УДК 517.928

©2012 р. О.В. Осипова, І.М. Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

РОЗЩЕПЛЕННЯ РІЗНОТЕМПОВИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Досліджується система лінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь з багатьма малими параметрами. Побудована заміна змінних, за допомогою якої вихідна система зводиться до сукупності незалежних підсистем.

We investigate a system of linear singularly perturbed differential equations with plenty of small parameters. As a result, we find a substitution which allows to reduce the system to a number of independent subsystems.

В роботах [1-2] запропонований конструктивний підхід дослідження систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь, що базується на методі інтегральних многовидів Боголюбова-Митропольського. Такий підхід є ефективним тільки в тому випадку, якщо вдається точно або наближено знайти інтегральний многовид. Для сингулярно збурених систем інтегральні многовиди можна будувати у вигляді асимптотичних розкладів за степенями малого параметра [3-4]. Для лінійних сингулярно збурених систем метод інтегральних многовидів дозволяє здійснити розщеплення вихідної системи на незалежні швидку і повільну підсистеми [5-6].

У даній роботі розглядаються системи лінійних сингулярно збурених рівнянь з багатьма малими параметрами, які вивчалися у працях [7-8]. Метою роботи є обґрунтування методики зведення вихідної системи до сукупності незалежних підсистем. Аналогічна задача у випадку двох малих параметрів розглянута в роботі [9].

1. Схема розщеплення. Розглянемо лінійну систему

$$\prod_{j=0}^{i}\varepsilon_j\dot{x}_i=\sum_{j=0}^{k}A_{ij}x_j,\ i=\overline{0,k}, \qquad (1)$$

де $t\in\mathbb{R}$, $x_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, $i=\overline{0,k}$, $A_{ij}=A_{ij}(t)$, $i,j=\overline{0,k}$, – матриці розмірностей $n_i\times n_j$, $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k$ - малі додатні параметри.

Припустимо, що матриці $A_{ij}(t)$, $i,j=\overline{0,k}$, рівномірно обмежені для $t\in\mathbb{R}$ і власні значення $\lambda_i=\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n_k}$, – матриці $A_{kk}(t)$ задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\lambda_i\le -2\beta<0,\quad t\in\mathbb{R}. \qquad (2)$$

Здійснимо в системі (1) заміну змінних

$$\begin{cases} x_i=y_i^1+\prod\limits_{j=i+1}^{k}\varepsilon_jH_i^1y_k^1,\ i=\overline{0,k-1},\\ x_k=y_k^1+\sum\limits_{j=0}^{k-1}P_j^1x_j, \end{cases} \qquad (3)$$

де H_i^1,P_j^1, $i,j=\overline{0,k-1}$ – матричні функції відповідних розмірностей.

Якщо матриці H_i^1,P_j^1, $i,j=\overline{0,k-1}$ вибрати як розв'язки відповідних систем

$$\prod_{m=1}^{k}\varepsilon_m\dot{P}_j^1=A_{kj}+A_{kk}P_j^1-$$

$$-\sum_{m=0}^{k-1}\prod_{n=m+1}^{k}\varepsilon_nP_m^1\left(A_{mj}+A_{mk}P_j^1\right), \qquad (4)$$

$$\prod_{m=1}^{k}\varepsilon_m\dot{H}_i^1=A_{ik}-H_i^1(A_{kk}-\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m\times$$

$$\times P_j^1A_{jk})+\sum_{m=0}^{k-1}\prod_{n=m+1}^{k}\varepsilon_n\left(A_{im}+A_{ik}P_m^1\right)H_m^1, \qquad (5)$$

тоді система (1) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \prod\limits_{j=0}^{i}\varepsilon_j\dot{y}_i^1=\sum\limits_{j=0}^{k-1}B_{ij}^1y_j^1, i=\overline{0,k-1},\\ \prod\limits_{j=0}^{k}\varepsilon_j\dot{y}_k^1=B_{kk}^1y_k^1, \end{cases} \qquad (6)$$

де $B^1_{ij} = A_{ij} + A_{ik}P^1_j$, $i, j = \overline{0, k-1}$,
$B^1_{kk} = A_{kk} - \sum\limits_{j=0}^{k-1} \prod_{m=j+1}^{k} \varepsilon_m P^1_j A_{jk}$.

