УДК 517.956

©2012 р. О.В. Мартинюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У ЗЛІЧЕННО-НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ. III

Вивчаються властивості перетворення Бесселя узагальнених функцій типу розподілів, згорток, згортувачів та мультиплікаторів.

The properties of the Bessel transform of generalized functions of the distributions, folds and convolutions of multipliers are investigated.

Робота є продовженням одноіменних статей [1, 2], в яких побудовано та досліджено нові класи зліченно-нормованих просторів нескінченно диференційовних на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функцій, а також їх просторів-образів при відображенні Бесселя. Необхідність дослідження таких просторів зумовлена тим, що елементами цих просторів є, зокрема, фундаментальні розв'язки еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами, побудованими за допомогою інтегрального перетворення Бесселя та символів, які містять відомий клас функцій-символів, що задовольняють умову "параболічності".

Тут розглядаються топологічно спряжені простори, вивчаються властивості перетворення Бесселя узагальнених функцій, згорток, згортувачів та мультиплікаторів, а також оператора узагальненого зсуву аргументу, який діє в просторі основних функцій. У заключній (четвертій) частині роботи буде встановлена коректна розв'язність задачі Коші для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами як скінченного, так і нескінченного порядків. Простори, розглянуті в [1, 2] та даній роботі, є природним середовищем дослідження задачі Коші для вказаних еволюційних рівнянь. Такі рівняння містять відомі сингулярні рівняння параболічного типу.

Зазначимо, що тут ми зберігаємо позначення, введені в [1, 2]. Означення основних просторів $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, $\theta_{M,\rho}$ та обмеження на параметри β, γ, ν, M, ρ див. в [1].

Оператор узагальненого зсуву аргументу в просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$. Символом T^{ξ}_{x} позначимо оператор узагальненого зсуву аргументу, який відповідає оператору Бесселя [3]:

$$T^{\xi}_{x}\varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^{\pi} \varphi(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega})\times$$

$$\times \sin^{2\nu}\omega d\omega, \quad \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$, при цьому [3]

1) $|T^{\xi}_{x}\varphi(x)| \le T^{\xi}_{x}|\varphi(x)| \le \sup\limits_{x\in[0,\infty)} |\varphi(x)|$;

2) $T^{\xi}_{x} j_\nu(sx) = j_\nu(sx) j_\nu(s\xi)$, $\{x,\xi,s\} \subset (0,\infty)$;

3) якщо $f(x)$, $x \in [0,+\infty)$, – неперервна функція, для якої $\int\limits_0^{\infty} |f(x)| x^{2\nu+1} dx < \infty$, функція $g(x)$, $x \in [0,+\infty)$, – неперервна і обмежена на $[0,+\infty)$, то

$$\int\limits_0^{\infty} T^{\xi}_{x} f(x)\cdot g(x) x^{2\nu+1} dx = \int\limits_0^{\infty} f(x) T^{\xi}_{x} g(x) x^{2\nu+1} dx;$$

4) $T^{\xi}_{x} 1 = 1$, $T^{\xi}_{x} f(x) = T^{x}_{\xi} f(\xi)$, $T^{\xi}_{x} T^{\xi}_{z} f(\xi) = T^{z}_{x} T^{z}_{\xi} f(\xi)$;

5) $F_B[T^{\xi}_{x} f(x)](\sigma) = j_\nu(\sigma\xi) F_B[f](\sigma)$.

Будемо говорити, що оператор T^{ξ}_{x} визначений у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, якщо $T^{\xi}_{x}\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ для кожного $\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.

Лема 1. *У просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ визначений і неперервний оператор узагальненого зсуву аргументу T^{ξ}_{x}.*

Доведення. Внаслідок властивості 5) для довільної основної функції $\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ маємо, що

$$F_B^{-1}[T^{\xi}_{x}\varphi](\sigma) = j_\nu(\sigma\xi)F_B^{-1}[\varphi](\sigma) \equiv \Psi_\xi(\sigma).$$

Зазначимо, що при фіксованому ξ функція $j_\nu(\sigma\xi)$, як функція σ, є мультиплікатором у просторі $\theta_{M,\rho}$. Справді, із інтегрального зображення Пуассона функції j_ν випливають оцінки

$$|D^k_\sigma j_\nu(\sigma\xi)| \leq A_\nu|\xi|^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \{\sigma, \xi\} \subset \mathbb{R}.$$

Скориставшись тим, що опукла функція ρ [1] на нескінченності зростає швидше за довільну лінійну функцію знаходимо, що $j_\nu \cdot \psi \in \theta_{M,\rho}$ для довільної функції $\psi \in \theta_{M,\rho}$. Оскільки $F_B^{-1}[\varphi] \in \theta_{M,\rho}$, то $\Psi_\xi \in \theta_{M,\rho}$ при кожному ξ. Застосувавши перетворення Бесселя знайдемо, що $T^{\xi}_{x}\varphi = F_B[\Psi_\xi] \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ при кожному ξ, тобто вказаний оператор визначений у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.

