УДК 519.217, 519.718

©2012 р. І.В. Малик

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ СІМ'Ї НАПІВМАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ ДО ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ

Сформульовано достатні умови слабкої збіжності сім'ї напівмарковських процесів до дифузійного процесу у серії з малим параметром $\varepsilon > 0, \varepsilon \to 0$ у термінах локальних характеристик напівмарковського процесу.

Sufficient conditions of weak convergence of the family of semi-Markov processes to a diffusion process in the series with a small parameter $\varepsilon > 0, \varepsilon \to 0$ in terms of local characteristics of the semi-Markov process are formulated.

Вступ. Задача слабкої збіжності напівмарковських процесів(НМП) розглядалася в багатьох роботах (див. наприклад [1, 2, 3, 4]). Дана проблема є важливою, оскільки НМП описують велику кількість реальних процесів, що зутрічаються при дослідженнях в економіці, фізиці і т.д. Основними відмінностями даної роботи від роботи [4] є наступні:

1. У роботі [4] при доведенні слабкої збіжності вимагається існування граничного компенсуючого оператора(КО); в даній роботі існування граничного КО випливає з обмеженості 1-го та 2-го моментів величини стрибка та розкладу функцій a^ε, B^ε та $b(\rho + \varepsilon u)$.

2. У роботі [4] досліджується збіжність НМП $\xi^\varepsilon(t)$ та її характеристики; в даній роботі, аналогічно [1], введено допоміжний двокомпонентний марковський процес $\xi^\varepsilon(t), \rho(t)$, що значно спрощує доведення слабкої збіжності.

3. У роботі [4] коефіцієнти граничного КО мають досить складний вигляд; в даній роботі коефіцієнти граничного КО записані більш просто, що гарантує більш оптимальне використання доведеного факту збіжності при моделюванні конкретних процесів.

Основна частина. Напівмарковський процес $\eta(t)$ в евклідовому просторі $R^d, d \geq 1$ породжується процесом марковського відновлення (ПМВ) (див., наприклад, [1])

$$(\eta_n, \tau_n), n \geq 0,$$

де $\eta_n \in R^d$ – значення напівмарковського процесу при $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$, $\tau_n \in R_+$ – моменти відновлення. Позначимо через $\theta_n := \tau_n - \tau_{n-1}, n > 0$ – час перебування в станах.

ПМВ визначається стохастичним ядром, яке задає умовні ймовірності величини стрибків та функції розподілу часів перебування у станах:

$$Q(u, dv, t) := P\{\Delta\eta_{n+1} \in dv, \theta_{n+1} \leq t | \eta_n = u\} =$$

$$= \Gamma(u, dv) F_u(t).$$

$$\Gamma(u, dv) := P\{\Delta\eta_{n+1} \in dv | \eta_n = u\},$$

$$\Delta\eta_{n+1} := \eta_{n+1} - \eta_n, u \in R^d, dv \in \mathcal{R}^d,$$

$$F_u(t) := P\{\theta_{n+1} \leq t | \eta_n = u\}$$

$$= P(\theta_u \leq t), t \geq 0.$$

Зауважимо, що має місце співвідношення

$$\eta(t) := \eta_{\nu(t)},$$

де $\nu(t) := \max_{n \geq 0}\{n : \tau_n < t\}$ – рахуючий процес.

Розглянемо напівмарковський процес $\eta(t)$ в схемі усереднення

$$\eta^\varepsilon(t) = \varepsilon\eta(t/\varepsilon). \quad (1)$$

В [1] доведено слабку збіжність процесу $\eta^\varepsilon(t) \Rightarrow \rho(t)$, де $\rho(t)$ є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = C(\rho(t)), \tag{2}$$

$$C(u) = a(u)b(u), a(u) := \int\limits_{R^d} v\Gamma(u, dv),$$

$$b(u) := (E\theta_u)^{-1}.$$

У даній роботі досліджується слабка збіжність процесу

$$\xi^\varepsilon(t) := \varepsilon\eta(t/\varepsilon^2) - \rho(t)/\varepsilon =$$

$$= \left(\varepsilon^2\eta\left(t/\varepsilon^2\right) - \rho(t)\right)/\varepsilon. \tag{3}$$

Згідно (3) отримаємо

$$\tau_n^\varepsilon = \varepsilon^2\tau_n, \theta_n^\varepsilon = \varepsilon^2\theta_n.$$

Введемо позначення

$$\begin{cases} \xi_n^\varepsilon := \xi(\tau_n^\varepsilon) = \varepsilon\eta(\tau_n) - \rho(\varepsilon^2\tau_n)/\varepsilon, \\ \rho_n^\varepsilon = \rho(\varepsilon^2\tau_n). \end{cases} \tag{4}$$

