УДК 517.946

©2013 р. І.М. Конет, Т.М. Пилипюк

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Методом інтегрального перетворення Лапласа у поєднанні з методом функцій Коші одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для системи еволюційних рівнянь параболічного типу, змодельованих методом гібридного диференціального оператора Фур'є-Лежандра-Лежандра на кусково-однорідній полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з м'якими межами.

Using the method of integral Laplace transform in combination with the method of Cauchy functions, we obtain an integral representation of exact analytical solution of a mixed problem for a system of evolutionary equations of parabolic type modeled by hybrid differential Fourier-Legendre-Legendre operator on the piece-homogeneous polar axis $r \geq R_0 > 0$ with soft boundary.

Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними - важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в теперішній час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при математичному моделюванні різних процесів і явищ фізики, хімії, біології, медицини, економіки, техніки.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь (різні види вироджeностей і особливостей) та геометрії області (гладкість її межі, наявність в неї кутових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач для тих чи інших областей [1, 2].

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термодинаміки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти рівняння є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних областях, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [3, 4].

Окрім методу відокремлення змінних [5], одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших крайових задач через їх інтегральне зображення. Варто також зауважити, що для досить широкого класу задач (в кусково-однорідних середовищах) ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породжені диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються, або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [6-9].

У теоретичних дослідженнях і прикладних задачах найбільш часто зустрічаються диференціальні оператори 2-го порядку, зокрема, диференціальний оператор Фур'є $F = \dfrac{d^2}{dr^2}$, диференціальний оператор

Ейлера

$$B_\alpha^* = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r\frac{d}{dr} + \alpha^2,$$

диференціальний оператор Бесселя

$$B_{\nu,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha+1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2-\alpha^2}{r^2},$$

диференціальний оператор Лежандра

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-chr} + \frac{\mu_2^2}{1+chr}\right)$$

та диференціальний оператор Конторовича-Лєбєдєва

$$B_\alpha = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r\frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2.$$

Якщо $\theta(x)$ - одинична функція Гевісайда, а L_j - один із перелічених диференціальних операторів, то завжди можна утворити гібридний диференціальний оператор, що відповідає геометричній структурі кусково-однорідного середовища.

Наприклад, для кусково-однорідного проміжку $(R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3)$ можна утворити гібридний диференціальний оператор

$$M = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)a_1^2 L_1 +$$
$$+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)a_2^2 L_2 +$$
$$+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)a_3^2 L_3; \; a_j^2 = const.$$

При цьому очевидно, що оператор L_1 визначений на проміжку (R_0, R_1), оператор L_2 - на проміжку (R_1, R_2), а оператор L_3 - на проміжку (R_2, R_3). Зрозуміло, що змінивши порядок чергування операторів L_1, L_2, L_3 ми одержимо інший гібридний диференціальний оператор.

У цій статті ми пропонуємо інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для системи еволюційних рівнянь параболічного типу, змодельованих методом гібридного диференціального оператора Фур'є - Лежандра - Лежандра на кусково-однорідній полярній осі $(R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, +\infty)$ з м'якими межами.

1. Постановка задачі. Розглядається задача про структуру обмеженого на множині $D_2^+ = \{(t,r) : t \in (0,\infty); r \in I_2^+ = (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, +\infty);\ R_0 \geq 0\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу [5]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} = f_1(t,r),\ r \in (R_0, R_1),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2\Lambda_{(\mu)_1}[u_2] = f_2(t,r),\ r \in (R_1, R_2), \tag{1}$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2\Lambda_{(\mu)_2}[u_3] = f_3(t,r),\ r \in (R_2, +\infty)$$

з початковими умовами

$$u_1(t,r)\Big|_{t=0} = g_1(r),\ r \in (R_0, R_1),$$
$$u_2(t,r)\Big|_{t=0} = g_2(r),\ r \in (R_1, R_2),$$
$$u_3(t,r)\Big|_{t=0} = g_3(r),\ r \in (R_2, +\infty), \tag{2}$$

крайовими умовами

$$L_{11}^0[u_1(t,r)]\Big|_{r=R_0} = g_0(t),\ \lim_{r\to+\infty}\frac{\partial^k u_3}{\partial r^k} = 0,\ k = 0,1 \tag{3}$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k[u_k(t,r)] - L_{j2}^k[u_{k+1}(t,r)]\right)\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t); \tag{4}$$

$j,k = 1,2.$

У системі (1) беруть участь диференціальні оператори Фур'є $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ [10] та Лежандра $\Lambda_{(\mu)_j} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + cthr\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\mu_{1j}^2}{1-chr} + \frac{\mu_{2j}^2}{1+chr}\Big)$, $\mu_{1j} \geq \mu_{2j} \geq 0$ [11]. У крайовій умові в точці $r = R_0$ бере участь диференціальний оператор $L_{11}^0 = \Big(\alpha_{11}^0 + \delta_{11}^0\frac{\partial}{\partial t}\Big)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 + \gamma_{11}^0\frac{\partial}{\partial t}$. В умовах спряження (4) беруть участь диференціальні оператори

$$L_{jm}^k = \Big(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k\frac{\partial}{\partial t}\Big)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k\frac{\partial}{\partial t};$$

$j, m, k = 1, 2.$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\gamma_j^2 \geq 0$, $a_j > 0$; $\alpha_{11}^0 \leq 0$, $\beta_{11}^0 \geq 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0$; $\delta_{11}^0 \geq 0$, $\gamma_{11}^0 \geq 0$; $\alpha_{jm}^k \geq 0$, $\beta_{jm}^k \geq 0$, $\delta_{jm}^k \geq 0$, $\gamma_{jm}^k \geq 0$; $c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0$; $c_{j2,k} = \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0$, $\alpha_{11}^k \gamma_{21}^k - \alpha_{21}^k \gamma_{11}^k = \beta_{11}^k \delta_{21}^k - \beta_{21}^k \delta_{11}^k$, $\alpha_{12}^k \gamma_{22}^k - \alpha_{22}^k \gamma_{12}^k = \beta_{12}^k \delta_{22}^k - \beta_{22}^k \delta_{12}^k$, $j, m, k = 1, 2.$

Зауваження 1. Наявність оператора диференціювання за часом $\dfrac{\partial}{\partial t}$ в крайовій умові у точці $r = R_0$ та в умовах спряження ми інтерпретуємо, виходячи з фізичних міркувань про теплові хвилі, як м'ягкість межі середовища щодо відбиття хвиль.

Зауваження 2. У випадку, коли межі середовища жорсткі щодо відбиття хвиль ($\delta_{11}^0 = 0$, $\gamma_{11}^0 = 0$, $\delta_{jm}^k = 0$, $\gamma_{jm}^k = 0$), маємо мішану задачу з класичною крайовою умовою та класичними умовами спряження, розв'язок якої одержується з розв'язку задачі (1)-(4) як частковий випадок.

2. Розв'язок задачі. Інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку параболічної крайової задачі спряження (1)-(4) побудуємо методом інтегрального перетворення Лапласа щодо t із залученням теорії функцій Коші в припущенні, що задані функції $f_j(t, r)$, $g_0(t)$, $\omega_{jk}(t)$ та шукана функція $u(t, r) = \{u_1(t, r), u_2(t, r), u_3(t, r)\}$ є оригіналами за Лапласом [12].