Продовжуючи цей процес, на $(k-1)$-ому кроці отримаємо систему

$$\begin{cases} \dot{y}^{k-1}_0 = B^{k-1}_{00} y^{k-1}_0 + B^{k-1}_{01} y^{k-1}_1, \\ \varepsilon_1 \dot{y}^{k-1}_1 = B^{k-1}_{10} y^{k-1}_0 + B^{k-1}_{11} y^{k-1}_1, \\ \prod\limits_{j=0}^{i} \varepsilon_j \dot{y}^{k+1-i}_i = B^{k+1-i}_{ii} y^{k+1-i}_i, i = \overline{2, k}, \end{cases} \tag{7}$$

де $B^{k-1}_{ij} = B^{k-2}_{ij} + B^{k-2}_{i2} P^{k-1}_j$, $i, j = 0, 1$, $B^{k-1}_{22} = B^{k-2}_{22} - \varepsilon_1\varepsilon_2 P^{k-1}_0 B^{k-2}_{02} - \varepsilon_2 P^{k-1}_1 B^{k-2}_{12}$.

Тепер за допомогою заміни змінних

$$\begin{cases} y^{k-1}_0 = y^k_0 + \varepsilon_1 H^k_0 y^k_1, \\ y^{k-1}_1 = y^k_1 + P^k_0 y^{k-1}_0, \end{cases} \tag{8}$$

отримаємо «блочно-діагональну» систему

$$\begin{cases} \dot{y}^k_0 = B^k_{00} y^k_0, \\ \varepsilon_1 \dot{y}^k_1 = B^k_{11} y^k_1, \\ \prod\limits_{j=0}^{i} \varepsilon_j \dot{y}^{k+1-i}_i = B^{k+1-i}_{ii} y^{k+1-i}_i, i = \overline{2, k}, \end{cases} \tag{9}$$

де $B^k_{00} = B^{k-1}_{00} + B^{k-1}_{01} P$,
$B^k_{11} = B^{k-1}_{11} - \varepsilon_1 P B^{k-1}_{01}$.

Тут H^k_0, P^k_0 – матричні функції, які задовольняють рівняння

$$\varepsilon_1 \dot{P}^k_0 = B^{k-1}_{10} + B^{k-1}_{11} P^k_0 - \\ -\varepsilon_1 P^k_0 \left(B^{k-1}_{00} + B^{k-1}_{02} P^k_0\right), \tag{10}$$

$$\varepsilon_1 \dot{H}^k_0 = B^{k-1}_{01} - H^k_0 (B^{k-1}_{11} - \varepsilon_1 P^k_0 B^{k-1}_{01}) + \\ +\varepsilon_1 \left(B^{k-1}_{00} + B^{k-1}_{02} P^k_0\right) H^k_0. \tag{11}$$

2. Існування невиродженої розщеплюючої заміни змінних

Покажемо, що існує невироджена заміна змінних, яка приводить вихідну систему (1) до «блочно-діагональної» системи (9).

Лема 1. *Нехай матриці $A_{ij}(t)$, $i, j = \overline{0, k}$, рівномірно обмежені для $t \in \mathbb{R}$ і виконується умова 2). Тоді існує $\varepsilon^*_k > 0$ таке, що при $0 < \varepsilon_k < \varepsilon^*_k$ система (4) має єдиний обмежений розв'язок при $t \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Позначимо $Q(t, s, \varepsilon)$ фундаментальну матрицю рівняння

$$\prod_{j=0}^{k} \varepsilon_j \dot{x}_k = A_{kk} x_k. \tag{12}$$

Рівномірна обмеженість матриці A_{kk} і умова 2) забезпечує оцінку:

$$\|Q(t, s, \varepsilon)\| \leq K e^{-\frac{3\beta}{2\prod\limits_{j=0}^{k}\varepsilon_j}(t-s)}, \tag{13}$$

для деякого $K > 0$ при будь-яких $-\infty < s \leq t < \infty$.

Запишемо систему (4) в еквівалентній формі системи інтегральних рівнянь:

$$P_i(t, s, \varepsilon) = \frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{k} \varepsilon_j} \int\limits_{-\infty}^{t} Q(t, s, \varepsilon)(A_{ki}(s, \varepsilon) - \\ - \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{m=j+1}^{k} \varepsilon_m P_j(s, \varepsilon)(A_{ji}(s, \varepsilon) + \\ + A_{jk}(s, \varepsilon) P_i(s, \varepsilon)))ds, \quad i = \overline{0, k-1}, \tag{14}$$

