УДК 517.51

©2012 р. В.В. Нестеренко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Буковинський державний фінансово-економічний університет, Чернівці

КЛАСИФІКАЦІЯ ТОЧОК РОЗРИВУ ДЕЯКИХ АНАЛОГІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ ТА ДЕКОМПОЗИЦІЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ

Досліджуються типи точок розриву деяких аналогів неперервності. На основі одержаних результатів встановлено ряд декомпозиційних теорем.

Investigate the types of points of discontinuity of some analogues of continuity. On the basis of the results revealed a number of decomposition theorems.

1. Вступ. Під декомпозицією певної властивості розуміють теореми, в яких ця властивість одержується при одночасному виконанні кількох слабших властивостей. Тема декомпозиції неперервності є досить популярною і відображена в працях багатьох математиків.

Окреме місце серед декомпозицій неперервності займають теореми, де однією з умов є умова замкнености графіка відображення. Так, добре відомим є той факт, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка має замкнений і зв'язний графік, є неперервною. Достеменно невідомо кому належить цей результат, доведення якого, зокрема, подано в [1]. Умови згаданої декомпозиційної теореми модифікувалися багатьма математиками. Так зв'язність графіка замінювалася на периферійну неперервність в [2] та на властивість Дарбу в [3].

В [4] вказано умови на простори X і Y, які гарантують неперервність майже неперервних відображень $f : X \to Y$ із замкненим графіком (див також праці [5, 6]).

Уведене в [7] поняття двосторонньої квазінеперервності було застосовано Добошем [8] до декомпозиції неперервності: двосторонньо квазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка має замкнений графік, є неперервною.

Також, цікавим є результати щодо неперервності монотонних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. В [9] У.Первін та Н.Левін встановили, що кожна монотонна і з властивістю Дарбу функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною.

В цій статті буде подано доведення як згаданих декомпозиційних теорем, так і ряду нових теорем про декомпозицію неперервності, а також теорем про неперервність монотонних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ідея доведення цих теорем однакова і базується на класифікації точок можливих розривів різних ослаблень та аналогів неперервності.

2. Основні поняття та зв'язки між різними ослабленнями неперервності. Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – відображення і $Gr(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ – графік відображення f. Кажуть, що відображення f:

зв'язне [10], якщо множина $Gr(f|_G)$ є зв'язною в $X \times Y$ для кожної зв'язної множини G в X;

розширюване [11], якщо існує зв'язне відображення $g : X \times [0, 1] \to Y$, таке, що $f(x) = g(x, 0)$ для всіх $x \in X$;

S-неперервне (майже неперервне в розумінні Стеллінґза) [11], якщо для кожної відкритої множини W в $X \times Y$, такої, що $Gr(f) \subseteq W$ існує таке неперервне відображення $g : X \to Y$, що $Gr(g) \subseteq W$;

має *властивість Дарбу* [10], якщо образ $f(E)$ кожної зв'язної множини E у просторі X є зв'язною множиною у просторі Y;

має *властивість Ґібсона* [12], якщо $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$ для кожної відкритої множини U в просторі X ;

периферійно неперервне [11], якщо для довільної точки $x \in X$, для довільних відкритих околів U і V точок x в X і $y = f(x)$ в Y, відповідно, існує відкритий окіл G точки x в X, такий, що $G \subseteq U$ і $f(Fr(G)) \subseteq V$, де $Fr(G)$ означає межу множини G;

графічно неперервне [13], якщо існує неперервне відображення $g : X \to Y$, таке, що $Gr(g) \subseteq \overline{Gr(f)}$;

майже неперервне (в розумінні Гусейна) [14], якщо для кожної точки $x \in X$, для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що $x \in int\overline{A}$ і $f(A) \subseteq V$.