У зображенні за Лапласом параболічній задачі (1)-(4) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині I_2^+ розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_1^2\right) u_1^*(p, r) = -F_1^*(p, r), \ r \in (R_0, R_1),$$
$$\left(\Lambda_{(\mu)_1} - q_2^2\right) u_2^*(p, r) = -F_2^*(p, r), \ r \in (R_1, R_2), \quad (5)$$
$$\left(\Lambda_{(\mu)_2} - q_3^2\right) u_3^*(p, r) = -F_3^*(p, r), \quad r \in (R_2, +\infty)$$

з крайовими умовами

$$\left(\overline{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{11}^0\right) u_1^*(p, r)\Big|_{r=R_0} = \overline{g}_0^*(p),$$
$$\lim_{r \to +\infty} \frac{d^k u_3^*}{dr^k} = 0; \ k = 0, 1 \quad (6)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\overline{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j1}^k\right) u_k^*(p, r) - \left(\overline{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j2}^k\right) u_{k+1}^*(p, r)\right]\Big|_{r=R_k} = \overline{\omega}_{jk}^*. \quad (7)$$

У рівностях (5)-(7) беруть участь функції: $q_j^2 = a_j^{-2}(p + \gamma_j^2)$, $F_j^*(p, r) = [f_j^*(p, r) + g_j(r)] a_j^{-2}$, $\overline{g}_0^* = g_0^*(p) + \delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0)$, $\overline{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k p$, $\overline{\beta}_{jm}^k = \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k p$, $\overline{\alpha}_{11}^0 = \alpha_{11}^0 + \delta_{11}^0 p$, $\overline{\beta}_{11}^0 = \beta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 p$, $u_j^*(p, r) = \int\limits_0^\infty u_j(t, r) e^{-pt} dt$, $f_j^*(p, r) = \int\limits_0^\infty f_j(t, r) e^{-pt} dt$, $g_0^*(p) = \int\limits_0^\infty g_0(t) e^{-pt} dt$, $\overline{\omega}_{jk}^* = \omega_{jk}^*(p) + \psi_{jk}$, $\psi_{jk} = \delta_{j1}^k g_k'(R_k) + \gamma_{j1}^k g_k(R_k) - \Big[\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k) + \gamma_{j2}^k g_{k+1}(R_k)\Big]$, $\omega_{jk}^*(p) = \int\limits_0^\infty \omega_{jk}(t) \exp(-pt) dt$, $p = \sigma + is$, $\sigma > \sigma_0$, $s \in (-\infty, +\infty)$, $i = \sqrt{-1}$, $Re\, q_j > 0$, $j = \overline{1, 3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\dfrac{d^2}{dr^2} - q_1^2) v = 0$ утворюють функції $chq_1 r$ та $shq_1 r$ [10]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)_j} - q_m^2) v = 0$ утворюють функції $P_{\nu_m}^{(\mu)_j}(chr)$ та $L_{\nu_m}^{(\mu)_j}(chr)$ [11], $\nu_m = -1/2 + q_m$, $m = 2, 3$, $j = 1, 2$.

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (5)-(7) методом функцій Коші [10, 13]:

$$u_1^*(p, r) = A_1 chq_1 r + B_1 shq_1 r + \int\limits_{R_0}^{R_1} E_1^*(p, r, \rho) F_1^*(p, \rho) d\rho,$$
$$u_2^*(p, r) = A_2 P_{\nu_2}^{(\mu)_1}(chr) + B_2 L_{\nu_2}^{(\mu)_1}(chr) + \int\limits_{R_1}^{R_2} E_2^*(p, r, \rho) F_2^*(p, \rho) sh\rho d\rho, \quad (8)$$

$$u_3^*(p,r) = B_3 L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(chr) + $$
$$+ \int\limits_{R_2}^{\infty} E_3^*(p,r,\rho) F_3^*(p,\rho) sh\rho d\rho.$$

У рівностях (8) $E_j^*(p,r,\rho)$ - функції Коші:

$$E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0,$$

$$\frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho+0} - \frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho-0} = -[\varphi_j]^{-1}, \quad (9)$$

де $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = sh\rho$, $\varphi_3 = sh\rho$.

Припустимо, що функція Коші

$$E_1^*(p,r,\rho) = \begin{cases} \overset{-}{E}{}_1^* \equiv C_1 chq_1r + D_1 shq_1r, \\ R_0 < r < \rho < R_1, \\ \overset{+}{E}{}_1^* \equiv C_2 chq_1r + D_2 shq_1r, \\ R_0 < \rho < r < R_1. \end{cases}$$

Властивості (9) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$(C_2 - C_1) chq_1\rho + (D_2 - D_1) shq_1\rho = 0,$$
$$(C_2 - C_1) shq_1\rho + (D_2 - D_1) chq_1\rho = -q_1^{-1}.$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = q_1^{-1} shq_1\rho, D_2 - D_1 = -q_1^{-1} chq_1\rho. \quad (10)$$

Доповнимо рівності (10) алгебраїчними рівняннями

$$\left(\overline{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{11}^0\right) \overset{-}{E}{}_1^* \Big|_{r=R_0} = 0 :$$
$$V_{11}^{01}(q_1R_0)C_1 + V_{11}^{02}(q_1R_0)D_1 = 0, \quad (11)$$
$$\left(\overline{\alpha}_{11}^1 \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{11}^1\right) \overset{+}{E}{}_1^* \Big|_{r=R_1} = 0 :$$
$$V_{11}^{11}(q_1R_1)C_2 + V_{11}^{12}(q_1R_1)D_2 = 0.$$

Алгебраїчна система (11) внаслідок співвідношень (10) набуває вигляду:

$$V_{11}^{01}(q_1R_0)C_1 + V_{11}^{02}(q_1R_0)D_1 = 0, \quad (12)$$
$$V_{11}^{11}(q_1R_1)C_1 + V_{11}^{12}(q_1R_1)D_1 = q_1^{-1}\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1\rho).$$

Із алгебраїчної системи (12) знаходимо, що

$$C_1 = -\frac{V_{11}^{02}(q_1R_0)}{q_1\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)} \Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1\rho),$$

$$D_1 = \frac{V_{11}^{01}(q_1R_0)}{q_1\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)} \Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1\rho).$$

Цим функція Коші $E_1^*(p,r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_1^*(p,r,\rho) = -\frac{1}{q_1\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)} \times$$
$$\times \begin{cases} \Phi_{11}^0(q_1R_0, q_1r)\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1\rho), \\ \qquad R_0 < r < \rho < R_1, \\ \Phi_{11}^0(q_1R_0, q_1\rho)\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1r), \\ \qquad R_0 < \rho < r < R_1. \end{cases} \quad (13)$$

Нехай функція Коші

$$E_2^*(p,r,\rho) =$$
$$= \begin{cases} \overset{-}{E}{}_2^* \equiv C_1 P_{\nu_2}^{(\mu)_1}(chr) + D_1 L_{\nu_2}^{(\mu)_1}(chr), \\ R_1 < r < \rho < R_2, \\ \overset{+}{E}{}_2^* \equiv C_2 P_{\nu_2}^{(\mu)_1}(chr) + D_2 L_{\nu_2}^{(\mu)_1}(chr), \\ R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases}$$

Властивості (9) функції Коші дають алгебраїчну систему рівнянь

$$(C_2 - C_1)P_{\nu_2}^{(\mu)_1}(ch\rho) + (D_2 - D_1)L_{\nu_2}^{(\mu)_1}(ch\rho) = 0,$$
$$(C_2 - C_1)P_{\nu_2}^{(\mu)_1\prime}(ch\rho) + (D_2 - D_1)L_{\nu_2}^{(\mu)_1\prime}(ch\rho) =$$
$$= -(sh\rho)^{-2}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = -B_{(\mu)_1}(q_2)L_{\nu_2}^{(\mu)_1}(ch\rho),$$
$$D_2 - D_1 = B_{(\mu)_1}(q_2)P_{\nu_2}^{(\mu)_1}(ch\rho). \quad (14)$$