За допомогою принципу стискаючих відображень покажемо, що система (14) має єдиний обмежений на всій числовій осі розв'язок. Будемо шукати розв'язок системи (14) методом послідовних наближень:

$$P^{n+1}_i = \frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{k} \varepsilon_j} \int\limits_{-\infty}^{t} Q\Big(A_{ki} - \\ - \sum_{j=0}^{k-1} \prod_{m=j+1}^{k} \varepsilon_m P^n_j \left(A_{ji} + A_{jk} P^n_i\right)\Big) ds, \tag{15}$$
$$i = \overline{0, k-1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Покладемо $P^0_i = 0$, $i = \overline{0, k-1}$. Використовуючи нерівність (13), дістанемо оцінки:

$$\left|P^1_i\right| \leq \frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{k} \varepsilon_j} \int\limits_{-\infty}^{t} K e^{-\frac{3\beta}{2\prod\limits_{j=0}^{k}\varepsilon_j}(t-s)} M ds = \\ = \frac{2KM}{3\beta} < \frac{KM}{\beta}, \ i = \overline{0, k-1},$$

$$\left|P_i^2\right| \le \frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{k}\varepsilon_j}\int\limits_{-\infty}^{t} K e^{-\frac{3\beta}{2\prod_{j=0}^{k}\varepsilon_j}(t-s)}\Big(M+$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m \frac{KM}{\beta}\left(M+M\frac{KM}{\beta}\right)\Big)ds=$$

$$=\frac{2KM}{3\beta}\Big(1+\frac{KM}{\beta}\left(1+\frac{KM}{\beta}\right)\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m\Big)<\frac{KM}{\beta},\ i=\overline{0,k-1},$$

при $0<\varepsilon_k<\varepsilon_k^0$, де $\varepsilon_k^0=\frac{\beta^2}{KM(\beta+KM)}$.

Припустимо тепер, що

$$|P_i^n|<\frac{KM}{\beta},\ i=\overline{0,k-1},\ 0<\varepsilon_k<\varepsilon_k^0, \quad (16)$$

$n=0,1,2,\ldots,$
тоді

$$|P_i^{n+1}|=\Big|\frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{k}\varepsilon_j}\int\limits_{-\infty}^{t} Q\Big(A_{ki}-\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m P_j^n\times$$

$$\times(A_{ji}+A_{jk}P_i^n)\Big)ds\Big|<\frac{2KM}{3\beta}\times$$

$$\times\left(1+\frac{KM}{\beta}\left(1+\frac{KM}{\beta}\right)\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m\right) \quad (17)$$

$$<\frac{KM}{\beta},\quad i=\overline{0,k-1}.$$

Отже, послідовності P_i^n, $n=0,1,2,\ldots,$ $i=\overline{0,k-1}$, рівномірно обмежені при $0<\varepsilon_k<\varepsilon_k^0$.

Дослідимо тепер послідовні різниці для наближень P_i^n. Маємо:

$$|P_i^2-P_i^1|=\Big|\frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{k}\varepsilon_j}\int\limits_{-\infty}^{t} Q\Big(A_{ki}-$$

$$-\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m P_j^1\Big(A_{ji}+A_{jk}P_i^1\Big)\Big)ds-$$

$$-\frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{k}\varepsilon_j}\int\limits_{-\infty}^{t} Q\Big(A_{ki}-\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m P_j^0(A_{ji}+$$

$$+A_{jk}P_i^0)\Big)ds\Big|\le\frac{2KM}{3\beta}\Big(\sum_{j=0,j\ne i}^{k-1}\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m\times$$

$$\times\left(\left(1+\frac{KM}{\beta}\right)\left|P_j^0-P_j^1\right|+\frac{KM}{\beta}\left|P_i^0-P_i^1\right|\right)+$$

$$+\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m\left(1+\frac{2KM}{\beta}\right)\left|P_i^0-P_i^1\right|\Big)\le$$

$$\le\sum_{j=0,j\ne i}^{k-1}q_j\left|P_j^0-P_j^1\right|+q_i\left|P_i^0-P_i^1\right|,$$