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ називається *двосторонньою граничною точкою множини* $P \subseteq \mathbb{R}$, якщо існують послідовності $(x'_n), (x''_n) \in P$, такі, що $x'_n \nearrow x$, $x''_n \searrow x$, тобто послідовність (x'_n) зростаючи прямує до x, а послідовність (x''_n) спадаючи прямує до x. Функція f:

має досконалий шлях [15], якщо для кожної точки $x \in \mathbb{R}$ існує досконала множина P, така, що $x \in P$, точка x є двосторонньою граничною точкою множини P і звуження $f_{|P}$ є неперервним у точці x;

має *властивість Юнґа* [10], якщо для кожної точки $x \in \mathbb{R}$ існують послідовності (x'_n) і (x''_n), такі, що $x'_n \nearrow x$, $x''_n \searrow x$, $f(x'_n) \to f(x)$ і $f(x''_n) \to f(x)$;

двосторонньо квазінеперервна [7], якщо для кожної точки $x \in \mathbb{R}$, для довільного околу V точки $y = f(x)$ в $\mathbb{R}$ і довільного числа $\delta > 0$ існують відкриті непорожні множини U і W в $\mathbb{R}$, такі, що $U \subseteq (x, x + \delta)$, $W \subseteq (x - \delta, x)$ і $f(U \cup W) \subseteq V$.

Добре відомо [10], що для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ мають місце такі імплікації:

$$f \text{ – розширювана} \Rightarrow f \text{ – S-неперервна} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ – зв'язна} \Rightarrow f \text{ має зв'язний графік} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ має вл. Дарбу} \Rightarrow f \text{ має вл. Юнґа.} \quad (*)$$

$$f \text{ – розширювана} \Rightarrow f \text{ має досконалий}$$

$$\text{шлях} \Rightarrow f \text{ має вл. Юнґа.}$$

Зауважимо, що жодна з імплікацій $(*)$ не може бути повернена в інший бік. Відмітимо, що для функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ властивість Юнґа та периферійна неперервність означають одне і теж.

Позначимо через $D(f)$ множину точок розриву функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Для точки $x \in \mathbb{R}$ позначимо через $f(x + 0)$ правосторонню границю функції f в точці x, а через $f(x - 0)$ – лівосторонню границю функції f в точці x. Введемо в розгляд множини $D^+(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \in D(f_{|[x,+\infty)})\}$ і $D^-(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \in D(f_{|(-\infty,x]})\}$ точок правостороннього і лівостороннього розриву відповідно. Зрозуміло, що $D(f) = D^+(f) \cup D^-(f)$.

Твердження 1. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – майже неперервна функція. Тоді функція f має властивість Юнґа.*

Доведення. Розглянемо довільну точку $x \in \mathbb{R}$. З майже неперервності функції f у точці x випливає, що існує множина A_1 в $\mathbb{R}$, така, що $x \in int\overline{A_1}$ і $f(A_1) \subseteq (f(x) - 1, f(x) + 1)$. Візьмемо точку $x'_1 \in A_1 \cap (x - 1, x)$. Знову скориставшись майже неперервністю функції f в точці x одержимо множину A_2 в $\mathbb{R}$, таку, що $x \in int\overline{A_2}$ і $f(A_2) \subseteq (f(x) - \frac{1}{2}, f(x) + \frac{1}{2})$. Візьмемо точку $x'_2 \in A_2 \cap (x - \frac{1}{2}, x)$, таку, що $x'_1 < x'_2$. Продовживши цей процес до нескінченності ми отримаємо послідовність (x'_n), таку, що $x'_n \nearrow x$ і $|f(x'_n) - f(x)| < \frac{1}{n}$. Тому $f(x'_n) \to f(x)$. Аналогічно будується послідовність (x''_n), така, що $x''_n \searrow x$ і $f(x''_n) \to f(x)$. Отже, функція f має властивість Юнґа.