Доповнимо систему (14) алгебраїчними рівняннями

$$\left(\overline{\alpha}_{12}^1 \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{12}^1\right) \overset{-}{E}{}_2^* \Big|_{r=R_1} = 0 :$$
$$Z_{\nu_2;12}^{(\mu)_1;11}(chR_1)C_1 + Z_{\nu_2;12}^{(\mu)_1;12}(chR_1)D_1 = 0, \quad (15)$$
$$\left(\overline{\alpha}_{11}^2 \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{11}^2\right) \overset{+}{E}{}_2^* \Big|_{r=R_2} = 0 :$$
$$Z_{\nu_2;11}^{(\mu)_1;21}(chR_2)C_2 + Z_{\nu_2;11}^{(\mu)_1;22}(chR_2)D_2 = 0.$$

В силу рівностей (14) алгебраїчна система (15) набуває вигляду:

$$Z_{\nu_2;12}^{(\mu)_1;11}(chR_1)C_1 + Z_{\nu_2;12}^{(\mu)_1;12}(chR_1)D_1 = 0, \quad (16)$$

$$Z^{(\mu)_1;21}_{\nu_2;11}(chR_2)C_1 + Z^{(\mu)_1;22}_{\nu_2;11}(chR_2)D_1 =$$
$$= B_{(\mu)_1}(q_2)F^{(\mu)_1,2}_{\nu_2;11}(chR_2, ch\rho).$$

Розв'язком системи (16) є

$$C_1 = -\frac{B_{(\mu)_1}(q_2)Z^{(\mu)_1;12}_{\nu_2;12}(chR_1)}{\Delta^{(\mu)_1}_{\nu_2;11}(chR_1, chR_2)}\times$$
$$\times F^{(\mu)_1;2}_{\nu_2;11}(chR_2, ch\rho),$$
$$D_1 = \frac{B_{(\mu)_1}(q_2)Z^{(\mu)_1;11}_{\nu_2;12}(chR_1)}{\Delta^{(\mu)_1}_{\nu_2;11}(chR_1, chR_2)}\times$$
$$\times F^{(\mu)_1;2}_{\nu_2;11}(chR_2, ch\rho).$$

Цим функція Коші $E^*_2(p, r, \rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E^*_2(p, r, \rho) = -\frac{B_{(\mu)_1}(q_2)}{\Delta^{(\mu)_1}_{\nu_2;11}(chR_1, chR_2)}\times$$
$$\times\begin{cases} F^{(\mu)_1;1}_{\nu_2;12}(chR_1, chr)F^{(\mu)_1;2}_{\nu_2;11}(chR_2, ch\rho), \\ \qquad R_1 < r < \rho < R_2, \\ F^{(\mu)_1;1}_{\nu_2;12}(chR_1, ch\rho)F^{(\mu)_1;2}_{\nu_2;11}(chR_2, chr), \\ \qquad R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases} \tag{17}$$

Аналогічно одержуємо, що функція Коші (при $C_2 = 0$)

$$E^*_3(p, r, \rho) = -\frac{B_{(\mu)_2}(q_2)}{Z^{(\mu)_2;22}_{\nu_3;12}(chR_2)}\times$$
$$\times\begin{cases} F^{(\mu)_2;2}_{\nu_3;12}(chR_2, chr)L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(ch\rho), \\ \qquad R_2 < r < \rho < +\infty, \\ F^{(\mu)_2;2}_{\nu_3;12}(chR_2, ch\rho)L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(chr), \\ \qquad R_2 < \rho < r < +\infty. \end{cases} \tag{18}$$

У рівностях (13)-(18) беруть участь функції:

$$V^{m1}_{jk}(q_sR_m) = \left(\overline{\alpha}^m_{jk}\frac{d}{dr} + \overline{\beta}^m_{jk}\right)chq_sr\Big|_{r=R_m},$$
$$V^{m2}_{jk}(q_sR_m) = \left(\overline{\alpha}^m_{jk}\frac{d}{dr} + \overline{\beta}^m_{jk}\right)shq_sr\Big|_{r=R_m},$$
$$\Phi^m_{jk}(q_sR_m, q_sr) = V^{m2}_{jk}(q_sR_m)chq_sr -$$
$$-V^{m1}_{jk}(q_sR_m)shq_sr,$$
$$\Delta_{j1}(q_1R_0, q_1R_1) = V^{01}_{11}(q_1R_0)V^{12}_{j1}(q_1R_1) -$$
$$-V^{02}_{11}(q_1R_0)V^{11}_{j1}(q_1R_1);\ j = 1, 2;$$
$$Z^{(\mu),m1}_{\nu;jk}(chR_m) = \left(\overline{\alpha}^m_{jk}\frac{d}{dr} + \overline{\beta}^m_{jk}\right)P^{(\mu)}_{\nu}(chr)\Big|_{r=R_m};$$
$$Z^{(\mu),m2}_{\nu;jk}(chR_m) = \left(\overline{\alpha}^m_{jk}\frac{d}{dr} + \overline{\beta}^m_{jk}\right)L^{(\mu)}_{\nu}(chr)\Big|_{r=R_m};$$
$$F^{(\mu),m}_{\nu;jk}(chR_m, chr) = Z^{(\mu),m1}_{\nu;jk}(chR_m)L^{(\mu)}_{\nu}(chr) -$$
$$-Z^{(\mu),m2}_{\nu;jk}(chR_m)P^{(\mu)}_{\nu}(chr);$$
$$\Delta^{(\mu)_1}_{\nu_2;jk}(chR_1, chR_2) = Z^{(\mu)_1;11}_{\nu_2;j2}(chR_1)\times$$
$$\times Z^{(\mu)_1;22}_{\nu_2;k1}(chR_2) - Z^{(\mu)_1;12}_{\nu_2;j2}(chR_1)\times$$
$$\times Z^{(\mu)_1;21}_{\nu_2;k1}(chR_2);\ j, k = 1, 2.$$

Повернемось до формул (8). Крайова умова в точці $r = R_0$ та умови спряження (7) для визначення п'яти величин A_j $(j = 1, 2)$ й B_k $(k = \overline{1, 3})$ дають неоднорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$V^{01}_{11}(q_1R_0)A_1 + V^{02}_{11}(q_1R_0)B_1 = \overline{g}^*_0(p),$$
$$V^{11}_{j1}(q_1R_1)A_1 + V^{12}_{j1}(q_1R_1)B_1 -$$
$$-Z^{(\mu)_1;11}_{\nu_2;j2}(chR_1)A_2 - Z^{(\mu)_1;12}_{\nu_2;j2}(chR_1)B_2 =$$
$$= \overline{\omega}^*_{j1} + \delta_{j2}G^*_{12},\ j = 1, 2, \tag{19}$$
$$Z^{(\mu)_1;21}_{\nu_2;j1}(chR_2)A_2 + Z^{(\mu)_1;22}_{\nu_2;j1}(chR_2)B_2 -$$
$$-Z^{(\mu)_2;22}_{\nu_3;j2}(chR_2)B_3 = \overline{\omega}^*_{j2} + \delta_{j2}G^*_{23}.$$

У системі (19) беруть участь функції:

$$G^*_{12} = -c^*_{11}\int\limits_{R_0}^{R_1}\frac{\Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1\rho)}{\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)}F^*_1(p, \rho)d\rho -$$
$$-\frac{c^*_{21}}{shR_1}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{F^{(\mu)_1;2}_{\nu_2;11}(chR_2, ch\rho)}{\Delta^{(\mu)_1}_{\nu_2}(chR_1, chR_2)}\times$$
$$\times F^*_2(p, \rho)sh\rho d\rho,$$
$$G^*_{23} = \frac{c^*_{12}}{shR_2}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{F^{(\mu)_1;1}_{\nu_2;12}(chR_1, ch\rho)}{\Delta^{(\mu)_1}_{\nu_2}(chR_1, chR_2)}F^*_2(p, \rho)\times$$
$$\times sh\rho d\rho + \frac{c^*_{22}}{shR_2}\int\limits_{R_2}^{\infty}\frac{L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(ch\rho)}{Z^{(\mu)_2;22}_{\nu_3;12}(chR_2)}\times$$
$$\times F^*_3(p, \rho)sh\rho d\rho$$

та символ Кронекера δ_{j2} ($\delta_{12}=0,\ \delta_{22}=1$).