де

$$q_j=\frac{2KM}{3\beta^2}(\beta+KM)\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m,$$

$$q_i=\frac{2KM}{3\beta^2}\Big(\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m KM+$$

$$+\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m(\beta+KM)\Big),$$

Покладемо $q=\max\limits_i q_i$, тоді

$$|P_i^2-P_i^1|\le q\sum_{j=0}^{k-1}\left|P_j^2-P_j^1\right|.$$

У загальному випадку дістаємо:

$$|P_i^{n+1}-P_i^n|=\Big|\frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{k}\varepsilon_j}\int\limits_{-\infty}^{t} Q\Big(A_{ki}-$$

$$-\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m P_j^n\left(A_{ji}+A_{jk}P_i^n\right)\Big)ds-$$

$$-\frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{k}\varepsilon_j}\int\limits_{-\infty}^{t} Q\Big(A_{ki}-\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m P_j^{n-1}\times$$

$$\times(A_{ji}+A_{jk}P_i^{n-1})\Big)ds\Big|\le$$

$$\leq \frac{2KM}{3\beta}\Big(\sum_{j=0,j\neq i}^{k-1}\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m\Big(\Big(1+\frac{KM}{\beta}\Big)\times$$

$$\times|P_j^n-P_j^{n-1}|+\frac{KM}{\beta}|P_i^n-P_i^{n-1}|\Big)+$$

$$+\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m\left(1+\frac{2KM}{\beta}\right)\left|P_i^n-P_i^{n-1}\right|\Bigg)\leq$$

$$\leq\sum_{j=0,j\neq i}^{k-1}q_j\left|P_j^n-P_j^{n-1}\right|+q_i\left|P_i^n-P_i^{n-1}\right|\leq$$

$$\leq q\sum_{j=0}^{k-1}\left|P_j^n-P_j^{n-1}\right|\leq$$

$$\leq\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1}C_{n-1}^{m}q^{n-1}\left|P_j^1-P_j^0\right|.$$

Виберемо таке ε_k^1, щоб для всіх $0<\varepsilon_k<\varepsilon_k^1$ справджувались нерівності $|q|<\frac{1}{2}$. Враховуючи, що $\sum\limits_{m=0}^{n-1}C_{n-1}^m=2^{n-1}$, дістаємо, що послідовності $P_i^n(t,\varepsilon)$, $n=0,1,\ldots$ рівномірно збіжні при $n\to\infty$ для всіх $0<\varepsilon_k<\varepsilon_k^*$, де $\varepsilon_k^*=\min\{\varepsilon_k^0,\varepsilon_k^1\}$.

Покладемо тепер $P_i(t,\varepsilon)=\lim\limits_{n\to\infty}P_i^n(t,\varepsilon)$. На основі оцінок (17) маємо:

$$|P_i(t,\varepsilon)|\leq\frac{KM}{\beta}. \tag{18}$$

Лема 1 доведена.

Лема 2. *Нехай справджуються умови леми 1. Тоді існує* $\overline{\varepsilon_k}>0$ *таке, що при* $0<\varepsilon_k<\overline{\varepsilon_k}$ *для фундаментальної матриці* $\overline{Q}(t,s,\varepsilon)$ *рівняння*

$$\prod_{i=1}^{k}\varepsilon_i\dot{y}_k^1=\left(A_{kk}-\sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=i+1}^{k}\varepsilon_jP_i^1A_{ik}\right)y_k^1 \tag{19}$$

справедлива оцінка

$$\left|\overline{Q}(t,s,\varepsilon)\right|\leq Ke^{-\frac{\beta}{\prod_{i=1}^{k}\varepsilon_i}(t-s)}. \tag{20}$$

Доведення. Перепишемо рівняння (19) у вигляді

$$\prod_{i=1}^{k}\varepsilon_i\dot{y}_k^1=A_{kk}y_k^1-\sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=i+1}^{k}\varepsilon_jP_i^1A_{ik}y_k^1.$$

Фундаментальна матриця $\overline{Q}(t,s,\varepsilon)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$\overline{Q}=Q+\int_s^tQ\left(\sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=i+1}^{k}\varepsilon_jP_i^1A_{ik}\right)\overline{Q}d\tau.$$

Використовуючи (13), умови леми 1 та нерівності (17), маємо

$$|\overline{Q}|\leq Ke^{-\frac{3\beta(t-s)}{2\prod_{i=1}^{k}\varepsilon_i}}+\int_s^t\frac{K^2M^2}{\beta}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=i+1}^{k}\varepsilon_j\right)\times$$

$$\times|\overline{Q}|e^{-\frac{3\beta(t-\tau)}{2\prod_{i=1}^{k}\varepsilon_i}}d\tau.$$

Звідки

$$|\overline{Q}|\,e^{\frac{3\beta t}{2\prod_{i=1}^{k}\varepsilon_i}}\leq K_1+\int_s^t\frac{K^2M^2}{\beta}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=i+1}^{k}\varepsilon_j\right)\times$$

$$\times|\overline{Q}|e^{\frac{3\beta\tau}{2\prod_{i=1}^{k}\varepsilon_i}}d\tau.$$