Теорема. Нехай виконуються умови:

У1: Рівномірна інтегровність(обмеженість часу перебування в стані):

$$\sup_{u\in R^d} \int_T^\infty \overline{F}_u(t)dt \to 0 \text{ при } T \to \infty.$$

У2: Для $\forall u \in R^d$ та $\forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0$ така, що

$$Ee^{-\varepsilon\theta_u} \leq 1 - K\varepsilon, \sup_{u\in R^d} D\theta_u < K < \infty;$$

С1: Обмеженість першого та другого моментів величини стрибка:

$$\int\limits_{R^d} |v|\Gamma_\varepsilon(u, dv) \leq K < \infty;$$

$$\int\limits_{R^d} |v^Tv|\Gamma_\varepsilon(u, dv) \leq K < \infty;$$

С2: Умови на ядро $\Gamma_\varepsilon(u, dv)$:

$$a^\varepsilon(z, u) := \int_{R^d} v\Gamma_\varepsilon(z + \varepsilon u, dv) =$$

$$= a(z) + \varepsilon a_1(z, u) + \varepsilon\delta_1^\varepsilon,$$

$$B^\varepsilon(z, u) := \int_{R^d} v^Tv\Gamma_\varepsilon(z + \varepsilon u, dv) =$$

$$B(z) + \delta_2^\varepsilon,$$

$$\delta_1^\varepsilon, \delta_2^\varepsilon \to 0, \varepsilon \to 0;$$

С3: Функція $b(u)$ задовольняє умову

$$b(\rho + \varepsilon u) = b(\rho) + \varepsilon\delta_3^\varepsilon, \delta_3^\varepsilon \to 0, \varepsilon \to 0.$$

С4: Збіжність початкових умов

$$\xi^\varepsilon(0) \Rightarrow \xi(0) \text{ при } \varepsilon \to 0$$

та

$$\sup_{\varepsilon>0} E|\xi^\varepsilon(0)| \leq K < +\infty.$$

Тоді має місце слабка збіжність

$$\xi^\varepsilon(t) \Rightarrow \xi^0(t), \varepsilon \to 0,$$

де $\xi^0(t)$ – дифузійний процес, що визначається генератором

$$\Gamma_t^0\varphi(u) = C_1(u, \rho(t))\varphi'(u) + \frac{1}{2}\widetilde{B}(\rho(t))\varphi''(u),$$

причому,

$$C_1(u, \rho(t)) = b(\rho(t))a_1(\rho(t), u),$$

$$\widetilde{B}(\rho(t)) = b(\rho(t))\sigma^2(\rho(t)),$$

$$\sigma^2(\rho(t)) = B(\rho(t)) - a^2(\rho(t)).$$

Доведення теореми. Доведення складається з двох кроків.

Крок 1. На першому кроці розв'яжемо задачу сингулярного збурення для генератора процесу $\xi^\varepsilon(t), t \geq 0, \varepsilon \to 0$.

Для цього розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = C(\rho(t)).$$

Йому відповідає оператор

$$\mathbf{C}\varphi(v) = C(v)\varphi'(v),$$

з напівгрупою

$$\mathbb{C}_t\varphi(v) = \varphi\left(v + \int_0^t C(\rho(s))ds\right).$$

Аналогічно, еволюційному рівнянню

$$\frac{d\rho^\varepsilon(t)}{dt} = -\varepsilon^{-1}C(\rho^\varepsilon(t))$$

відповідають оператор

$$\mathbf{C}^\varepsilon\varphi(u) = -\varepsilon^{-1}C(u)\varphi'(u),$$

та напівгрупа

$$\mathbb{C}_t^\varepsilon\varphi(u) = \varphi\left(u - \varepsilon^{-1}\int_0^t C(\rho(s))ds\right).$$

Лема 1. КО процесу $\xi^\varepsilon(t), \rho(t), t \geq 0$, де $\xi^\varepsilon(t)$ визначений в (3), $\rho(t)$ задовольняє (2), має вигляд

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u,v) = \varepsilon^{-2}b(v+\varepsilon u)\int_0^\infty F_{v+\varepsilon u}(ds)*$$

$$\int_{R^d}\left[\mathbb{C}_{\varepsilon^2 s}\mathbb{C}_{\varepsilon^2 s}^\varepsilon\Delta_{\varepsilon z}\varphi(u,v) - \varphi(u,v)\right]\Gamma_\varepsilon(v+\varepsilon u, dz),$$