Неперервність оператора T^{ξ}_{x} випливає з властивості неперервності операції прямого та оберненого перетворення Бесселя. Справді, якщо $\{\varphi, \varphi_k, k \geq 1\} \subset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, причому $\varphi_k \to \varphi$ при $k \to \infty$ у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, то

$$F_B^{-1}[T^{\xi}_{x}\varphi_k] = j_\nu(\sigma\xi)F_B^{-1}[\varphi_k](\sigma) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\to j_\nu(\sigma\xi)F_B^{-1}[\varphi](\sigma) = F_B^{-1}[T^{\xi}_{x}\varphi]$$

у просторі $\theta_{M,\rho}$. Застосувавши перетворення F_B знайдемо, що $T^{\xi}_{x}\varphi_k \to T^{\xi}_{x}\varphi$ при $k \to \infty$ у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.

Лема доведена.

Лема 2. *Операція узагальненого зсуву аргументу $\varphi \to T^{\xi}_{x}\varphi$ диференційовна у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.*

Доведення. Нехай, за означенням,

$$G_{\Delta\xi}(x) = \frac{1}{\Delta\xi}[T^{\xi+\Delta\xi}_{x}\varphi(x) - T^{\xi}_{x}\varphi(x)],$$

$$\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}, \{\xi, \Delta\xi, x\} \subset \mathbb{R}, \Delta\xi \neq 0.$$

Для доведення твердження досить встановити, що граничне співвідношення $G_{\Delta\xi} \to \dfrac{\partial}{\partial\xi}T^{\xi}_{x}\varphi$, $\Delta\xi \to 0$, справджується у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$. Урахувавши властивість неперервності перетворення Бесселя (прямого і оберненого) досить довести, що $F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}] \to F_B^{-1}\Big[\dfrac{\partial}{\partial\xi}T^{\xi}_{x}\varphi\Big]$ при $\Delta\xi \to 0$ у просторі $\theta_{M,\rho}$. Іншими словами, це означає, що:

1) сім'я функцій $\{F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}]$, $|\Delta\xi| \leq \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$ – фіксоване число$\}$ обмежена в просторі $\theta_{M,\rho}$, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \; \exists c = c(p) > 0 \; \forall \Delta\xi \neq 0, \; |\Delta\xi| \leq \varepsilon_0 :$$

$$\|F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}]\|_{p,a} \leq c$$

при деякому $a > 0$;

2) для довільного $k \in \mathbb{Z}_+$ сім'я функцій

$$\Big\{\gamma_{k,\Delta\xi}(\sigma) := D^{2k}_\sigma\Big(F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}](\sigma) -$$

$$- F_B^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial\xi}T^{\xi}_{x}\varphi\Big](\sigma)\Big), |\Delta\xi| \leq \varepsilon_0\Big\}$$

збігається до нуля при $\Delta\xi \to 0$ рівномірно по σ на кожному відрізку $[a, b] \subset (0, +\infty)$.

Доведемо, що умова 1) виконується. Урахувавши властивість 5) оператора T^{ξ}_{x} одержимо співвідношення:

$$F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}](\sigma) = \frac{1}{\Delta\xi}(F_B^{-1}[T^{\xi+\Delta\xi}_{x}\varphi](\sigma) -$$

$$- F_B^{-1}[T^{\xi}_{x}\varphi](\sigma)) =$$

$$= \frac{1}{\Delta\xi}(j_\nu(\sigma(\xi+\Delta\xi)) - j_\nu(\sigma\xi))F_B^{-1}[\varphi](\sigma) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\xi}j_\nu(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi))F_B^{-1}[\varphi](\sigma), 0 < \theta < 1.$$