Введемо до розгляду функції:

$$A_{(\mu)_1;j}(p)=\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)\times$$
$$\times\Delta^{(\mu)_1}_{\nu_2;2j}(chR_1,chR_2)-\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)\times$$
$$\times\Delta^{(\mu)_1}_{\nu_2;1j}(chR_1,chR_2),$$
$$B_{(\mu);j}(p)=Z^{(\mu)_2;22}_{\nu_3;22}(chR_2)\Delta^{(\mu)_1}_{\nu_2;j1}(chR_1,chR_2)-$$
$$-Z^{(\mu)_2;22}_{\nu_3;12}(chR_2)\Delta^{(\mu)_1}_{\nu_2;j2}(chR_1,chR_2);$$
$$j=1,2;\quad (\mu)=((\mu)_1;(\mu)_2);$$
$$\Theta_{(\mu)_1;1}(p,r)=\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)F^{(\mu)_1;1}_{\nu_2;12}(chR_1,chr)-$$
$$-\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)F^{(\mu)_1;1}_{\nu_2;22}(chR_1,chr),$$
$$\Theta_{(\mu);2}(p,r)=Z^{(\mu)_2;22}_{\nu_3;12}(chR_2)F^{(\mu)_1;2}_{\nu_2;21}(chR_2,chr)-$$
$$-Z^{(\mu)_2;22}_{\nu_3;22}(chR_2)F^{(\mu)_1;2}_{\nu_2;11}(chR_2,chr).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (5)-(7): для $p=\sigma+is$ з $Re\,p=\sigma>\sigma_0$, де σ_0 - абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $Im\,p=s\in(-\infty,+\infty)$ визначник алгебраїчної системи (19) відмінний від нуля:

$$\Delta_{(\mu)}(p)\equiv A_{(\mu)_1;1}(p)Z^{(\mu)_2;22}_{\nu_3;22}(chR_2)-$$
$$-A_{(\mu)_1;2}(p)Z^{(\mu)_2;22}_{\nu_3;12}(chR_2)=\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)\times$$
$$\times B_{(\mu);2}(p)-\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)B_{(\mu);1}(p)\neq 0. \tag{20}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (5)-(7):

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W^*_{(\mu);11}(p,r)=\frac{1}{\Delta_{(\mu)}(p)}\times$$
$$\times\Big[B_{(\mu);2}(p)\Phi^1_{11}(q_1R_1,q_1r)-$$
$$-B_{(\mu);1}(p)\Phi^1_{21}(q_1R_1,q_1r)\Big], \tag{21}$$

$$W^*_{(\mu);12}(p,r)=-\frac{c^*_{11}q_1}{\Delta_{(\mu)}(p)}\Theta_{(\mu);2}(p,r),$$

$$W^*_{(\mu);13}(p,r)=-\frac{c^*_{11}q_1c^*_{12}}{\Delta_{(\mu)}(p)B_{(\mu)_1}(q_2)shR_2}L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(chr);$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{*1}_{(\mu);11}(p,r)=-\frac{B_{(\mu)};2(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r),$$

$$R^{*1}_{(\mu);21}(p,r)=\frac{B_{(\mu)};1(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r),$$

$$R^{*1}_{(\mu);12}(p,r)=-\frac{c^*_{21}Z^{(\mu)_2;22}_{\nu_3;22}(chR_2)}{B_{(\mu)_1}(q_2)shR_1\Delta_{(\mu)}(p)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r),$$

$$R^{*1}_{(\mu);22}(p,r)=\frac{c^*_{21}Z^{(\mu)_2;22}_{\nu_3;12}(chR_2)}{B_{(\mu)_1}(q_2)shR_1\Delta_{(\mu)}(p)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r),$$

$$R^{*2}_{(\mu);11}(p,r)=\frac{\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta_{(\mu)}(p)}\Theta_{(\mu);2}(p,r),$$

$$R^{*2}_{(\mu);21}(p,r)=-\frac{\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta_{(\mu)}(p)}\Theta_{(\mu);2}(p,r),$$

$$R^{*2}_{(\mu);12}(p,r)=-\frac{Z^{(\mu)_2;22}_{\nu_3;22}(chR_2)}{\Delta_{(\mu)}(p)}\Theta_{(\mu)_1;1}(p,r),$$

$$R^{*2}_{(\mu);22}(p,r)=\frac{Z^{(\mu)_2;22}_{\nu_3;12}}{\Delta_{(\mu)}(p)}\Theta_{(\mu)_1;1}(p,r), \tag{22}$$

$$R^{*3}_{(\mu);11}(p,r)=\frac{c^*_{12}\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)}{B_{(\mu)_1}(q_2)shR_2\Delta_{(\mu)}(p)}L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(chr),$$

$$R^{*3}_{(\mu);21}(p,r)=-\frac{c^*_{12}\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)}{B_{(\mu)_1}(q_2)shR_2\Delta_{(\mu)}(p)}L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(chr),$$

$$R^{*3}_{(\mu);12}(p,r)=\frac{A_{(\mu)_1;2}(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)}L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(chr),$$

$$R^{*3}_{(\mu);22}(p,r)=-\frac{A_{(\mu)_1;1}(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)}L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(chr);$$

3) породжені неоднорідністю системи (5) функції впливу

$$\mathcal{H}^*_{(\mu);11}(p,r,\rho)=$$
$$=-\frac{1}{q_1}\begin{cases}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r)W^*_{(\mu);11}(p,\rho),\\ R_0<r<\rho<R_1,\\ \Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1\rho)W^*_{(\mu);11}(p,r),\\ R_0<\rho<r<R_1,\end{cases},$$

$$\mathcal{H}^*_{(\mu);12}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{21}}{shR_1}\frac{\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r)}{\Delta_{(\mu)}(p)}\Theta_{(\mu);2}(p,\rho),$$

$$\mathcal{H}^*_{(\mu);13}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{21}c^*_{22}}{B_{(\mu)_1}(q_2)shR_1shR_2}\times$$

$$\times \frac{1}{\Delta_{(\mu)}(p)} \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 r) L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(ch\rho),$$

$$\mathcal{H}^*_{(\mu);21}(p,r,\rho) = \frac{c_{11}^*}{\Delta_{(\mu)}(p)} \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 \rho) \Theta_{(\mu);2}(p,r),$$

$$\mathcal{H}^*_{(\mu);22}(p,r,\rho) = \frac{B_{(\mu)_1}(q_2)}{\Delta_{(\mu)}(p)} \times$$

$$\times \begin{cases} \Theta_{(\mu)_1;1}(p,r)\Theta_{(\mu);2}(p,\rho), R_1 < r < \rho < R_2, \\ \Theta_{(\mu)_1;1}(p,\rho)\Theta_{(\mu);2}(p,r), R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases} \tag{23}$$

$$\mathcal{H}^*_{(\mu);23}(p,r,\rho) = \frac{c_{22}^*}{shR_2} \frac{L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(ch\rho)}{\Delta_{(\mu)}(p)} \Theta_{(\mu)_1;1}(p,r),$$