де

$$\Delta_{\varepsilon z}\varphi(u,v) = \varphi(u+\varepsilon z, v).$$

Доведення. Згідно (3)

$$\xi_{n+1}^\varepsilon - \xi_n^\varepsilon = \varepsilon(\eta_{n+1}^\varepsilon - \eta_n^\varepsilon) - \varepsilon^{-1}(\rho_{n+1}^\varepsilon - \rho_n^\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon\Delta\eta_{n+1}^\varepsilon - \varepsilon^{-1}\Delta\rho_{n+1}^\varepsilon;\ \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^2\tau_n.$$

Тут

$$\Delta\rho_{n+1}^\varepsilon = \rho(\varepsilon^2\tau_{n+1}) - \rho(\varepsilon^2\tau_n) =$$

$$= \rho(\varepsilon^2\tau_n + \varepsilon^2\theta_{n+1}) - \rho(\varepsilon^2\tau_n) =$$

$$= \int_0^{\varepsilon^2\theta_{n+1}} C(\rho(\varepsilon^2\tau_n + h))dh.$$

Отже за умови $\rho_n^\varepsilon = v$ матимемо:

$$\varphi(u, \rho_{n+1}^\varepsilon) = \varphi(u, v + \Delta\rho_{n+1}^\varepsilon) =$$

$$= \mathbb{C}_{\varepsilon^2\theta_{n+1}}\varphi(u,v).$$

Аналогічно, розклавши ξ_{n+1}^ε, отримаємо

$$E[\varphi(\xi_{n+1}^\varepsilon, v)|\xi_n^\varepsilon = u] =$$

$$= E[\varphi(\xi_n^\varepsilon + \Delta\xi_{n+1}^\varepsilon, v)|\xi_n^\varepsilon = u] =$$

$$= E\left[\varphi\left(u + \varepsilon\Delta\eta_{n+1}^\varepsilon - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\varepsilon^{-1}\int_0^{\varepsilon^2\theta_{n+1}} C(\rho(\varepsilon^2\tau_n + h))dh, v\right)|\xi_n^\varepsilon = u\right] =$$

$$= \mathbb{C}_{\varepsilon^2\theta_{n+1}}^\varepsilon\Delta_{\varepsilon z}\varphi(u,v).$$

Остаточно маємо

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u,v) = \varepsilon^{-2}b(v+\varepsilon u)\int_0^\infty F_{v+\varepsilon u}(ds)*$$

$$\int_{R^d}\left[\mathbb{C}_{\varepsilon^2 s}\mathbb{C}_{\varepsilon^2 s}^\varepsilon\Delta_{\varepsilon z}\varphi(u,v) - \varphi(u,v)\right]\Gamma_\varepsilon(v+\varepsilon u, dz),$$

що і потрібно було довести.

Лема 1 доведена.

Лема 2. Нехай мають місце умови **У2, С1, С2, С3**. Тоді на тест-функціях $\varphi(u,v)$, що мають обмежені похідні будь-якого порядку, КО процесу $\xi^\varepsilon(t), \rho(t)$ має наступне асимптотичне представлення

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u,v) = \Gamma^0\varphi(u,v) + \widetilde{R}^\varepsilon\varphi(u,v), \tag{5}$$

де Γ^0 задається співвідношенням

$$\Gamma^0\varphi(u,v) = C_1(v,u)\varphi_u'(u,v) +$$

$$\frac{1}{2}\widetilde{B}(v)\varphi_u''(u,v) + C(v)\varphi_v'(u,v) \tag{6}$$

та

$$|\widetilde{R}^\varepsilon\varphi(u,v)| \to 0, \varepsilon \to 0, \varphi \in C^{3,2}(R^d \times R^d). \tag{7}$$

Доведення. Скористаємося формулою

$$(abc - 1) = (a-1) + (b-1) + (c-1) +$$

$$+(a-1)(b-1) + (c-1)(b-1) +$$

$$(a-1)(c-1) + (a-1)(b-1)(c-1). \tag{8}$$

Згідно леми 1 та алгебраїчної тотожності (8) маємо:

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u,v) = \varepsilon^{-2}b(v+\varepsilon u)\int_0^\infty F_{v+\varepsilon u}(ds)*$$

$$\int_{R^d}\left[(\mathbb{C}_{\varepsilon^2 s} - I)\varphi(u,v) + (\mathbb{C}_{\varepsilon^2 s}^\varepsilon - I)\varphi(u,v) + \right.$$

$$\left. + (\Delta_{\varepsilon z} - I)\varphi(u,v) + o(\varepsilon^2)\right]\Gamma_\varepsilon(v+\varepsilon u, dz) =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Скористаємося рівняннями для напівгруп [2]:

$$\mathbb{C}_{\varepsilon^2 s} - I = \mathbf{C}\int_0^{\varepsilon^2 s} \mathbb{C}_{\varepsilon^2 h} dh,$$

$$\mathbb{C}^{\varepsilon}_{\varepsilon^2 s} - I = \mathbf{C}^{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon^2 s} \mathbb{C}^{\varepsilon}_{\varepsilon^2 h} dh.$$

