

## НЕРІВНІСТЬ ВІМАНА ДЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ В БІКРУЗІ

Доведено аналог нерівності Вімана для функцій, аналітичних в бікрузі  $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2: |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ . Отримані нерівності точні.

In this paper we prove some analogue of Wiman's type inequality for analytic functions in the bidisc  $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2: |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ . The obtained inequality is sharp.

**1. Вступ.** За теоремою Вімана-Валірона (див., наприклад, [1 – 4]) для кожної не то-тожко сталої цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad (1)$$

і будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує така множина  $E \subseteq [1, +\infty)$  скінченної логарифмічної міри ( $\int_E \frac{dr}{r} < +\infty$ ), що для всіх  $r \in [1, +\infty) \setminus E$  виконується нерівність Вімана

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \ln^{1/2+\varepsilon} \mu_f(r).$$

Тут  $M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$ ,  $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n: n \geq 0\}$ . З іншого боку, для кожної аналітичної в одиничному крузі  $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$  функції  $f$  вигляду (1) і будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує така множина  $E \subseteq [0, 1)$  скінченної логарифмічної міри на інтервалі  $[0, 1)$  (тобто,  $\int_E \frac{dr}{1-r} < +\infty$ ), що для всіх  $r \in [0, 1) \setminus E$  виконується нерівність (див., наприклад, [5 – 9])

$$M_f(r) \leq \frac{\mu_f(r)}{(1-r)^{1+\delta}} \ln^{1/2+\delta} \frac{\mu_f(r)}{1-r}.$$

У статті [6] вказано, що для функції  $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\{n^\varepsilon\} z^n$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{M_g(r)}{\frac{\mu_g(r)}{1-r} \ln^{1/2} \frac{\mu_g(r)}{1-r}} \geq C > 0.$$

У [10] доведено аналог нерівності Вімана для аналітичних в області  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}^2: |z_1| < 1, z_2 \in \mathbb{C}\}$  функцій, степеневий розклад яких у цій області має вигляд

$$f(z) = f(z_1, z_2) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m. \quad (2)$$

У даній статті розглянемо задачу встановлення нерівностей типу Вімана в класі функцій аналітичних у бікрузі  $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2: |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ , степеневе розвинення яких має вигляд (2).

Через  $\mathcal{A}^2$  позначимо клас таких функцій.

**2. Нерівність Вімана для аналітичних функцій в бікрузі.** Для функції  $f \in \mathcal{A}^2$  і  $r = (r_1, r_2) \in [0, 1)^2$  позначимо

$$M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z_1| \leq r_1, |z_2| \leq r_2\},$$

$$\mu_f(r) = \max\{|a_{nm}| r_1^n r_2^m: (n, m) \in \mathbb{Z}_+^2\},$$

$$\mathfrak{M}_f(r) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} |a_{nm}| r^n, \quad \Delta_r = [r_1, 1) \times [r_2, 1).$$

Нехай  $D_f(r)$  —  $2 \times 2$  матриця така, що

$$D_{ij} = r_i \frac{\partial}{\partial r_i} \left( r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r) \right) = \partial_i \partial_j \ln \mathfrak{M}_f(r),$$

$$\partial_i = r_i \frac{\partial}{\partial r_i}, \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Наступне твердження доводиться практично дослівним повтором міркувань з доведення теореми 3.1 зі статті [11], зважаючи на це, опустимо її доведення.

**Теорема 1.** Нехай  $f \in \mathcal{A}^2$ . Існує абсолютна стала  $C_0$  така, що

$$\mathfrak{M}_f(r) \leq C_0 \mu_f(r) (\det(D_f(r) + I))^{1/2},$$

де  $I$  —  $2 \times 2$  одинична матриця.

Будемо казати, що  $E \subseteq [0, 1)^2$  є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на  $[0, 1)^2$ , якщо існує  $r_0 \in [0, 1)^2$

таке, що

$$\nu_{\ln}(E \cap \Delta_{r_0}) := \iint_{E \cap \Delta_{r_0}} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} < +\infty,$$

тобто множина  $E \cap \Delta_{r_0}$  є множиною скінченної логарифмічної міри на  $[0, 1]^2$ .