$$\mathcal{H}^*_{(\mu);31}(p,r,\rho) = \frac{c_{11}^* c_{12}^* \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 \rho)}{B_{(\mu)_1}(q_2) shR_2 \Delta_{(\mu)}(p)} \times$$

$$\times L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(chr),\ \mathcal{H}^*_{(\mu);32}(p,r,\rho) = \frac{c_{12}^*}{shR_2} \frac{1}{\Delta_{(\mu)}(p)} \times$$

$$\times \Theta_{(\mu)_1;1}(p,\rho) L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(chr),$$

$$\mathcal{H}^*_{(\mu);33}(p,r,\rho) = \frac{B_{(\mu)_2}(q_3)}{\Delta_{(\mu)}(p)} \times$$

$$\times \begin{cases} L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(ch\rho)\Big[A_{(\mu)_1;2}(p) F_{\nu_3;12}^{(\mu)_2;2}(chR_2, chr) - \\ L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(chr)\Big[A_{(\mu)_1;2}(p) F_{\nu_3;12}^{(\mu)_2;2}(chR_2, ch\rho) - \end{cases}$$

$$-A_{(\mu)_1;1}(p) F_{\nu_3;22}^{(\mu)_2;2}(chR_2, chr)\Big],$$
$$R_2 < r < \rho < +\infty,$$
$$-A_{(\mu)_1;1}(p) F_{\nu_3;22}^{(\mu)_2;2}(chR_2, ch\rho)\Big],$$
$$R_2 < \rho < r < +\infty.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (19), підстановки отриманих виразів величин A_j, B_k у рівності (8) та низки елементарних перетворень, маємо єдиний розв'язок крайової задачі (5)-(7):

$$u_j^*(p,r) = W^*_{(\mu);1j}(p,r)\overline{g}_0^*(p) +$$

$$+ \sum_{m,k=1}^{2} R^{*j}_{(\mu);mk}(p,r)\overline{\omega}^*_{mk} +$$

$$+ \int_{R_0}^{R_1} \mathcal{H}^*_{(\mu);j1}(p,r,\rho) F_1^*(p,\rho) d\rho +$$

$$+ \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{H}^*_{(\mu);j2}(p,r,\rho) F_2^*(p,\rho) sh\rho d\rho +$$

$$+ \int_{R_2}^{\infty} \mathcal{H}^*_{(\mu);j3}(p,r,\rho) F_3^*(p,\rho) sh\rho d\rho, \quad j = \overline{1,3}. \tag{24}$$

Переходячи в (24) до оригіналу, одержуємо єдиний розв'язок параболічної крайової задачі (1)-(4):

$$u_j(t,r) = \int_0^t W_{(\mu);1j}(t-\tau,r)\overline{g}_0(\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{m,k=1}^{2} \int_0^t R^j_{(\mu);mk}(t-\tau,r)\overline{\omega}_{mk}(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_{R_0}^{R_1} \mathcal{H}_{(\mu);j1}(t-\tau,r,\rho)\Big[f_1(\tau,\rho) + \delta_+(\tau)g_1(\rho)\Big] \times$$

$$\times a_1^{-2} d\rho d\tau + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{H}_{(\mu);j2}(t-\tau,r,\rho) \times \tag{25}$$

$$\times \Big[f_2(\tau,\rho) + \delta_+(\tau)g_2(\rho)\Big] a_2^{-2} sh\rho d\rho d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_{R_2}^{\infty} \mathcal{H}_{(\mu);j3}(t-\tau,r,\rho)\Big[f_3(\tau,\rho) + \delta_+(\tau)g_3(\rho)\Big] \times$$

$$\times a_3^{-2} sh\rho d\rho d\tau, \quad j = \overline{1,3}.$$

У рівностях (25) прийнято, що $\overline{g}_0(\tau) = g_0(\tau) + \delta_+(\tau)(\delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0))$, $\overline{\omega}_{mk}(\tau) = \omega_{mk}(\tau) + \psi_{mk}\delta_+(\tau)$, де $\delta_+(\tau)$ - дельта-функція, зосереджена в точці $\tau = 0+$ [13].

У рівностях (25) за означенням [12] маємо, що головні розв'язки

$$W_{(\mu);1j}(t,r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} W^*_{(\mu);1j}(p,r) e^{pt} dp; \tag{26}$$

$j = \overline{1,3}$,

$$R^j_{(\mu);mk}(t,r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} R^{*j}_{(\mu);mk}(p,r) e^{pt} dp;$$

$$m,k = 1,2,\ j = \overline{1,3}, \tag{27}$$

$$\mathcal{H}_{(\mu);jk}(t,r,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\mathcal{H}^*_{(\mu);jk}(p,r,\rho)e^{pt}dp; \tag{28}$$

$j,k=\overline{1,3}$.

3. Аналіз головних розв'язків (функцій Гріна та функцій впливу).

Одержимо вираз для функцій $W_{(\mu);1j}(t,r)$, $R^j_{(\mu);mk}(t,r)$ та $\mathcal{H}_{(\mu);jk}(t,r,\rho)$ зручний як для теоретичних досліджень, так і для інженерних розрахунків.

Знайдемо власні елементи (спектр і спектральну функцію) гібридного диференціального оператора (ГДО)

$$M_{(\mu)}=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)a_1^2\frac{d^2}{dr^2}+$$
$$+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)a_2^2\Lambda_{(\mu)_1}+\theta(r-R_2)a_3^2\Lambda_{(\mu)_2}. \tag{29}$$

Оскільки ГДО $M_{(\mu)}$ самоспряжений (як сума самоспряжених диференціальних операторів) і має на множині I_2^+ одну особливу точку $r=+\infty$, то його спектр неперервний [14]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta\in(0,+\infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна функція

$$V_{(\mu)}(r,\beta)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)V_{(\mu);1}(r,\beta)+$$
$$+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{(\mu);2}(r,\beta)+$$
$$+\theta(r-R_2)V_{(\mu);3}(r,\beta). \tag{30}$$

При цьому функції $V_{(\mu);j}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$\Big(a_1^2\frac{d^2}{dr^2}+b_1^2\Big)V_{(\mu);1}(r,\beta)=0, r\in(R_0,R_1),$$
$$\Big(a_2^2\Lambda_{(\mu)_1}+b_2^2\Big)V_{(\mu);2}(r,\beta)=0, r\in(R_1,R_2), \tag{31}$$
$$\Big(a_3^2\Lambda_{(\mu)_2}+b_3^2\Big)V_{(\mu);3}(r,\beta)=0, r\in(R_2,+\infty),$$

крайові умови

$$\Big(\tilde\alpha^0_{11}\frac{d}{dr}+\tilde\beta^0_{11}\Big)V_{(\mu);1}(r,\beta)\Big|_{r=R_0}=0,$$
$$\lim_{r\to+\infty}\frac{d^kV_{(\mu);3}(r,\beta)}{dr^k}=0,\ k=0,1 \tag{32}$$

та умови спряження

$$\Big[\Big(\tilde\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr}+\tilde\beta^k_{j1}\Big)V_{(\mu);k}(r,\beta)-\Big(\tilde\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr}+\tilde\beta^k_{j2}\Big)\times$$
$$\times V_{(\mu);k+1}(r,\beta)\Big]\Big|_{r=R_k}=0;\ j,k=1,2. \tag{33}$$

Тут прийняті позначення: $b_j^2=\beta^2+k_j^2$, $k_j^2\ge 0$, $j=\overline{1,3}$; $\tilde\alpha^m_{jk}=\alpha^m_{jk}-(\beta^2+\gamma^2)\delta^m_{jk}$, $\tilde\beta^m_{jk}=\beta^m_{jk}-(\beta^2+\gamma^2)\gamma^m_{jk}$, $\gamma^2=\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}$, $j,k=1,2$; $m=0,1,2$. У подальшому позначимо $\overline{b}_j=a_j^{-1}b_j$ $(j=\overline{1,3})$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\frac{d^2}{dr^2}+\overline{b}_1^2)v=0$ утворюють функції $\cos\overline{b}_1r$ та $\sin\overline{b}_1r$ [10]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)_1}+\overline{b}_2^2)v=0$ утворюють функції $A^{(\mu)_1}_{\nu_2^*}(chr)$ та $B^{(\mu)_1}_{\nu_2^*}(chr)$, $\nu_2^*=-1/2+i\overline{b}_2$ [11]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)_2}+\overline{b}_3^2)v=0$ утворюють функції $A^{(\mu)_2}_{\nu_3^*}(chr)$ та $B^{(\mu)_2}_{\nu_3^*}(chr)$ [11], $\nu_3^*=-1/2+i\overline{b}_3$.

