_\alpha + \\ &+ \|G_m; \gamma; \beta; \gamma; V_{3/4}^{(1)}\|_{1+\alpha} + \|u_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}^{(1)}\|_1 + \\ &+ \|u_m; V_{1/4}^{(1)}\|_0). \end{aligned} \quad (40)$$

Враховуючи інтерполяційні нерівності і оцінюючи півнорми кожного доданка виразів  $\Phi_m$  і  $G_m$ , одержимо

$$\begin{aligned} E(u_m) &\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon^\alpha) \|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} + \\ &+ c_7 \|u_m; D\|_0 + c_8 (\|f_m; \gamma; \beta; 2\gamma; D\|_\alpha + \\ &+ \|g_m; \gamma; \beta; \gamma; D\|_{1+\alpha}). \end{aligned} \quad (41)$$

У випадку  $|x^{(1)} - y| \leq 2Tn$  і  $|x_n^{(1)} - y_n| \leq 2T$ ,  $y \in \partial D$ , позначимо коефіцієнти диференціального виразу  $\mathcal{B}_1$  в області  $Q$  через  $h_i(\tau)$ . Тоді функція  $u_m(\psi(\tau)) \equiv \omega_m^{(2)}(\tau)$  в області  $Q$  буде розв'язком крайової задачі

$$\begin{aligned} &\left[ \sum_{ij=1}^n k_{ij}(M_1) \partial_{\tau_i} \partial_{\tau_j} - \lambda \right] \omega_m^{(2)} = \\ &= \Phi(\psi(\tau), \omega_m^{(2)}) + f_m(\psi(\tau)), \\ &\sum_{i=1}^n h_i(M_1) \partial_{\tau_i} \omega_m^{(2)} \Big|_{\tau_n=0} = \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n (h_i(M_1) - h_i(\tau)) \partial_{\tau_i} \omega_m^{(2)} - \right. \\ &\left. - h_0(\tau) \omega_m^{(2)} + g_m(\psi(\tau)) \right] \Big|_{\tau_n=0}. \end{aligned}$$

Повторюючи вищенаведені міркування й в цьому випадку одержуємо нерівність (41).

Скориставшись нерівностями (14), (24), (41) і вибравши  $r$  та  $\varepsilon$  досить малими, одержимо оцінку

$$\|u_m; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha} \leq c_9 (\|f_m; \gamma; \beta; 2\gamma; D\|_\alpha +$$

$$+ \|g_m; \gamma; \beta; \gamma; D\|_{1+\alpha} + \|u_m; D\|_0). \quad (42)$$

Враховуючи нерівності (10), (42), отримаємо оцінку (30).

**Доведення теореми 2.** Оскільки права частина нерівності (30) не залежить від  $m$  і послідовності  $\{W_m^{(\nu)}\}$ ,  $\nu \in \{1, 2\}$  рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні в  $D$ , то за теоремою Арчела існують підпослідовності  $\{W_{m(k)}^{(\nu)}\}$ , рівномірно збіжні в  $D$  при  $m(k) \rightarrow \infty$ . Переходячи до границі при  $m(k) \rightarrow \infty$  в задачі (6), (8), одержимо, що єдиний розв'язок задачі (1), (3) належить простору  $C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$  і правильна оцінка (5).

**Теорема 8.** Нехай  $f \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; D)$ ,  $g \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$  і виконані умови теореми 2. Тоді єдиний розв'язок задачі (1), (3) із простору  $C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$  визначається інтегралами Стільтьєса з борелівською мірою

$$u = \int_D \Gamma_1(x; d\xi) f(\xi) + \int_{\partial D} \Gamma_2(x; d_\xi S) g(\xi), \quad (43)$$

компоненти  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} \left| \int_D \Gamma_1(x; d\xi) \right| &\leq \sup_D |A_0^{-1}(x)|, \\ \left| \int_{\partial D} \Gamma_2(x; d_\xi S) \right| &\leq \sup_D |b_0^{-1}(x)|. \end{aligned} \quad (44)$$

Оскільки  $C^\alpha(\gamma; \beta; 0; D) \subset C^\alpha(\gamma; \beta; \mu_0; D)$ ,  $C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D) \subset C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; \delta; D)$ , то повторюючи міркування при доведенні теореми 6 одержимо формулу (43) і оцінки (44).

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бицадзе А.Б. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.
3. Dziubarski Jacek. Note on  $H^1$  spaces related to degenerate Schrödinger operators. J. Math. 2005. 49. № 4. – P. 1271-1297.
4. Han Pigong. Asymptotic behavior of solutions to semilinear elliptic equations with Hardy potential. Proc. Amer. Math. Soc. 2007. 135, № 2. – P. 365-372.

- 
5. *Плакса С.А.* Задача Дирихле для осесимметричного потенциала в односвязанной области меридианной плоскости // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 12. – С. 1623-1640.
  6. *Плакса С.А.* К решению внешней задачи Дирихле для осесимметричного потенциала // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 12. – С. 1634-1641.
  7. *Моисеев Е.И.* О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифф. уравнения. – 2001. – 37, № 11. – С. 1555-1567.
  8. *Esteban Maria J.* Nonexistence result for positive solutions of nonlinear elliptic degenerate problems // Nonlinear Anal. Theory Math. and Appl. – 1996, 26, № 4. – P. 835-843.
  9. *Amano Kazuo.* Maximum principle for degenerate elliptic-parabolic equations with Venttsel's boundary conditions. – Trans. Amer. Math. Soc. – 1981. 263, № 2. – P. 377-396.
  10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.
  11. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
  12. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
  13. *Пукальський І.Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями: Монографія. – Чернівці, 2008. – 253 с.