**Лема 1.** Нехай  $\delta > 0$ ,  $h: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  — функція, зростаюча по кожній змінній окремо при фіксованому довільному значенні іншої змінної, і така, що

$$\int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{du_1 du_2}{h(u_1, u_2)} < +\infty.$$

Тоді існує множина  $E \subseteq [0, 1]^2$  асимптотично скінченної логарифмічної міри така, що для всіх  $r \in [0, 1]^2 \setminus E$  виконується

$$\det(D_f(r) + I) \leq \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \times h\left(\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r), \frac{\partial}{\partial r_2} \ln \mathfrak{M}_f(r)\right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r) \leq \frac{1}{(\ln \mathfrak{M}_f(r))^{1+\delta}} \cdot \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)^\delta}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_2} \ln \mathfrak{M}_f(r) \leq \frac{1}{(\ln \mathfrak{M}_f(r))^{1+\delta}} \cdot \frac{1}{(1-r_1)^\delta(1-r_2)}. \quad (5)$$

*Доведення.* Нехай  $E_0 \subseteq [0, 1]^2$  — множина, на якій не виконується нерівність (3). Доведемо, що  $E_0$  є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри. Оскільки функція  $r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r)$  є зростаючою за кожною змінною, тоді існує  $r^0 \in [1/2, 1]^2$  таке, що для довільного  $j \in \{1, 2\}$  і всіх  $r \in \Delta_{r^0}$  маємо

$$r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_j > 1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \nu_{\ln}(E_0 \cap \Delta_{r^0}) &= \iint_{E_0 \cap \Delta_{r^0}} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} \leq \\ &\leq \iint_{E_0 \cap \Delta_{r^0}} \frac{\det(D_f(r) + I)(1-r_1)(1-r_2)}{h\left(\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r), \frac{\partial}{\partial r_2} \ln \mathfrak{M}_f(r)\right)} \times \\ &\quad \times \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} \leq \\ &\leq \iint_{E_0 \cap \Delta_{r^0}} \frac{\det(D_f(r) + I) dr_1 dr_2}{h\left(r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r), r_2 \frac{\partial}{\partial r_2} \ln \mathfrak{M}_f(r)\right)} \leq \\ &\leq \iint_{E_0 \cap \Delta_{r^0}} \frac{\det(D_f(r) + I) 2r_1 2r_2 dr_1 dr_2}{h\left(r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r), r_2 \frac{\partial}{\partial r_2} \ln \mathfrak{M}_f(r)\right)} \leq \\ &\leq 4 \iint_{E_0 \cap \Delta_{r^0}} h^{-1}\left(r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_1, \right. \\ &\quad \left. r_2 \frac{\partial}{\partial r_2} \ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_2\right) \times \\ &\quad \times \det(D_f(r) + I) r_1 r_2 dr_1 dr_2. \end{aligned}$$

Нехай  $U: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$  — відображення таке, що  $U = (u_1, u_2)$  і  $u_j = r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . Якщо  $i \neq j$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial r_i} &= \frac{\partial}{\partial r_i} \left( r_j \frac{\partial}{\partial r_i} \ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_j \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial r_i} \left( r_j \frac{\partial}{\partial r_i} \ln \mathfrak{M}_f(r) \right) = \frac{1}{r_i} \partial_i \partial_j \ln \mathfrak{M}_f(r); \\ \frac{\partial u_i}{\partial r_i} &= \frac{\partial}{\partial r_i} \left( r_i \frac{\partial}{\partial r_i} \ln \mathfrak{M}_f(r) + \ln r_i \right) = \\ &= \frac{1}{r_i} \partial_i \partial_j \ln \mathfrak{M}_f(r) + \frac{1}{r_i}, \quad i, j \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Якобіан матриці переходу