Із інтегрального зображення Пуассона нормованої функції Бесселя випливає, що

$$\Big|D^l_\sigma\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}j_\nu(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi))\Big)\Big| \leq \tilde{c}_l|\sigma|, \quad 0 \leq l \leq 2k, \tag{1}$$

де $\tilde{c}_l = \tilde{c}_l(\xi)$ (ξ – фіксоване) і $\tilde{c}_l$ не залежить від $\Delta\xi$. Оскільки $F^{-1}[\varphi] \in \theta_{M,\rho}$, то при деякому $a > 0$ функція $F_B^{-1}[\varphi]$ задовольняє нерівності

$$|D^k_\sigma F_B^{-1}[\varphi](\sigma)| \leq c_k M^{-k}(\sigma)e^{-\rho(a\sigma)},$$

$$k \in \mathbb{Z}_+, \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{2}$$

Тоді для вказаного $a > 0$ з урахуванням (1), (2) знайдемо, що для фіксованого $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\Lambda(\sigma) := \exp\Big\{\rho\Big(a\Big(1-\frac{1}{p+2}\Big)\sigma\Big)\Big\}M^{2k}(\sigma)\times$$

$$\times\Big|\sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l D_\sigma^l \Big(\frac{\partial}{\partial\xi} j_\nu(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi))\Big)\times$$

$$\times D_\sigma^{2k-l} F_B^{-1}[\varphi](\sigma)\Big| \leq$$

$$\leq \exp\Big\{\rho\Big(a\Big(1-\frac{1}{p+2}\Big)\sigma\Big)-\rho(a\sigma)\Big\}\cdot|\sigma|\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l \tilde{c}_l\cdot M^l(\sigma) \leq \exp\Big\{\rho\Big(a\Big(1-\frac{1}{p+2}\Big)\sigma\Big)-$$

$$-\rho((a-\tilde{\beta})\sigma)\Big\}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l \tilde{c}_l \sigma M^l(\sigma)\exp\{-\rho(\tilde{\beta}\sigma)\}, \sigma > 0,$$

де $\tilde{\beta} \in \Big(0, \dfrac{a}{p+2}\Big)$, $\tilde{\beta}$ – фіксоване. Тут ми скористалися нерівністю опуклості для функції ρ [1], з якої випливає, що

$$-\rho(a\sigma) \leq -\rho((a-\tilde{\beta})\sigma) - \rho(\tilde{\beta}\sigma)$$

для вказаного параметра $\tilde{\beta}$. З цієї ж нерівності дістаємо також, що

$$\rho\Big(a\Big(1-\frac{1}{p+2}\Big)\sigma\Big) - \rho((a-\tilde{\beta})\sigma) \leq$$

$$\leq -\rho\Big(\Big(\frac{a}{p+2}-\tilde{\beta}\Big)\sigma\Big), \quad \frac{a}{p+2}-\tilde{\beta} > 0.$$

Із обмежень, накладених на функції ρ та M випливає також нерівність $\sigma M^l(\sigma)\exp\{-\rho(\tilde{\beta}\sigma)\} \leq d_l$, $\sigma > 0$. Тоді

$$\Lambda(\sigma) \leq \exp\Big\{-\rho\Big(\Big(\frac{a}{p+2}-\tilde{\beta}\Big)\sigma\Big)\Big\}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l \tilde{c}_l d_l \leq B_k, \quad \forall\sigma > 0,$$

де стала $B_k > 0$ не залежить від $\Delta\xi$. Зазначимо також, що $\Lambda(\sigma) \to \mathrm{const}$ при $\sigma \to +0$ (див. властивості функції $F_B^{-1}[\varphi] \in \theta_{M,\rho}$ [1]). Звідси вже випливає нерівність

$$\|F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}]\|_{p,a} \leq c, \quad p \in \mathbb{Z}_+, a > 0,$$

де $c > 0$ не залежить від $\Delta\xi$. Таким чином, сім'я функцій $\{F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}], |\Delta\xi| \leq \varepsilon_0\}$ умову 1) задовольняє.