Застосовуючи нерівність Гронуолла-Беллмана, дістанемо

$$\left|\overline{Q}\right|e^{\frac{3\beta t}{2\prod_{i=1}^{k}\varepsilon_i}}\leq K_1e^{\int_s^t\frac{K^2M^2}{\beta}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=i+1}^{k}\varepsilon_j\right)d\tau}=$$

$$=K_1e^{\frac{K^2M^2}{\beta}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=i+1}^{k}\varepsilon_j\right)(t-s)}.$$

Отже,

$$\left|\overline{Q}\right|\leq Ke^{\left(\frac{K^2M^2}{\beta}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=i+1}^{k}\varepsilon_j\right)-\frac{3\beta}{2\prod_{j=1}^{k}\varepsilon_j}\right)(t-s)}.$$

Остання нерівність при

$$\varepsilon<\frac{\beta}{\sqrt{2\prod_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=i+1}^{k}\varepsilon_j\right)KM}}=\overline{\varepsilon_k}$$

набуває вигляду

$$\left|\overline{Q}\right|\leq Ke^{-\frac{\beta}{\prod_{i=1}^{k}\varepsilon_i}(t-s)}.$$

Лема 2 доведена.

Лема 3. *Нехай матриці $A_{ij}(t)$, $i,j=\overline{0,k}$, рівномірно обмежені для $t\in\mathbb{R}$ і виконується умова 2). Тоді існує $\varepsilon_k^{**}>0$ таке, що при $0<\varepsilon_k<\varepsilon_k^{**}$ система (5) має єдиний обмежений розв'язок при $t\in\mathbb{R}$.*

Доведення. Перепишемо систему (5), враховуючи позначення для матриць B_{ij}, $i,j=\overline{0,k}$ у вигляді

$$\prod_{j=1}^{k}\varepsilon_j\dot{H}_i^1=A_{ik}+\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m B_{ij}H_j^1-$$
$$-H_i^1B_{kk},\ i=\overline{0,k-1}. \qquad (21)$$

Із співвідношень $B_{ij}=A_{ij}+A_{ik}P_j^1$, $i=\overline{0,k-1}$, та нерівностей (17) дістаємо, що матриці B_{ij}, $i=\overline{0,k-1}$, рівномірно обмежені за нормою сталою $M_1=M\left(1+\frac{KM}{\beta}\right)$. Позначимо через $Q_{H_i}(t,s,\varepsilon)$ фундаментальну матрицю рівняння $\prod\limits_{j=0}^{i}\varepsilon_j\dot{x}_i=B_{ii}(t,\varepsilon)x_i$, $i=\overline{0,k-1}$.

Систему (21) можна представити у вигляді системи інтегральних рівнянь

$$H_i^1=-\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{k}\varepsilon_j}\int\limits_{-\infty}^{t}\overline{Q}\Big(A_{ik}+\sum_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{k-1}\prod_{m=j+1}^{k}\varepsilon_m B_{ij}H_j^1\Big)\times$$
$$\times Q_{H_i}ds,\ i=\overline{0,k-1}.$$

Збіжність інтегралів системи доводиться за допомогою нерівності (20) методом, аналогічним тому, який застосовувався при доведенні леми 1.

Лема 3 доведена.

Аналогічним чином обгрунтовуються твердження, про існування для наступних кроків розщеплюючих перетворень.

Виражаючи старі змінні x_i, $i=\overline{0,k}$ через нові y_0^k, y_i^{k+1-i}, $i=\overline{1,k}$, одержуємо наступну теорему.

Теорема. *Нехай матриці $A_{ij}(t)$, $i,j=\overline{0,k}$, рівномірно обмежені для $t\in\mathbb{R}$ і виконується умова 2). Тоді для достатньо малих ε_i, $i=\overline{1,k}$, існує невироджена заміна змінних*

$$\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}=\Phi\begin{pmatrix}y_0^k\\y_1^k\\y_2^{k-1}\\\vdots\\y_k^1\end{pmatrix},$$

за допомогою якої система (1) *зводиться до послідовності незалежних підсистем*

$$\begin{cases}\dot{y}_0^k=B_{00}^ky_0^k,\\ \prod\limits_{j=0}^{i}\varepsilon_j\dot{y}_i^{k+1-i}=B_{ii}^{k+1-i}y_i^{k+1-i}, \quad i=\overline{1,k}.\end{cases}$$