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{D(u_1, u_2)}{D(r_1, r_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial r_1} & \frac{\partial u_1}{\partial r_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial r_1} & \frac{\partial u_2}{\partial r_2} \end{vmatrix} = \\ &= r_1 r_2 \det(D_f(r) + I). \end{aligned}$$

Тоді,  $E_0 \cap \Delta_{r^0}$  є множиною скінченної логарифмічної міри.

$$\begin{aligned} \nu_{\ln}(E_0 \cap \Delta_{r^0}) &= 4 \iint_{U^{-1}(E_0 \cap \Delta_{r^0})} \frac{du_1 du_2}{h(u_1, u_2)} < \\ &< 4 \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{du_1 du_2}{h(u_1, u_2)} < +\infty. \end{aligned}$$

Позначимо через  $E_1 \subseteq [0, 1)^2$  — множину, на якій нерівність (4) не виконується. Виберемо  $r^0 \in [1/2, 1)^2$  таке, що  $r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r) > 1$  для кожного  $j \in \{1, 2\}$ .

$$\begin{aligned} \nu_{\ln}(E_1 \cap \Delta_{r^0}) &= \iint_{E_1 \cap \Delta_{r^0}} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} \leq \\ &\leq \iint_{E_1 \cap \Delta_{r^0}} \frac{\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r) \cdot (1-r_1)}{\frac{1}{(1-r_2)^\delta} \cdot \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r)} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)}. \end{aligned}$$

Розглянемо відображення  $V: [0, 1)^2 \rightarrow [0, 1) \times \mathbb{R}_+$ , де  $V = (v_1(r), v_2(r))$  і  $v_1 = \ln \mathfrak{M}_f(r)$ ,  $v_2 = r_2$ .

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{D(v_1, v_2)}{D(r_1, r_2)} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r) & \frac{\partial}{\partial r_2} \ln \mathfrak{M}_f(r) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r). \end{aligned}$$

Логарифмічна міра множини  $E_1 \cap \Delta_{r^0}$  скінченна.

$$\begin{aligned} \nu_{\ln}(E_1 \cap \Delta_{r^0}) &= \\ &= \iint_{E_1 \cap \Delta_{r^0}} \frac{\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r)}{\frac{1}{(1-r_2)^\delta} \cdot \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r)} \frac{dr_2}{1-r_2} dr_1 = \\ &= \iint_{V^{-1}(E_1 \cap \Delta_{r^0})} \frac{1}{u_1^{1+\delta} \frac{1}{(1-u_2)^\delta}} \cdot \frac{du_2}{1-u_2} du_1 \leq \\ &\leq \int_1^{+\infty} \frac{du_1}{u_1^{1+\delta}} \cdot \int_0^1 \frac{du_2}{(1-u_2)^{1-\delta}} < +\infty. \end{aligned}$$

Нехай  $E_2 \subset [0, 1)^2$  — множина, на якій не виконується нерівність (5). Подібно доводимо, що  $E_2$  є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на  $[0, 1)^2$ .

Зауважимо, що  $E = \cup_{j=0}^2 E_j$  і, отже, також є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на  $[0, 1)^2$ .

**Теорема 2.** Нехай  $f \in \mathcal{A}^2$ . Для кожного  $\delta > 0$  існує множина  $E = E(f, \delta) \subseteq [0, 1)^2$  асимптотично скінченної логарифмічної міри така, що для всіх  $r \in [0, 1)^2 \setminus E$

виконується нерівність

$$\begin{aligned} M_f(r) &\leq \mu_f(r) \times \\ &\times \left( \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \cdot \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \right)^{1+\delta}. \end{aligned} \quad (6)$$

*Доведення.* Позначимо через  $E$  виняткову множину з леми 1. Тоді для  $h(r) = (r_1 r_2)^{1+\delta}$  і всіх  $r \in [0, 1)^2 \setminus E$  маємо