Твердження 2. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – двосторонньо квазінеперервна функція. Тоді функція f має властивість Юнґа.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $x \in \mathbb{R}$. З двосторонньої квазінеперервності функції f в точці x існує відкрита непорожня множина W_1 в $\mathbb{R}$, така, що $W_1 \subseteq (x - 1, x)$ і $f(W_1) \subseteq (f(x) - 1, f(x) + 1)$. Візьмемо точку $x'_1 \in W_1$. Покладемо $\delta_1 = \max\{x - \frac{1}{2}, x'_1\}$. Знову з двосторонньої квазінеперервності функції f в точці x одержимо відкриту непорожню множину W_2 в $\mathbb{R}$, таку, що $W_2 \subseteq (\delta_1, x)$ і $f(W_2) \subseteq (f(x) - \frac{1}{2}, f(x) + \frac{1}{2})$. Візьмемо $x'_2 \in W_2$ і $\delta_2 = \max\{x - \frac{1}{3}, x'_2\}$. Тоді $x'_1 < x'_2$ і $x - x'_2 < \frac{1}{2}$. Продовживши цей процес до нескінченності ми отримаємо зростаючу послідовність (x'_n), таку, що $x - x'_n < \frac{1}{n}$ і $|f(x'_n) - f(x)| < \frac{1}{n}$. Тому $x'_n \nearrow x$ і $f(x'_n) \to f(x)$. Аналогічно будується послідовність (x''_n), така, що $x''_n \searrow x$ і $f(x''_n) \to f(x)$. Отже, функція f має властивість Юнґа.

Твердження 3. *Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має властивість Ґібсона. Тоді функція f має властивість Юнґа.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $x \in \mathbb{R}$ і число $\varepsilon > 0$. Розглянемо відкриту множину $U_1 = (x-1, x)$. Оскільки $\overline{U_1} = [x-1, x]$ і функція f має властивість Ґібсона, то $f(x) \in f(\overline{U_1}) \subseteq \overline{f(U_1)}$. Тоді для довільного околу V точки $f(x)$ маємо, що $V \cap f(U_1) \neq \varnothing$. Візьмемо окіл $V = (f(x)-1, f(x)+1)$ точки $f(x)$. Тоді існує точка $x'_1 \in U_1$, така, що $f(x'_1) \in V$, тобто $|f(x) - f(x'_1)| < 1$. Розглянемо відкриту множину $U_2 = (\max\{x - \frac{1}{2}, x'_1\}, x)$. Тоді $f(x) \in f(\overline{U_2}) \subseteq \overline{f(U_2)}$ і існує точка $x'_2 \in U_2$, така, що $|f(x) - f(x'_2)| < \frac{1}{2}$. Продовживши цей процес до нескінченності ми отримаємо послідовність (x'_n), таку, що $x'_n \in (x - \frac{1}{n}, x)$, тобто $x'_n \nearrow x$, і $f(x'_n) \to f(x)$. Аналогічно будується послідовність (x''_n), така, що $x''_n \searrow x$ і $f(x''_n) \to f(x)$. Отже, функція f має властивість Юнґа.

Щодо зв'язків між згаданими ослабленнями неперервності слід зауважити, що в у випадку, коли функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера (подається у вигляді поточкової границі послідовності неперервних функцій), то

$$f \text{ – розширювана} \Leftrightarrow f \text{ має вл. Юнґа [10].}$$

А для функцій з властивістю Ґібсона належність до функцій першого класу Бера гарантує неперервність [12].

3. Тип точок розриву різних ослаблень неперервності. В цьому пункті ми дослідимо тип точок розриву згаданих аналогів неперервності.

Твердження 4. *Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має замкнений графік і $x \in D^+(f)$ /$x \in D^-(f)$/. Тоді $f(x+0) = \infty$ /$f(x-0) = \infty$/.*

Доведення. Припустимо, що $f(x+0) = a \neq \infty$. Тоді для довільної послідовності (x_n), такої, що $x_n > x$ і $x_n \to x$ маємо $f(x_n) \to a$ при $n \to \infty$. Таким чином, $(x_n, f(x_n)) \to (x, a)$ при $n \to \infty$. Оскільки функція f має замкнений графік, то $a = f(x)$. А це суперечить тому, що $x \in D^+(f)$, тобто $a = f(x+0) \neq f(x)$.