Далі скористаємося такими відомими формулами [4]:

$$\frac{\partial}{\partial\xi} j_\nu(\sigma\xi) = c\xi\sigma^2 j_{\nu+1}(\sigma\xi),$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} j_\nu(\sigma\xi) = c\sigma\xi^2 j_{\nu+1}(\sigma\xi), \tag{3}$$

де стала c залежить лише від ν. Тоді

$$F_B^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial\xi} T_x^\xi\varphi\Big](\sigma) = \frac{\partial}{\partial\xi} F_B^{-1}[T_x^\xi\varphi](\sigma) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\xi} j_\nu(\sigma\xi) F_B^{-1}[\varphi](\sigma) =$$

$$= c\xi\sigma^2 j_{\nu+1}(\sigma\xi) F_B^{-1}[\varphi](\sigma),$$

$$F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}](\sigma) = \frac{\partial}{\partial\xi} j_\nu(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi)) F_B^{-1}[\varphi](\sigma) =$$

$$= c\xi\sigma^2 j_{\nu+1}(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi)) F_B^{-1}[\varphi](\sigma).$$

Знову скориставшись формулами (3) знайдемо, що

$$\gamma_{k,\Delta\xi}(\sigma) = c\xi D_\sigma^{2k}[\sigma^2(j_{\nu+1}(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi))-$$

$$-j_{\nu+1}(\sigma\xi))F_B^{-1}[\varphi](\sigma)] =$$

$$= cc_1\xi^2\theta\Delta\xi D_\sigma^{2k}[\sigma^4 j_{\nu+2}(\sigma(\xi+\theta_1\Delta\xi))\times$$

$$\times F_B^{-1}[\varphi](\sigma)], k \in \mathbb{Z}_+,$$

де стала $c_1 > 0$ залежить лише від ν, $0 < \theta_1 < 1$. Із властивостей нормованої функції Бесселя $j_{\nu+2}$ (див. інтегральне зображення Пуассона нормованої функції Бесселя) та функції $F_B^{-1}[\varphi]$ дістаємо, що при кожному фіксованому $k \in \mathbb{Z}_+$ функція

$$D_\sigma^{2k}[\sigma^4 \cdot j_{\nu+2}(\sigma(\xi+\theta_1\Delta\xi)) F_B^{-1}[\varphi](\sigma)]$$

є обмеженою деякою сталою $c = c(k,\nu,\xi) > 0$ (не залежною від $\Delta\xi$), якщо $\sigma \in [a,b] \subset (0,\infty)$. Отже, $\gamma_{k,\Delta\xi} \to 0$ при $\Delta\xi \to 0$ рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset (0,\infty)$. Таким чином, умова 2) також виконується.

Лема доведена.

Наслідок 1. *Операція узагальненого зсуву аргументу нескінченно диференційовна в просторі* $\Phi_{\beta,\gamma}^\nu$.

Для доведення цього твердження досить скористатися лемою 2 та методом математичної індукції.

Слідуючи [4], згортку двох функцій з простору $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ визначимо формулою

$$(\varphi * \psi)(x) = \int\limits_0^\infty T_x^\xi \varphi(x)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi,$$

$$\{\varphi,\psi\} \subset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}.$$

Із властивостей оператора T_x^ξ випливає, що функція $\varphi * \psi$ є інтегровною на $[0,\infty)$ з вагою $x^{2\nu+1}$. Справді, оскільки існує інтеграл

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty |\varphi(\eta)\psi(\xi)|\eta^{2\nu+1}\xi^{2\nu+1}d\eta d\xi,$$

то існує подвійний інтеграл

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty T_x^\xi \varphi(x)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}x^{2\nu+1}d\xi dx. \quad (4)$$

На підставі (4) твердимо, що існує інтеграл

$$\int\limits_0^\infty (\varphi * \psi)(x) j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx.$$

Із [1] випливає, що $\tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi} \in \theta_{M,\rho}$ для довільних двох функцій $\{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\} \subset \theta_{M,\rho}$. Оскільки $\tilde{\varphi} = F_B^{-1}[\varphi]$, $\tilde{\psi} = F_B^{-1}[\psi]$, де $\{\varphi,\psi\} \subset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, то маємо співвідношення $F_B^{-1}[\varphi]\cdot F_B^{-1}[\psi] \in \theta_{M,\rho}$. З іншого боку,

$$F_B^{-1}[\varphi]\cdot F_B^{-1}[\psi] = c_\nu \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx \times$$

$$\times c_\nu \int\limits_0^\infty \psi(\xi) j_\nu(\sigma \xi)\xi^{2\nu+1}d\xi =$$

$$= c_\nu^2 \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma\xi) j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx \right) \times$$

$$\times \psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi =$$

$$= c_\nu^2 \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty \varphi(x) T_x^\xi j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx \right) \times$$

$$\times \psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi =$$

$$= c_\nu^2 \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx \right) \times$$

$$\times \psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi =$$

$$= c_\nu^2 \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty T_x^\xi \varphi(x)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi \right) \times$$

$$\times j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx = c_\nu F_B^{-1}[\varphi * \psi](\sigma).$$

Застосувавши перетворення Бесселя знайдемо, що

$$\varphi * \psi = c_\nu^{-1} F_B[F_B^{-1}[\varphi]\cdot F_B^{-1}[\psi]].$$

Отже, $\varphi * \psi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, якщо $\{\varphi,\psi\} \subset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.