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_f(r) &\leq C_0 \mu_f(r) (\det(D_f(r) + I))^{1/2} \leq \\ &\leq C_0 \mu_f(r) \left( \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \right)^{1/2} \times \\ &\times h^{1/2} \left( \frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r), \frac{\partial}{\partial r_2} \ln \mathfrak{M}_f(r) \right) \leq \\ &\leq C_0 \mu_f(r) \left( \prod_{i=1}^2 \frac{1}{1-r_i} \left( \frac{\partial}{\partial r_i} \ln \mathfrak{M}_f(r) \right)^{1+\delta} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C_0 \mu_f(r) \left( \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \right)^{\frac{(1+\delta)^2}{2}} \times \\ &\times \left( \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \ln^{2(1+\delta)^2} \mathfrak{M}_f(r) \right)^{1/2} = \\ &= C_0 \mu_f(r) \left( \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \right)^{1+\delta+\delta^2/2} \times \\ &\times \ln^{(1+\delta)^2} \mathfrak{M}_f(r) < \\ &< \mu_f(r) \left( \frac{\ln \mathfrak{M}_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \right)^{1+\delta_1}, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\delta_1 = 2(\delta + \delta^2)$ . З нерівності (7) випливає, що для всіх  $r \in \Delta_{r^0} \setminus E$

$$\begin{aligned} \ln \mathfrak{M}_f(r) &< \ln \mu_f(r) + (1 + \delta_1) \times \\ &\times \left( \ln \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} + \ln_2 \mathfrak{M}_f(r) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln \mathfrak{M}_f(r) &- (1 + \delta_1) \ln_2 \mathfrak{M}_f(r) < \\ &< \ln \mu_f(r) + (1 + \delta_1) \ln \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}. \end{aligned}$$

Тоді існує  $r^1 \in [0, 1)^2$  таке, що для всіх  $r \in$

$\Delta_{r_1} \setminus E$  маємо

$$\begin{aligned} \ln \mathfrak{M}_f(r) &< 2 \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}, \\ M_f(r) &\leq \mathfrak{M}_f(r) \leq \mu_f(r) \times \\ &\times \left( \frac{2}{(1-r_1)(1-r_2)} \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \right)^{1+\delta_1} \leq \\ &\leq \mu_f(r) \times \\ &\times \left( \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \right)^{1+\delta_2}, \end{aligned}$$

де  $\delta_2 = 2\delta_1$ .

### 3. Приклади на точність нерівності (6).

З теореми 2 випливає, що для кожного  $\delta > 0$  множина

$$\begin{aligned} E = E(f, \delta) &= \left\{ r \in [0, 1)^2 : M_f(r) > \mu_f(r) \times \right. \\ &\times \left. \left( \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \right)^{1+\delta} \right\} \end{aligned}$$

є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на  $[0, 1)^2$ . Доведемо, що показник  $1 + \delta$  у нерівності (6) не можна замінити числом меншим за 1.

Розглянемо функцію

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\sqrt{n}} z_1^n \cdot \sum_{m=1}^{+\infty} e^{\sqrt{m}} z_2^m.$$

Позначимо  $f_0(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\sqrt{n}} z^n$ . Для функції  $f(z) = f_0(z_1)f_0(z_2)$  маємо  $M_f(r) = M_{f_0}(r_1)M_{f_0}(r_2)$ ,  $\mu_f(r) = \mu_{f_0}(r_1)\mu_{f_0}(r_2)$ .

Як доведено в [6] для функції  $f_0(z_1)$  існує стала  $C_0 \in (0, 1)$  така, що

$$C_0 \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1} \leq \frac{M_{f_0}(r_1)}{\sqrt{\ln M_{f_0}(r_1)}} \leq \frac{1}{C_0} \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}, \quad (8)$$

$r_1 \rightarrow 1 - 0$ .

З нерівності (8) випливає, що для  $r_1 \geq r'_1$  існує стала  $C_1 < C_0$  така, що

$$M_{f_0}(r_1) \geq C_1 \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1} \ln^{1/2} \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}. \quad (9)$$

Доведемо нерівність

$$\begin{aligned} g^{-1}(3g(r_1)) - g^{-1}\left(\frac{g(r_1)}{3}\right) &> 1 - g^{-1}(3g(r_1)), \\ (10) \end{aligned}$$

$$r_1 \rightarrow 1 - 0, \quad g(r_1) = \ln \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}.$$

Функція  $g(r_1) = \ln \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}$  є додатною зростаючою на  $(1/2, 1)$ , і  $\lim_{r_1 \rightarrow 1-0} g(r_1) = +\infty$ . Тоді існує зростаюча обернена до  $g$  функція  $g^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow (1/2, 1)$ .