Припустимо тепер, що не існує границі $f(x+0)$. Тоді існують послідовності (u_n) і (v_n), такі, що $u_n > x$, $v_n > x$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, $u_n \to x$, $v_n \to x$ і $f(u_n) \to a$, $f(v_n) \to b$ при $n \to \infty$, де $a \neq b$. Оскільки графік функції f замкнений, то $(u_n, f(u_n)) \to (x, a)$ і $(v_n, f(v_n)) \to (x, b)$. Тоді $f(x) = a$ і $f(x) = b$. Одержали суперечність. Аналогічно розглядається випадок, коли $x \in D^-(f)$.

Твердження 5. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функція, яка має властивість Юнґа і $x \in D^+(f)$ /$x \in D^-(f)$/. Тоді не існує правосторонньої $f(x+0)$ /лівосторонньої $f(x-0)$/ границі в точці x.*

Доведення. Нехай існує границя $f(x+0)$ і функція f має властивість Юнга. Оскільки $x \in D^+(f)$, то $f(x) \neq f(x+0)$. Покладемо $\varepsilon = \frac{|f(x)-f(x+0)|}{2}$, якщо $f(x+0)$ скінченне і $\varepsilon = 1$, якщо $f(x+0) = \infty$. Тоді існує $\delta > 0$, що $|f(t) - f(x)| > \varepsilon$ для $t \in (x, x+\delta)$. Оскільки функція f має властивість Юнга, то існує спадна послідовність (x_n), $x_n \to x$, така, що $f(x_n) \to f(x)$. Тоді існує номер N, такий, що $x_N \in (x, x+\delta)$ і $|f(x_N) - f(x)| < \varepsilon$. Одержали суперечність. Аналогічні міркування проводяться і у випадку $x \in D^-(f)$.

Твердження 6. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функція, $x \in D^+(f)$ /$x \in D^-(f)$/ і виконується одна із наступних умов:*

1) f розширювана;
2) f S-неперервна;
3) f зв'язна;
4) f має зв'язний графік;
5) f має властивість Дарбу;
6) f має досконалий шлях;
7) f майже неперервна;
8) f двосторонньо квазінеперервна;
9) f має властивість Ґібсона.

Тоді не існує правосторонньої $f(x+0)$ /лівосторонньої $f(x-0)$/ границі в точці x.

Доведення. Якщо функція f задовольняє одну із умов 1) - 6), то згідно з імплікаціями $(*)$ вона має властивість Юнґа. Якщо ж функція f задовольняє умови 7) - 9), то згідно з твердженнями 1 - 3 вона має властивість Юнґа. Тому, в усіх випадках, згідно з твердженням 5 не існує правосторонньої /лівосторонньої/ границі $f(x+0)$ /$f(x-0)$/ в точці x.

Твердження 7. *Нехай функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ графічно неперервна і $x\in D(f)$. Тоді границя зліва чи справа існує та скінченна, або її не існує. Якщо ж існують скінченні границі $f(x+0)\in\mathbb{R}$ та $f(x-0)\in\mathbb{R}$, то $f(x+0)=f(x-0)$.*

Доведення. Нехай $f(x+0)=\infty$ чи $f(x-0)=\infty$. Припустимо, що $f(x+0)=\infty$. Оскільки функція f графічно неперервна, то існує неперервна функція $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, така, що $Gr(g)\subseteq\overline{Gr(f)}$. З того, що функція g неперервна в точці x випливає, що існує скінченна границя $g(x+0)$, яка рівна $g(x)$. Розглянемо множину $G=(x,x+\frac{1}{n})\times(g(x)-\frac{1}{n},g(x)+\frac{1}{n})$. Візьмемо довільну точку $a\in(x,x+\frac{1}{n})$. Оскільки $(a,g(a))\in Gr(g)\subseteq\overline{Gr(f)}$ і множина G є околом точки $(a,g(a))$, то $G\cap Gr(f)\neq\varnothing$. Тому існує точка $(x_n,f(x_n))$ графіка функції f, така, що $(x_n,f(x_n))\in G$. Таким чином, послідовність (x_n) збігається до x, причому $x_n>x$, і $f(x_n)\to g(x)$. А це суперечить тому, що $f(x+0)=\infty$.