Доведення. Вигляд розщеплюючого перетворення

$$\Phi\,[i,j]=\begin{cases}R_j^{k-j}+\sum\limits_{m=0}^{j-1}\prod\limits_{n=m+1}^{j}\varepsilon_nR_m^{k-j+1}H_m^{k-j+1},\\ (i\geq j)\wedge(i>1),\\ \qquad R_i^{k-i}=E,\ R_m^{k-i+1}=P_m^{k-i+1},\\ R_m^{n+1}=R_m^n+R_{k-n}^nP_m^{n+1},\\ \prod\limits_{m=i+1}^{j}\varepsilon_mH_i^{k+1-j}y_j^{k+1-j},\\ (i<j)\wedge(j>1),\\ E,\ i=j=0,\\ \varepsilon_1H_0^k,\ i=0,\ j=1,\\ P_0^k,\ i=1,\ j=0,\\ E+\varepsilon_1P_0^kH_0^k,\ i=j=1,\end{cases}$$

випливає із структури замін змінних на кожному кроці. Для доведення теореми треба показати, що перетворення Φ невироджене, тобто існує обернене перетворення Φ^{-1}. Виразимо змінні y_0^k, y_i^{k+1-i}, $i=\overline{1,k}$ через змінні x_i, $i=\overline{0,k}$.

З рівностей (3) випливає

$$\begin{cases}y_i^1=x_i-\prod\limits_{j=i+1}^{k}\varepsilon_jH_i^1y_k^1, \quad i=\overline{0,k-1},\\ y_k^1=x_k-\sum\limits_{j=0}^{k-1}P_j^1x_j,\end{cases}$$

З цієї та наступних замін дістаємо, що y_0^k, y_i^{k+1-i}, $i=\overline{1,k}$, можна виразити через змінні x_i, $i=\overline{0,k}$ за такими формулами

$$y_0^k=\sum_{j=0}^{k}D_{0j}^{k+1}x_j,$$
$$y_i^{k+1-i}=\sum_{j=0}^{k}D_{ij}^{k+1-i}x_j,$$

де для $n = \overline{0, k-1},\ j = \overline{0, k}$

$$D^{n+1}_{k-n,j} = D^{n}_{k-n,j} - \sum_{m=0}^{k-n-1} P^{n+1}_{m} D^{n+1}_{k-n,j},$$

$$D^{n+1}_{ij} = D^{n}_{ij} - \prod_{m=i+1}^{k-n} \varepsilon_m H^{n+1}_{i} D^{n+1}_{k-n,j},$$

$$i = \overline{0, k-n-1},$$

$$D^{0}_{ij} = 0,\ i \neq j,\ D^{0}_{ii} = E,$$

$$D^{k+1}_{0j} = \left(E + \varepsilon_1 H^{k}_{0} P^{k}_{0}\right) D^{k-1}_{0j} - \varepsilon_1 H^{k}_{0} D^{k-1}_{1j}.$$

Отже, обернена матриця існує

$$\Phi^{-1}[i,j] = D^{k+1-i}_{ij},\ i = \overline{0, k}.$$

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. – М.: Наука, 1988. – 256с.

2. *Воропаева Н. В., Соболев В.А.* Конструктивный метод расщепления нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения, 1995. – Т. 31, № 4. – С. 569-578.

3. *Sobolev V.A.* Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed system // Syst. and Contr. Lett., 1984. – № 5. – P.169-179.

4. *Гольдштейн Н.В., Соболев В.А.* Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. – Новосибирск, 1988. – 153с.

5. *Sobolev V.A.* Decomposition of linear singularly perturbed systems // Acta Math. Hung., 1987. – 49, № 3-4. – P. 365-376.

6. *Черевко І.М.* Розщеплення лінійних сингулярно-збурених диференціально-функціональних рівнянь // Доп. НАН України, 2002. – №6. – С. 32-36.

7. *Воропаева Н. В., Соболев В.А.* Декомпозиция многотемповых систем. – Самара: СМС, 2000. – 250с.

8. *Семенова М.М.* Декомпозиция систем с несколькими временными масштабами. // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2004. – 8. – С.6-11.

9. *Сельський С.С., Черевко І.М.* Інтегральні многовиди та розщеплення систем лінійних сингулярно збурених рівнянь з двома малими параметрами. // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту, серія «Математика», 2011. – Т.1, N. 3. – С. 104-107.