Якщо розв'язок спектральної задачі (31)-(33) відшукувати у вигляді лінійної комбінації фундаментальної системи розв'язків

$$V_{(\mu);1}(r,\beta)=A_1\cos\overline{b}_1r+B_1\sin\overline{b}_1r,$$
$r\in(R_0,R_1)$,
$$V_{(\mu);2}(r,\beta)=A_2A^{(\mu)_1}_{\nu_2^*}(chr)+B_2B^{(\mu)_1}_{\nu_2^*}(chr), \tag{34}$$
$r\in(R_1,R_2)$,
$$V_{(\mu);3}(r,\beta)=A_3A^{(\mu)_2}_{\nu_3^*}(chr)+B_3B^{(\mu)_2}_{\nu_3^*}(chr),$$
$$r\in(R_2,+\infty),$$

то крайова умова в точці $r=R_0$ та умови спряження (33) для визначення шести величин дають алгебраїчну однорідну систему з п'яти рівнянь:

$$v^{01}_{11}(\overline{b}_1R_0)A_1+v^{02}_{11}(\overline{b}_1R_0)B_1=0,$$
$$v^{11}_{j1}(b_1R_1)A_1+v^{12}_{j1}(b_1R_1)B_1-Y^{(\mu)_1;11}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)A_2-$$
$$-Y^{(\mu)_1;12}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)B_2=0,\ j=1,2, \tag{35}$$

$$Y^{(\mu)_1;21}_{\nu_2^*;j1}(chR_2)A_2+Y^{(\mu)_1;22}_{\nu_2^*;j1}(chR_2)B_2-$$
$$-Y^{(\mu)_2;21}_{\nu_3^*;j2}(chR_2)A_3-Y^{(\mu)_2;22}_{\nu_3^*;j2}(chR_2)B_3=0.$$

Алгебраїчна система (35) сумісна. Розв'язок системи (35) будується стандартним способом [15].

У результаті розв'язання алгебраїчної системи (35) й підстановки одержаних виразів для A_j та B_j $(j=\overline{1,3})$ у рівності (34) отримуємо функції:

$$V_{(\mu);1}(r,\beta)=q_{(\mu)_1}(\beta)q_{(\mu)_2}(\beta)\Big[v^{02}_{11}(\bar b_1R_0)\cos\bar b_1 r-$$
$$-v^{01}_{11}(\bar b_1R_0)\sin\bar b_1 r)\Big],$$
$$V_{(\mu);2}(r,\beta)=q_{(\mu)_2}(\beta)\Big[\delta_{11}(\bar b_1R_0,\bar b_1R_1)\times$$
$$\times f^{(\mu)_1;1}_{\nu_2^*;22}(chR_1,chr)- \qquad (36)$$
$$-\delta_{21}(\bar b_1R_0,\bar b_1R_1)f^{(\mu)_1;1}_{\nu_2^*;12}(chR_1,chr)\Big],$$
$$V_{(\mu);3}(r,\beta)=\omega_{(\mu);1}(\beta)B^{(\mu)_2}_{\nu_3^*}(chr)-$$
$$-\omega_{(\mu);2}(\beta)A^{(\mu)_2}_{\nu_3^*}(chr).$$

У рівностях (36) беруть участь функції:

$$q_{(\mu)_1}(\beta)=\frac{c_{21,1}}{s_{(\mu)_1}(\bar b_2)shR_1},$$
$$q_{(\mu)_2}(\beta)=\frac{c_{21,2}}{s_{(\mu)_2}(\bar b_3)shR_2},\ (\mu)=((\mu)_1,(\mu)_2),$$
$$s_{(\mu)_j}(\bar b_m)=\frac{2^{\mu_{1j}-\mu_{2j}}\gamma_{(\mu)_j}(\bar b_m)\pi^3}{sh(2\pi\bar b_m)}\times$$
$$\times\frac{\Big|\Gamma(1/2+i\bar b_m+\mu_j^+)\Big|^{-2}}{\Big|\Gamma(1/2+i\bar b_m+\mu_j^-)\Big|^{2}},$$
$$\gamma_{(\mu)_j}(\bar b_m)=\cos\frac{\cos\mu_{1j}sh(2\pi\bar b_m)}{\cos\mu_{2j}\pi+\cos\mu_{1j}\pi ch(2\pi\bar b_m)};$$
$$\mu_j^{\pm}=\frac{1}{2}(\mu_{1j}\pm\mu_{2j}),\ j=1,2,\ m=2,3;$$
$$\delta_{j1}(\bar b_1R_0,\bar b_1R_1)=v^{01}_{11}(\bar b_1R_0)v^{12}_{j1}(\bar b_1R_1)-$$
$$-v^{02}_{11}(\bar b_1R_0)v^{11}_{j1}(\bar b_1R_1),\ j=1,2;$$
$$\delta^{(\mu)_1}_{\nu_2^*;jk}(chR_1,chR_2)=Y^{(\mu)_1;11}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)\times$$
$$\times Y^{(\mu)_1;22}_{\nu_2^*;k1}(chR_2)-Y^{(\mu)_1;12}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)Y^{(\mu)_1;21}_{\nu_2^*;k1}(chR_2),$$
$$a_{(\mu)_1;j}(\beta)=\delta_{11}(\bar b_1R_0,\bar b_1R_1)\delta^{(\mu)_1}_{\nu_2^*;2j}(chR_1,chR_2)-$$
$$-\delta_{21}(\bar b_1R_0,\bar b_1R_1)\delta^{(\mu)_1}_{\nu_2^*;1j}(chR_1,chR_2),$$
$$\omega_{(\mu);j}(\beta)=a_{(\mu)_1;2}(\beta)Y^{(\mu)_2;2j}_{\nu_3^*;12}(chR_2)-$$
$$-a_{(\mu)_1;1}(\beta)Y^{(\mu)_2;2j}_{\nu_3^*;22}(chR_2),\ j=1,2;$$
$$f^{(\mu)_1;1}_{\nu_2^*;j2}(chR_1,chr)=Y^{(\mu)_1;11}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)B^{(\mu)_1}_{\nu_2^*}(chr)-$$
$$-Y^{(\mu)_1;12}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)A^{(\mu)_1}_{\nu_2^*}(chr).$$

Розглянемо функції впливу (28):

$$\mathcal{H}_{(\mu);jk}(t,r,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\mathcal{H}^*_{(\mu);jk}(p,r,\rho)e^{pt}dp;$$

$j,k=\overline{1,3}$.