Простір узагальнених функцій $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$. Перетворення Бесселя узагальнених функцій з простору $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$. Символом $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називатимемо лінійні неперервні функціонали, дія яких на основні функції $\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ визначається формулою

$$\langle f,\varphi\rangle = \int\limits_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx.$$

Кожна локально інтегровна парна на $\mathbb{R}$ функція f, яка задовольняє умову

$$\exists c>0\ \exists s\in(0,[\beta^{-1}[\gamma]])\ \forall x\in\mathbb{R}:$$

$$|f(x)| \le c(1+|x|)^s, \quad (5)$$

породжує регулярну узагальнену функцію $F_f \in (\Phi^{\nu}_{\gamma,\beta})'$:

$$\langle F_f,\varphi\rangle = \int\limits_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx, \quad \forall\varphi\in\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}.$$

тобто простір $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ вкладається в $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$. З леми дю Буа Раймона випливає, що кожна регулярна узагальнена функція з $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ визначається однією (з точністю до значень на множині міри нуль) локально інтегровною парною на $\mathbb{R}$ функцією, яка задовольняє умову (5). З властивостей інтеграла Лебега випливає, що вкладення $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma} \ni f \to F_f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ є неперервним.

Оскільки $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma} = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p}$, причому вкладення $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p+1} \subset \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, неперервні, щільні й компактні [2], то

$$(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})' = (\lim_{p\to\infty} \operatorname{pr} \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p})' = \lim_{p\to\infty} \operatorname{ind}(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p})'.$$

Отже, якщо $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$, то $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p})'$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$, при цьому

$$|\langle f, \varphi\rangle| \le c\|\varphi\|_p, \quad \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma},$$

де $c = \|f\|_p$ – норма функціоналу f у просторі $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p})'$. Найменше з таких p називається порядком f, тобто кожна узагальнена функція $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ має скінченний порядок. Зазначимо також, що правильними є вкладення

$$(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,0})' \subset (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,1})' \subset \cdots \subset (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p})' \subset \ldots,$$

причому кожне вкладення $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p})' \subset (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p+1})'$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервним і компактним. Із загальної теореми про повноту простору, спряженого до зліченно-нормованого простору [5] дістаємо, що простір $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ – повний відносно слабкої збіжності.

Оскільки в просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T^{\xi}_{x}\varphi(x)\rangle \equiv \langle f_\xi, T^{x}_{\xi}\varphi(\xi)\rangle,$$

$$\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma},$$

при цьому $f * \varphi$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією (згідно з наслідком 1 операція узагальненого зсуву аргументу нескінченно диференційовна в просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$; звідси та з властивості неперервності функціоналу f випливає, що $f * \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ для довільної основної функції φ).

У просторі узагальнених функцій $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ можна також ввести операцію $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})' \ni f \to T^{\xi}_{x} f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ так: для довільної узагальненої функції $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ визначимо узагальнену функцію $T^{\xi}_{x} f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ за допомогою співвідношення:

$$\langle T^{\xi}_{x} f, \varphi\rangle = \langle f, T^{\xi}_{x}\varphi(x)\rangle, \quad \forall \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}.$$

Із властивості неперервності операції T^{ξ}_{x} в основному просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ випливає неперервність вказаної операції у просторі $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$. Аналогічно, за довільною узагальненою функцією $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ визначається узагальнена функція $T^{x}_{\xi} f$:

$$\langle T^{x}_{\xi} f, \varphi\rangle = \langle f, T^{x}_{\xi}\varphi(\xi)\rangle, \quad \forall \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}.$$

Оскільки $T^{x}_{\xi}\varphi(\xi) = T^{\xi}_{x}\varphi(x)$, то звідси дістаємо, що $T^{\xi}_{x} f = T^{x}_{\xi} f$, $\forall f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$. Отже,

$$\langle T^{\xi}_{x} f, \varphi\rangle = f * \varphi, \quad \forall \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}.$$