Нехай тепер $f(x+0)\in\mathbb{R}$ та $f(x-0)\in\mathbb{R}$ і $f(x+0)\neq f(x-0)$. Для визначенності будемо вважати, що $f(x+0)>f(x-0)$. Покладемо $\varepsilon=\frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$. Оскільки існують скінченні границі $f(x+0)$ та $f(x-0)$, то існує $\delta>0$, таке, що $|f(u)-f(x+0)|<\frac{\varepsilon}{3}$ для $u\in(x,x+\delta)$ і $|f(u)-f(x-0)|<\frac{\varepsilon}{3}$ для $u\in(x-\delta,x)$. Зауважимо, що $f(x+0)-\frac{\varepsilon}{2}=f(x-0)+\frac{\varepsilon}{2}$. Візьмемо точки $a\in(x-\delta,x)$, $b\in(x,x+\delta)$ і $c\in(f(x-0)+\frac{\varepsilon}{3},f(x+0)-\frac{\varepsilon}{3})\setminus\{f(x)\}$. Розглянемо множину $L=(\{a\}\times[c,+\infty))\cup([a,b]\times\{c\})\cup(\{b\}\times(-\infty,c])$. Зрозуміло, що $L\cap\overline{Gr(f)}=\varnothing$. Розглянемо відкриті непорожні диз'юнктні множини $W_1=((-\infty,a)\times\mathbb{R})\cup([a,b)\times(-\infty,c])$ і $W_2=((a,b]\times(c,+\infty))\cup((b,+\infty)\times\mathbb{R})$. Тоді $\overline{Gr(f)}\subseteq W_1\sqcup W_2$. З графічної неперервності функції f випливає, що існує неперервна функція $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, така, що $Gr(g)\subseteq\overline{Gr(f)}$. Зрозуміло, що $Gr(g)\subseteq W_1\sqcup W_2$, $Gr(g)\cap W_1\neq\varnothing$ і $Gr(g)\cap W_2\neq\varnothing$. Це суперечить тому, що графік неперервної функції не є зв'язною множиною в $\mathbb{R}^2$.

4. Основні результати. В цьому пункті ми встановимо разом із вже відомими результатами нові декомпозиційні теореми і теореми про неперервність монотонних функцій.

Кажуть [16], що $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – *регульована функція*, якщо існують скінченні правосторонні та лівосторонні границі функції f в кожній точці.

Теорема 1. *Функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли вона регульована і має властивість Юнґа.*

Доведення. Необхідність є очевидною. Встановимо достатність. Будемо міркувати від супротивного. Нехай функція f розривна в деякій точці x. Тоді $x\in D^-(f)$ або $x\in D^+(f)$. Нехай $x\in D^+(f)$. Згідно з твердженням 5 для функції f в точці x не існує границі справа. А це суперечить регульваності функція f.

Наслідок 1. *Нехай $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – монотонна функція, яка має властивість Юнґа. Тоді функція f неперервна.*

Доведення. Оскільки монотонна функція є регульованою, то згідно з теоремою 1 функція f неперервна.

Зауважимо, що регульована (а тим більше монотонна) функція, яка задовольняє одну з умов 1) - 9) твердження 6, згідно з теоремою 1 є неперервною.

Теорема 2. *Нехай $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – монотонна і графічно неперервна функція. Тоді вона неперервна.*

Доведення. Нехай функція f розривна в точці x. Оскільки функція f монотонна, то існують скінченні границі $f(x-0)$ і $f(x+0)$. З графічної неперервності функції f і твердження 7 випливає, що $f(x-0)=f(x+0)$. Але тоді згідно з монотонністю f маємо, що $f(x-0)=f(x+0)=f(x)$. А це суперечить розривності функції f в точці x.