Особливими точками функцій впливу $\mathcal{H}^*_{(\mu);jk}(p,r,\rho)$ є точки галуження $p=-\gamma_j^2$, $(j=\overline{1,3})$ та $p=\infty$. Покладемо $q_j\equiv a_j^{-1}(p+\gamma_j^2)^{1/2}=ia_j^{-1}b_j\equiv ia_j^{-1}(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$. Одержимо, що $p=-(\beta^2+k_j^2+\gamma_j^2)$. Позначимо $\gamma^2=\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}$ й виберемо k_j^2 так, щоб $k_j^2+\gamma_j^2=\gamma^2$, тобто $k_j^2=\gamma^2-\gamma_j^2$. Якщо $\gamma^2=\gamma_1^2>0$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\ge0$, $k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2\ge0$; якщо $\gamma^2=\gamma_2^2>0$, то $k_1^2=\gamma_2^2-\gamma_1^2\ge0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=\gamma_2^2-\gamma_3^2\ge0$; якщо $\gamma^2=\gamma_3^2>0$, то $k_1^2=\gamma_3^2-\gamma_1^2\ge0$, $k_2^2=\gamma_3^2-\gamma_2^2\ge0$, $k_3^2=0$. Отже, маємо $p=-(\beta^2+\gamma^2)\equiv e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2)$, $dp=-2\beta d\beta$.

У цьому випадку метод контурного інтегралу із залученням леми Жордана й теореми Коші [12] дозволяє привести формули (28) до розрахункових:

$$\mathcal{H}_{(\mu);jk}(t,r,\rho)=$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty Im\Big\{\mathcal{H}^*_{(\mu);jk}(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2),r,\rho)\Big\}\times$$
$$\times e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\beta d\beta;\ j,k=\overline{1,3}. \qquad (37)$$

Скористаємося відомими залежностями [16]:

$$V^{m1}_{jk}(i\bar b_sR_m)=-\tilde\alpha^m_{jk}\bar b_s\sin(\bar b_sR_m)+$$
$$+\tilde\beta^m_{jk}\cos(\bar b_sR_m)\equiv v^{m1}_{jk}(\bar b_sR_m),$$
$$V^{m2}_{jk}(i\bar b_sR_m)=i\Big[\tilde\alpha^m_{jk}b_s\cos(\bar b_sR_m)+$$

$$+\tilde{\beta}_{jk}^{m}\sin(\bar{b}_sR_m)\Big]\equiv iv_{jk}^{m1}(\bar{b}_sR_m),$$

$$\Delta_{j1}(i\bar{b}_1R_0,i\bar{b}_1R_1)=i\Big[v_{11}^{01}(\bar{b}_1R_0)v_{j1}^{12}(\bar{b}_1R_1)-$$

$$-v_{11}^{02}(\bar{b}_1R_0)v_{j1}^{11}(\bar{b}_1R_1)\Big]\equiv i\delta_{j1}(\bar{b}_1R_0,\bar{b}_1R_1),$$

$$\Phi_{jk}^{m}(i\bar{b}_sx,i\bar{b}_sy)=i\Big[v_{jk}^{m2}(\bar{b}_sx)\cos(\bar{b}_sy)-$$

$$-v_{jk}^{m1}(\bar{b}_sx)\sin(\bar{b}_sy)\Big]\equiv i\varphi_{jk}^{m}(\bar{b}_sx,\bar{b}_sy)$$

та співвідношеннями [11]

$$P_{\nu_j^*}^{(\mu)_j}(chr)=\sin(\mu_{1j}\pi)A_{\nu_j^*}^{(\mu)_j}(chr)+$$

$$+\cos(\mu_{1j}\pi)B_{\nu_j^*}^{(\mu)_j}(chr),\ \nu_j^*=-1/2+i\bar{b}_j,$$

$$L_{\nu_j^*}^{(\mu)_j}(chr)=A_{\nu_j^*}^{(\mu)_j}(chr)-i\gamma_{(\mu)_j}(\bar{b}_j)B_{\nu_j^*}^{(\mu)_j}(chr),$$

$j=1,2.$

Одержимо:

$$\Delta_{\nu_2^*;jk}^{(\mu)_1}(chR_1,chR_2)=-z_{(\mu)_1}(\bar{b}_2)\times$$

$$\times\delta_{\nu_2^*;jk}^{(\mu)_1}(chR_1,chR_2);\ z_{(\mu)_1}=\cos(\mu_{11}\pi)+$$

$$+i\gamma_{(\mu)_1}\sin(\mu_{11}\pi);\delta_{\nu_2^*;jk}^{(\mu)_1}(chR_1,chR_2)=$$

$$=Y_{\nu_2^*;j2}^{(\mu)_1;11}(chR_1)Y_{\nu_2^*;k1}^{(\mu)_1;22}(chR_2)-$$

$$-Y_{\nu_2^*;j2}^{(\mu)_1;12}(chR_1)Y_{\nu_2^*;k1}^{(\mu)_1;21}(chR_2);$$

$$A_{(\mu)_1;j}\Big(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2)\Big)=-z_{(\mu)_1}(\bar{b}_2)i\times$$

$$\times\Big[\delta_{11}(\bar{b}_1R_0,\bar{b}_1R_1)\delta_{\nu_2^*;2j}^{(\mu)_1}(chR_1,chR_2)-$$

$$-\delta_{21}(\bar{b}_1R_0,\bar{b}_1R_1)\delta_{\nu_2^*;1j}^{(\mu)_1}(chR_1,chR_2)\Big]\equiv$$

$$\equiv -iz_{(\mu)_1}(\bar{b}_2)a_{(\mu)_1;j}(\beta),\ j=1,2;$$

$$\Delta_{(\mu)}\Big(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2)\Big)=-iz_{(\mu)_1}(\bar{b}_2)\Big[a_{(\mu)_1;1}(\beta)\times$$

$$\times\Big(Y_{\nu_3^*;22}^{(\mu)_2;21}(chR_2)-i\gamma_{(\mu)_2}(\bar{b}_3)Y_{\nu_3^*;22}^{(\mu)_2;22}(chR_2)\Big)-$$

$$-a_{(\mu)_1;2}(\beta)\Big(Y_{\nu_3^*;12}^{(\mu)_2;21}(chR_2)-i\gamma_{(\mu)_2}(\bar{b}_3)\times$$

$$\times Y_{\nu_3^*;12}^{(\mu)_2;22}(chR_2)\Big)\Big]=$$

$$=iz_{(\mu)_1}(\bar{b}_2)\Big[\omega_{(\mu);1}(\beta)-i\gamma_{(\mu)_2}(\bar{b}_3)\omega_{(\mu);2}(\beta)\Big].$$

Визначимо числа

$$a_1^2\sigma_1=\frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}shR_1,\quad a_2^2\sigma_2=\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}},\quad a_3^2\sigma_3=1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1\cdot 1+$$

$$+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2shr+\theta(r-R_2)\sigma_3shr \tag{38}$$

та спектральну щільність

$$\Omega_{(\mu)}(\beta)=\frac{\beta\gamma_{(\mu)_2}(\bar{b}_3)s_{(\mu)_2}(\bar{b}_3)}{\Big[\omega_{(\mu);1}(\beta)\Big]^2+\Big[\gamma_{(\mu)_2}(\bar{b}_3)\omega_{(\mu);2}(\beta)\Big]^2}. \tag{39}$$

У результаті виконання зазначених у рівностях (37) операцій одержуємо:

$$\mathcal{H}_{(\mu);jk}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{(\mu);j}(r,\beta)\times$$

$$\times V_{(\mu);k}(\rho,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta a_k^2\sigma_k,\ j,k=\overline{1,3}. \tag{40}$$

Аналогічно знаходимо, що

$$W_{(\mu);1j}(t,r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty(-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1}V_{(\mu);1}(R_0,\beta)\times$$

$$\times V_{(\mu);j}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}d\beta a_1^2\sigma_1,\ j=\overline{1,3}. \tag{41}$$