Для фіксованого  $r$  розглянемо функцію  $l(x) = \sqrt{x} - x \ln \frac{1}{r_1}$ .  $x_{\max} = \frac{1}{4 \ln^2 \frac{1}{r_1}}$  — єдина точка максимуму цієї функції.  $l_{\max} = \frac{1}{4 \ln \frac{1}{r_1}}$ . Тоді

$$\begin{aligned} g(r_1) &= \ln \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1} \sim \ln \mu_{f_0}(r_1) \sim \frac{1}{4 \ln \frac{1}{r_1}} \sim \\ &\sim \frac{1}{4(1-r_1)}, \quad r_1 \rightarrow 1 - 0. \end{aligned}$$

З останнього співвідношення випливає, що  $g(r_1) < 3g(2r_1 - 1)$ ,  $r_1 \rightarrow 1 - 0$ . Отже,

$$\begin{aligned} g(2r_1 - 1) &> \frac{g(r_1)}{3}, \quad 2r_1 - 1 > g^{-1}\left(\frac{g(r_1)}{3}\right), \\ r_1 - g^{-1}\left(\frac{g(r_1)}{3}\right) &> 1 - r_1 \end{aligned}$$

і використовуючи  $g^{-1}(3g(r_1)) > g^{-1}(g(r_1)) = r_1$ , одержимо при  $r_1 \rightarrow 1 - 0$

$$\begin{aligned} g^{-1}(3g(r_1)) - g^{-1}\left(\frac{g(r_1)}{3}\right) &> \\ &> r_1 - g^{-1}\left(\frac{g(r_1)}{3}\right) > \\ &> 1 - r_1 > 1 - g^{-1}(3g(r_1)). \end{aligned}$$

Нерівність (10) доведена.

З (9) отримаємо, що існують стала  $C_1 \in (0, 1)$  і  $r^* \in (1/2, 1)$  такі, що для кожного  $i \in \{1, 2\}$  і всіх  $z \in \{z: r^* < |z_j| < 1, j \in \{1, 2\}\}$  виконуються нерівності

$$\begin{aligned} M_{f_0}(r_i) &\geq C_1 \frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i} \sqrt{\ln \frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i}}, \\ g^{-1}\left(\frac{g(r^*)}{3}\right) &> r^0. \end{aligned} \quad (11)$$

Отже, для всіх  $z \in \{z: r^* < |z_j| < 1, j \in$

$$\prod_{i=1}^2 M_{f_0}(r_i) \geq \prod_{i=1}^2 \left( C_1 \frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i} \sqrt{\ln \frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i}} \right),$$

$$M_f(r) \geq C_1^2 \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \times$$

$$\times \left( \ln \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1} \ln \frac{\mu_{f_0}(r_2)}{1-r_2} \right)^{1/2}. \quad (12)$$

Для  $r_1 \in (r^*, 1)$  визначимо

$$x = x(r_1) = g^{-1}\left(\frac{g(r_1)}{3}\right),$$

$$y = y(r_1) = g^{-1}(3g(r_1)).$$

Позначимо  $E^* = \{r \in [0, 1]^2: r_1 \in (r^*, 1), r_2 \in (x, y)\}$ . Зафіксуємо  $r_1 \in (r^*, 1)$ . Тоді  $x$  і  $y$  є також фіксованими і  $g(x) = g(r_1)/3$ ,  $g(y) = 3g(r_1)$ ,  $g(y) = 9g(x)$ ,  $r_2 \in (x, y)$ . Оскільки  $r_1 > x$ , то для всіх  $r \in E^*$  отримаємо