Нехай $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$. Якщо $f * \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, $\forall \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$. Оскільки $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ – досконалий простір із диференційовною операцією узагальненого зсуву аргументу, то із результатів, одержаних у [5], випливає, що кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$. Відзначимо, що фінітні узагальнені функції утворюють досить широкий клас; зокрема, довільна обмежена замкнена множина є носієм узагальненої функції з $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ [6]. Тут символом $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R})$ позначено простір усіх нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій з топологією, яка визначається сім'єю півнорм

$$p_{\mathbb{K},\alpha}(\varphi) = \max_{x\in\mathbb{K}} |D^{\alpha}_{x}\varphi(x)|, \quad \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}),$$

де $\mathbb{K}$ – компакт в $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$. Відомо, що $\mathcal{E}'$ збігається з сукупністю узагальнених функцій з простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, які мають компактний носій.

Оскільки $F_B[\varphi] \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, якщо $\varphi \in \theta_{M,\rho}$, то перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F_B[f], \varphi\rangle = \langle f, F_B[\varphi]\rangle, \quad \forall \varphi \in \theta_{M,\rho}.$$

Звідси, з властивості лінійності і неперервності функціоналу f та перетворення Бесселя випливає лінійність і неперервність функціоналу $F_B[f]$, заданого на просторі $\theta_{M,\rho}$. Отже, $F_B[f] \in \theta'_{M,\rho}$.

Теорема 1. *Якщо узагальнена функція $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ – згортувач у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, то для довільної функції $\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ правильною є формула*

$$F_B[f * \varphi] = F_B[f] \cdot F_B[\varphi].$$

Доведення. Згідно з умовою теореми $f * \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma} \subset (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$. Тоді, скориставшись означенням перетворення Бесселя (прямого і оберненого), а також означенням згортки узагальненої функції з основною, запишемо співвідношення

$$\forall \psi \in \theta_{M,\rho}: \ \ \langle F_B[f * \varphi], \psi\rangle = \langle f * \varphi, F_B[\psi]\rangle =$$

$$= \int_0^{\infty} (f * \varphi)(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x)\rangle F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \Big\langle f_\xi, \int_0^{\infty} T_x^\xi \varphi(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx \Big\rangle \tag{6}$$

(зазначимо, що остання рівність записана, поки-що, формально).

Нехай

$$J(\xi) := \int_0^{\infty} T_x^\xi \varphi(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx.$$

Тоді

$$J(\xi) = \int_0^{\infty} T_x^\xi \varphi(x) \Big(\int_0^{\infty} \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma \Big) \times$$

$$\times x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \Big(\int_0^{\infty} T_x^\xi \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \Big) \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= \int_0^{\infty} \Big(\int_0^{\infty} \varphi(x) T_x^\xi j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \Big) \times$$

$$\times \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= \int_0^{\infty} \Big(\int_0^{\infty} \varphi(x) j_\nu(\sigma \xi) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \Big) \times$$

$$\times \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= \int_0^{\infty} \psi(\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} \times$$

$$\times \Big(\int_0^{\infty} \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \Big) d\sigma =$$

$$= \int_0^{\infty} \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi](\xi).$$

Тут ми скористалися теоремою Фубіні, врахувавши, що збіжним є інтеграл

$$\int_0^{\infty} \Big(\int_0^{\infty} |\psi(\sigma)\varphi(x) j_\nu(\sigma x) j_\nu(\sigma\xi)| \sigma^{2\nu+1} x^{2\nu+1} d\sigma \Big) dx.$$

Отже,

$$\langle F_B[f * \varphi], \psi\rangle = \langle f, F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi]\rangle =$$

$$= \langle F_B[f], F_B[\varphi] \cdot \psi\rangle =$$

$$= \langle F_B[f] \cdot F_B[\varphi], \psi\rangle, \quad \forall \psi \in \theta_{M,\rho}.$$

Обґрунтуємо коректність проведених в (6) перетворень. Для цього введемо позначення:

$$\Lambda_r(\xi) := \int_0^{r} \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, r > 0.$$

Для доведення (6) досить показати, що $\Lambda_r(\xi) \to J(\xi)$ при $r \to +\infty$ у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, тобто $\alpha_r(\xi) := J(\xi) - \Lambda_r(\xi) \to 0$ при $r \to +\infty$ за топологією простору $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$. Це означає, що:

1) сім'я функцій $\{\alpha_r, r \geq 1\}$ обмежена в $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c = c(p) > 0 \ \forall r > 0 : \ \ \|\alpha_r\|_p \leq c;$$

2) для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$ сім'я функцій $\{D^{2m}_{\xi}\alpha_r, r > 0\}$ збігається до нуля при $r \to +\infty$ рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset [0,+\infty)$.