Теорема 3. *Функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли має замкнений графік і властивість Юнґа.*

Доведення. Необхідність є очевидною. Встановимо достатність. Будемо міркувати від супротивного. Нехай функція f розривна в деякій точці x. Тоді $x \in D^-(f)$ або $x \in D^+(f)$. Нехай $x \in D^+(f)$. Згідно з твердженням 5 для функції f в точці x не існує границі справа. А з твердження 4 випливає, що $f(x+0) = \infty$. Одержали суперечність.

З теореми 3 випливає, що коли функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має замкнений графік і задовольняє одну з умов 1) - 9) твердження 6, то вона є неперервною.

Теорема 4. *Регульована із замкненим графіком функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай x – точка розриву функції f і нехай $x \in D^+(f)$. Оскільки функція f регульована, то існує скінченна правостороння границя $f(x+0)$. З іншого боку, функція f має замкнений графік і тому $f(x+0) = \infty$. Одержали суперерчність.

Оскільки монотонна функція є регульованою, то одержуємо наступний наслідок.

Наслідок 2. *Монотонна із замкненим графіком функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною.*

Автор висловлює щиру вдячність Маслюченку Володимиру Кириловичу за цінні поради та постійну увагу до роботи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Jelinek J.* A discontinuous function with a connected closed graph // Acta Univ. Carol., Math. Phys. – 2003. – **44**, № 2. – P. 73-77.

2. *Baggs I.* Properties of functions with a closed graph // Topol. Appl., Proc. Conf. St. John's 1973. – 1975. – P. 125-131.

3. *Wojcik M.R.* Closed and connected graphs of functions; examples of connected punctiform spaces. – Rozprawa doktorska, Katowice. – 2008. – 40 p.

4. *Long P.E., McGehee E.E.* Properties of almost continuous functions // Proc. Am. Math. Soc. – 1970. – **24** – P. 175-180.

5. *S.-Y. T. Lin and Y.-F. Lin* On almost continuous mappings and Baire spaces // Canad. Math. Bull. – 1978. – **21**. – P. 183-186.

6. *Berner A.J.* Almost continuous functions with closed graphs // Can. Math. Bull. – 1982. – **25**. – P. 428-434.

7. *Grande Z., Natkaniec T.* On quasi-continuous bijections // Acta Math. Univ. Comen., New Ser. – 1991. – **60**, № 1. – P. 31-34.

8. *Doboš* Functions with a closed graph and bilateral quasicontinuity // Tatra Mt. Math. Publ. – 1993. – **2**. – P. 77-80.

9. *Pervin W.J., Levine N.* Connected mappings of Hausdorff spaces // Proc. Am. Math. Soc. – 1958 . – **9**. – P. 488-496.

10. *Gibson R.G., Natkaniec T.* Darboux like functions // Real Anal. Exch. – **22**, 2. – P. 492-533.

11. *Stallings J.* Fixed point theorem for connectivity maps // Fund. Math. – 1959. – **47.** – P. 249-263.

12. *Evans M.J., Humke P.D.* Baire one, Gibson and weakly Gibson real functions of several real variables // Rend. Circ. Mat. Palermo (2). – 2010. – **59**, № 1. – P. 47-51.

13. *Grande Z.* Sur les fonctions A-continues // Demonstr. Math. – 1978. – **11**. – P. 519-526.

14. *Husain T.* Almost continuous mappings // Pr. Mat. – 1966. – **10**. – P. 1-7.

15. *Maximoff I.* Sur les fonctions ayant la propriete de Darboux // Prace Mat.-Fiz. – 1936. – **43**. – P. 241-265.

16. *Berberian S. K.* Regulated functions: Bourbaki's alternative to the Riemann integral // Amer. Math. Monthly – 1979. – **86**. – P. 208–211.