$$g(r_1)g(r_2) \geq g^2(x) = \frac{g^2(y)}{81} =$$

$$= \frac{1}{324}(g(y) + g(y))^2 \geq \frac{1}{324}(g(r_1) + g(r_2))^2.$$

Тоді з нерівності (12) отримаємо для всіх  $r \in E^*$

$$M_f(r) \geq \frac{C_1^2}{324} \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \times$$

$$\times \left( \ln \frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1} + \ln \frac{\mu_{f_0}(r_2)}{1-r_2} \right) =$$

$$= \frac{C_1^2}{324} \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}.$$

Доведемо, що множина  $E^*$  є множиною асимптотично нескінченної логарифмічної міри. Оскільки  $g^{-1}\left(\frac{g(r^*)}{3}\right) > r^0$ , то  $E^* \cap \triangle_{r^0} = E^*$ . Використавши нерівність (10) отрима-

$$\nu_{\ln}(E^* \cap \triangle_{r^0}) = \nu_{\ln}(E^*) =$$

$$= \iint_{E^*} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} =$$

$$= \int_{r^*}^1 \int_x^y \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} =$$

$$= \int_{r^*}^1 \left( \ln \frac{1}{1-y} - \ln \frac{1}{1-x} \right) \frac{dr_1}{1-r_1} =$$

$$= \int_{r^*}^1 \left( \ln \frac{1}{1-g^{-1}(3g(r_1))} - \right.$$

$$\left. - \ln \frac{1}{1-g^{-1}\left(\frac{g(r_1)}{3}\right)} \right) \frac{dr_1}{1-r_1} =$$

$$= \int_{r^*}^1 \ln \frac{1-g^{-1}\left(\frac{g(r_1)}{3}\right)}{1-g^{-1}(3g(r_1))} \frac{dr_1}{1-r_1} =$$

$$= \int_{r^*}^1 \ln \left( 1 + \frac{g^{-1}(3g(r_1)) - g^{-1}\left(\frac{g(r_1)}{3}\right)}{1-g^{-1}(3g(r_1))} \right) \times$$

$$\times \frac{dr_1}{1-r_1} > \int_{r^*}^1 \ln 2 \cdot \frac{dr_1}{1-r_1} = +\infty.$$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Valiron G. Sur les fonctions entieres d'ordre fini et d'ordre null et en particulier les fonctions a correspondance reguliere // Ann Fac. Sci. Univ. Toulouse. – 1914. – **5**. – P.117–257.
2. Wiman A. Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Function und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorischen Reihe // Acta Math. – 1914. – **37**. – P.305–326.
3. Valiron G. Fonctions analytiques. – Paris: Press. Univer. de France, 1954.
4. Wittich H. Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. – Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1955.
5. Kővari T. On the maximum modulus and maximal term of functions analytic in the unit disc // J. London Math. Soc. – 1966. – **41**. – P.129–137.

- 
6. Сулейманов Н.В. Оценка типа Вимана–Валирона для степенных рядов с конечным радиусом сходимости и их точность // ДАН СС-СР. – 1980. – **253**, №4. – С.822–824.
  7. Куриляк А.О., Скасків О.Б. Нерівність типу Вімана для аналітичних в крузі функцій і категорії Бера // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: математика. - **1**, №4. - Чернівці: Чернівецький національний університет, 2011. – С.73–79.
  8. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Chyzhykov I.E. Baire categories and Wiman's inequality for analytic functions // Bull. Soc. Sc. et des letters de Lodz. – 2012. – **62**, №3. – P.17–33.
  9. Овчар І.Є., Скасків О.Б. Один аналог нерівності Вімана для інтегралів Лапласа, залежних від малого параметра // Карпатські мат. публ. – 2013. – **5**, №2. – С.305–309.
  10. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for some double power series // Mat. Stud. – 2013. – **39**, №2. – P.134–141.
  11. Gopala Krishna J., Nagaraja Rao I.H. Generalized inverse and probability techniques and some fundamental growth theorems in  $\mathbb{C}^k$  // J. Indian Math. Soc. – 1977. – **41**. – P.203–219.