Доведемо 1). Для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$ маємо, що

$$D^{2m}_{\xi}J(\xi) = \int\limits_0^{\infty} \psi(\sigma)F_B[\varphi](\sigma)D^{2m}_{\xi}j_{\nu}(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1}d\sigma. \tag{7}$$

Диференціювання тут по ξ під знаком інтеграла можливе, оскільки вказаний інтеграл є рівномірно збіжним відносно параметра ξ. Справді, із інтегрального зображення Пуассона нормованої функції Бесселя випливає нерівність

$$|D^{2m}_{\xi}j_{\nu}(\sigma\xi)| \leq 2A_{\nu}\sigma^{2m}, \sigma \geq 0, \xi \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $\psi \cdot F_B[\varphi] \in \theta_{M,\rho}$, то звідси та з останньої нерівності дістаємо, що інтеграл (7) є рівномірно збіжним по параметру ξ. Із рівномірної збіжності (по ξ) інтеграла (7) випливає рівномірна збіжність інтегралів (по ξ)

$$D^{2m}_{\xi}\alpha_r(\xi) = \int\limits_r^{\infty} \psi(\sigma)F_B[\varphi](\sigma)D^{2m}_{\xi}j_{\nu}(\sigma\xi)\times$$
$$\times\sigma^{2\nu+1}d\sigma,$$

$$D^{2m}_{\xi}\Lambda_r(\xi) = \int\limits_0^{r} \psi(\xi)F_B[\varphi](\sigma)D^{2m}_{\xi}j_{\nu}(\sigma\xi)\times$$
$$\times\sigma^{2\nu+1}d\sigma, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Зазначимо, що

$$D^{2m}_{\xi}\alpha_r(\xi) = D^{2m}_{\xi}J(\xi) - D^{2m}_{\xi}\Lambda_r(\xi), m \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$|D^{2m}_{\xi}\alpha_r(\xi)| \leq |D^{2m}_{\xi}J(\xi)| + |D^{2m}_{\xi}\Lambda_r(\xi)|.$$

Розглянемо функції

$$D^{2m}_{\xi}\Lambda_{r,+}(\xi) = \max(D^{2m}_{\xi}\Lambda_r(\xi), 0),$$

$$D^{2m}_{\xi}\Lambda_{r,-}(\xi) = -\min(D^{2m}_{\xi}\Lambda_r(\xi), 0),$$

які є невід'ємними і врахуємо те, що

$$|D^{2m}_{\xi}\Lambda_r(\xi)| = D^{2m}_{\xi}\Lambda_{r,+}(\xi)+$$
$$+D^{2m}_{\xi}\Lambda_{r,-}(\xi) \leq 2|D^{2m}_{\xi}J(\xi)|.$$

Отже,

$$|D^{2m}_{\xi}\alpha_r(\xi)| \leq 3|D^{2m}_{\xi}J(\xi)| =$$
$$= 3|D^{2m}_{\xi}(F_B[F_B[\varphi]\cdot\psi](\xi))|, \quad \forall r > 0.$$

Оскільки $D^{2m}_{\xi}(F_B[F_B[\varphi]\cdot\psi]) \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, якщо $\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, $\psi \in \theta_{M,\rho}$, то

$$\Lambda(\xi)^{\tilde{\omega}_0+2m}|D^{2m}_{\xi}\alpha_r(\xi)| \leq 3\Lambda(\xi)^{\tilde{\omega}_0+2m}\times$$
$$\times|D^{2m}_{\xi}(F_B[F_B[\varphi]\cdot\psi](\xi))| \leq c_m,$$
$$\forall\xi \in (0,\infty),$$

де стала $c_m > 0$ не залежить від r. Звідси дістаємо, що сім'я функцій $\{\alpha_r, r > 0\}$ обмежена в $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.