Визначимо величини та функції:

$$d_1=a_1^2\sigma_1:c_{11,1},\ d_2=a_2^2\sigma_2:c_{11,2},$$

$$Z_{(\mu);i2}^{k}(\beta)=\Big(\tilde{\alpha}_{i2}^{k}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{i2}^{k}\Big)V_{(\mu);k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k};$$

$i,k=1,2.$

За вищезапропонованою методикою отримуємо, що

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}R_{2k}^{*j}(p,r)e^{pt}dp=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}Z_{(\mu);12}^{k}(\beta)V_{(\mu);j}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta\,d_k; \tag{42}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}R_{1k}^{*j}(p,r)e^{pt}dp=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}Z_{(\mu);22}^{k}(\beta)V_{(\mu);j}(r,\beta)\times$$

$$\times\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta\, d_k,\ k=1,2.$$

Отже, обернене перетворення Лапласа

$$L^{-1}\Big[\sum_{m,k=1}^{2} R^{*j}_{(\mu);mk}(p,r)\Big] =$$

$$= L^{-1}\Big[\sum_{k=1}^{2} R^{*j}_{(\mu);1k}(p,r)\Big] +$$

$$+ L^{-1}\Big[\sum_{k=1}^{2} R^{*j}_{(\mu);2k}(p,r)\Big] =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} d_k\Big[-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} Z^k_{(\mu);22}(\beta)\times$$

$$\times V_{(\mu);j}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta + \tag{43}$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} Z^k_{(\mu);12}(\beta) V_{(\mu);j}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta\Big].$$

У результаті підстановки одержаних виразів функцій Гріна $W_{(\mu);1j}(t,r)$ згідно формули (41), функцій впливу $\mathcal{H}_{(\mu);jk}(t,r,\rho)$ згідно формули (40) та функцій Гріна умов спряження згідно формули (43) у формули (25) одержуємо інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку параболічної крайової задачі спряження (1)-(4):

$$u_j(t,r) = \int\limits_0^t \Big[\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty (-\tilde{\alpha}^0_{11})^{-1} V_{(\mu);1}(R_0,\beta)\times$$

$$\times V_{(\mu);j}(r,\beta) e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)}\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta\Big] a_1^2\sigma_1\times$$

$$\times\Big[g_0(\tau)+\delta_+(\tau)(\delta^0_{11}g_1'(R_0)+\gamma^0_{11}g_1(R_0))\Big]d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{R_0}^{R_1}\Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)} V_{(\mu);j}(r,\beta)\times$$

$$\times V_{(\mu);1}(\rho,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta\Big)\Big[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_1(\rho)\Big]\times$$

$$\times\sigma_1 d\rho d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2}\Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V_{(\mu);j}(r,\beta)\times$$

$$\times V_{(\mu);2}(\rho,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)}d\beta\Big)\times$$

$$\times\Big[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_2(\rho)\Big]\sigma_2 d\rho d\tau + \tag{44}$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{R_2}^\infty\Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V_{(\mu);j}(r,\beta)V_{(\mu);3}(\rho,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)\times$$

$$\times e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)}d\beta\Big)\Big[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_3(\rho)\Big]\sigma_3 d\rho d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^2 d_k\Big[\int\limits_0^t\Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)} Z^k_{(\mu);12}(\beta)\times$$

$$\times V_{(\mu);j}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta\Big)\Big(\omega_{2k}(\tau)+\psi_{2k}\delta_+(\tau)\Big)d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t\Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)} Z^k_{(\mu);22}(\beta)V_{(\mu);j}(r,\beta)\times$$

$$\times\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta\Big)\Big(\omega_{1k}(\tau)+\psi_{1k}\delta_+(\tau)\Big)d\tau\Big];\ j=\overline{1,3}.$$

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови:*
1) функції $f_j(t,r)$, $g_0(t)$ та $\omega_{jk}(t)$ є оригіналами за Лапласом щодо змінної t;
2) функції $f_j(t,r)$ та $g_j(r)$ задовольняють умови спряження;
3) функції $f(t,r)=\{f_1(t,r),f_2(t,r),f_3(t,r)\}$ та $g(r)=\{g_1(r),g_2(r),g_3(r)\}$ обмежені, неперервні, абсолютно сумовні з ваговою функцією $\sigma(r)$ і мають обмежену варіацію на множині I_2^+;
4) функція $F(t,r)=\Big\{\frac{\partial}{\partial r}F[f_1(t,r)],\ \frac{\partial}{\partial r}\Lambda_{(\mu)_1}[f_2(t,r)],\ \frac{\partial}{\partial r}\Lambda_{(\mu)_2}[f_3(t,r)]\Big\}$ неперервно диференційовна за t й неперервна за r на множині D_2^+;
5) справджується нерівність (20).

Тоді в класі неперервно диференційовних за змінною t і двічі неперервно диференційовних за змінною r на множині D_2^+ функцій $u(t,r)=\{u_1(t,r),u_2(t,r),u_3(t,r)\}$, що задовольняють умови 1), 3), параболічна мішана задача (1)-(4) має єдиний обмежений розв'язок, який визначається за формулою (44).

Зауваження 3. Наявність у формулі (44) доданка

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty(-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1}V_{(\mu);1}(R_0,\beta)V_{(\mu);j}(r,\beta)\times$$
$$\times e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta a_1^2\sigma_1\Big[\delta_{11}^0 g_1'(R_0)+$$
$$+\gamma_{11}^0 g_1(R_0)\Big]+\sum_{k=1}^2 d_k\Big[\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\times$$
$$\times Z_{(\mu);12}^k(\beta)V_{(\mu);j}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta\Big)\psi_{2k}- \quad (45)$$
$$-\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}Z_{(\mu);22}^k(\beta)V_{(\mu);j}(r,\beta)\times$$
$$\times\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta\Big)\psi_{1k}\Big],\ j=\overline{1,3}$$

показує вплив м'ягкості межі середовища, в якому моделюються еволюційні процеси (поширення тепла, дифузії).

Зауваження 4. Доданка (45) можна уникнути, якщо перейти до нових початкових даних $\varphi_j(r)$ за формулами

$$g_j(r)=\varphi_j(r)+a_j r+b_j,\ j=\overline{1,3},\ a_3=0,$$

і знайти коефіцієнти a_j $(j=1,2)$ та b_j $(j=\overline{1,3})$ із алгебраїчної системи з п'яти рівнянь:

$$(\delta_{11}^0+\gamma_{11}^0 R_0)a_1+\gamma_{11}^0 b_1=$$
$$=\delta_{11}^0 g_1'(R_0)+\gamma_{11}^0 g_1(R_0)\equiv\psi_0, \quad (46)$$
$$\Big[(\delta_{j1}^k+\gamma_{j1}^k R_k)a_k+\gamma_{j1}^k b_k\Big]-$$
$$-\Big[(\delta_{j2}^k+\gamma_{j2}^k R_k)a_{k+1}+\gamma_{j2}^k b_{k+1}\Big]=\psi_{jk};\ j,k=1,2.$$

При накладених умовах на коефіцієнти алгебраїчна система (46) завжди має єдиний розв'язок.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В.В. Городецький. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.

2. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями / М.І. Матійчук. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.

3. *Дейнека В.С.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий. – К.: Наук. думка, 1998. – 614 с.

4. *Сергиенко И.В.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.

5. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

6. *Конет І.М.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.

7. *Конет І.М.* Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2004. – 276 с.

8. *Ленюк М.П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.

9. *Громик А.П.* Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А.П. Громик, І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011. – 200 с.

10. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз. 1959. – 468 с.

11. *Конет І.М.* Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2002. – 248 с.

12. *Лаврентьев М.А.* Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

13. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

14. *Ленюк М.П.* Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. / М.П. Ленюк, М.І. Шинкарик. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.

15. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

16. *Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.