Властивість 2) випливає з рівномірної збіжності інтеграла (7) по ξ (рівномірної на кожному відрізку $[a,b] \subset [0,\infty)$), встановленої раніше, бо тоді

$$\int\limits_r^{+\infty} \psi(\sigma)F_B[\varphi](\sigma)D^{2m}_{\xi}j_{\nu}(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1}d\sigma \to 0$$

при $r \to +\infty$ рівномірно по $\xi \in [a,b] \subset [0,\infty)$ як залишок збіжного інтеграла.

Теорема доведена.

З доведеної теореми випливає також, що якщо функціонал $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ є згортувачем у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, то $F_B[f]$ – мультиплікатор у просторі $\theta_{M,\rho}$.

Наслідок 2. *Нехай узагальнена функція $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ задовольняє умови: 1) $F_B[f]$ – мультиплікатор у просторі $\theta_{M,\rho}$; 2) для довільної функції $\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ згортка $f * \varphi$ породжує регулярну узагальнену функцію з простору $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$. Тоді f – згортувач у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.*

Справді, урахувавши умови 1), 2), як і при доведенні теореми 1 встановлюємо, що

$$\forall\psi \in \theta_{M,\rho}: \ \ \langle F_B[f*\varphi],\psi\rangle = \langle f*\varphi, F_B[\psi]\rangle =$$

$$= \int\limits_0^\infty (f*\varphi)(x)F_B[\psi](x)x^{2\nu+1}dx =$$

$$= \langle F_B[f]\cdot F_B[\varphi],\psi\rangle,$$

тобто $F_B[f*\varphi] = F_B[f]\cdot F_B[\varphi]$, при цьому $\psi := F_B[f]\cdot F_B[\varphi] \in \theta_{M,\rho}$. Отже, $F_B^{-1}[f*\varphi] = c_\nu\psi$, або $f*\varphi = c_\nu F_B[\psi] \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$, що й потрібно було довести.

Символом $\theta'_{M,\rho}$ позначатимемо сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на $\theta_{M,\rho}$, зі слабкою збіжністю. Елементи простору $\theta'_{M,\rho}$ також називатимемо узагальненими функціями. Перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in \theta'_{M,\rho}$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F_B[f],\varphi\rangle = \langle f, F_B^{-1}[\varphi]\rangle, \quad \forall\varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}. \qquad (8)$$

Із (8) випливає, що $F_B[f] \in (\Phi^\nu_{\beta,\gamma})'$.

Теорема 2. *Якщо узагальнена функція $f \in \theta'_{M,\rho}$ – мультиплікатор у просторі $\theta_{M,\rho}$, то її перетворення Фур'є – згортувач у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$.*

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що

$$F_B[f]*\varphi = \langle F_B[f], T_x^\xi\varphi(x)\rangle =$$
$$= \langle f, F_B^{-1}[T_x^\xi\varphi(x)]\rangle, \forall\varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}.$$

Зазначимо також, що з умови теореми випливає, що функціонал fє регулярною узагальненою функцією. Оскільки

$$F_B^{-1}[T_x^\xi\varphi(x)] = j_\nu(\sigma\xi)F_B^{-1}[\varphi](\sigma),$$

то

$$F_B[f]*\varphi = \langle f, j_\nu(\sigma\xi)F_B^{-1}[\varphi](\sigma)\rangle =$$

$$= \int\limits_0^\infty f(\sigma)j_\nu(\sigma\xi)F_B^{-1}[\varphi](\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma =$$

$$= F_B[f\cdot F_B^{-1}[\varphi]].$$

Звідси випливає, що $F_B[f\cdot F_B^{-1}[\varphi]] \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$, бо $f\cdot F_B^{-1}[\varphi] \in \theta_{M,\rho}$ (тут враховано, що $F_B^{-1}[\varphi] \in \theta_{M,\rho}$, якщо $\varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$, а f – мультиплікатор у просторі $\theta_{M,\rho}$).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мартинюк О.В.* Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. I. / О.В. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. – Вип. 5. – С. 179-192.

2. *Мартинюк О.В.* Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. II. / О.В. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. – Вип. 6. – С..

3. *Левитан Б.И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б.И. Левитан // Успехи мат. наук. – 1951. – Т. 6, вып. 2. – С. 102 – 143.

4. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя / Я.И. Житомирский // Матем. сб. – 1955. – Т. 36, № 2. – С. 299-310.

5. *Гельфанд И.М.* Пространства основных и обобщенных функций / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

6. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / Василь Васильович Городецький. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.