Тоді для доданка I_2, враховуючи властивості напівгруп та умову **С3**, маємо:

$$I_2 = \varepsilon^{-2} b(v+\varepsilon u)\int_0^{\infty} F_{v+\varepsilon u}(ds) *$$

$$\int_{R^d} \mathbf{C}\int_0^{\varepsilon^2 s} \mathbb{C}_{\varepsilon^2 h} dh \varphi(u,v)\Gamma_{\varepsilon}(v+\varepsilon u, dz) =$$

$$= b(v+\varepsilon u)\int_0^{\infty} F_{v+\varepsilon u}(ds)\int_{R^d} s\mathbf{C}\varphi(u,v) *$$

$$\Gamma_{\varepsilon}(v+\varepsilon u, dz) + o(\varepsilon) = C(v)\varphi'_v(u,v) + o(\varepsilon).$$

Аналогічно для $I_1 + I_3$ отримаємо

$$I_1 + I_3 = \varepsilon^{-2} b(v+\varepsilon u)\int_0^{\infty} F_{v+\varepsilon u}(ds) *$$

$$\int_{R^d} [(\mathbb{C}^{\varepsilon}_{\varepsilon^2 s} - I) + (\Delta_{\varepsilon z} - I)] *$$

$$\varphi(u,v)\Gamma_{\varepsilon}(v+\varepsilon u, dz) =$$

$$= C_1(v,u)\varphi'_u(u,v) + \frac{1}{2}\widetilde{B}(v)\varphi''_u(u,v) + o(\varepsilon).$$

З розкладу $(\mathbb{C}_{\varepsilon^2 s}\mathbb{C}^{\varepsilon}_{\varepsilon^2 s}\Delta_{\varepsilon z} - I)$ згідно (8) розглянуто доданки $(\mathbb{C}_{\varepsilon^2 s} - I)$ та $(\mathbb{C}^{\varepsilon}_{\varepsilon^2 s} - I) + (\Delta_{\varepsilon z} - I)$, за допомогою яких будується Γ^0. Неважко перевірити, що при виконанні **С1-С3** сума всіх інших доданків є $o(1)$ при $\varepsilon \to 0$.

Для знехтуючого члена $\widetilde{R}^{\varepsilon}\varphi(u,v)$ не будемо виписувати явний вигляд, оскільки він дуже громіздкий.

Лема 2 доведена.

Крок 2. На другому кроці доведемо слабку збіжність $\xi^{\varepsilon}(t)$. Для цього, згідно [4, 1], доведемо відносну компактність сім'ї процесів $\xi^{\varepsilon}(t), \rho(t), t \geq 0, \varepsilon \to 0$.

Введемо до розгляду наступні допоміжні процеси

$$\zeta^{\varepsilon}(t) := (\xi^{\varepsilon}(t), \rho(t)),$$

$$\varrho^{\varepsilon}(t) := \varphi(\zeta^{\varepsilon}(t)) + C_{\varphi} t.$$

Лема 3. Нехай виконуються умови теореми. Тоді $\xi^{\varepsilon}(t), t \geq 0, \varepsilon > 0$ – відносно компактна сім'я.

Для встановлення відносної компактності сім'ї ξ^{ε} згідно теореми 1.4.6 [2] достатньо показати субмартингальність випадкового процесу $\varrho^{\varepsilon}(t)$ для невід'ємної фінітної нескінчено диференційовної функції φ та деякої константи $C_{\varphi} \geq 0$.

Розглянемо спочатку два допоміжних твердження.

Лема 4. Нехай КО Γ^{ε} заданий (5). Тоді має місце нерівність:

$$|\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u,v)| \leq C_{\varphi} \tag{9}$$

для тест-функцій $\varphi \in C_0^{3,2}(R^{2d})$ простору фінітних обмежених неперервних функцій, що мають обмежені похідні до порядку 3 та 2 включно.

Для функції $\varphi_0(u,v) = \sqrt{1+u^2+v^2}$,

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi_0(u) \leq C_l\varphi_0(u), |u| \leq l, \tag{10}$$

де константа C_l залежить від функції φ_0, але не залежить від $\varepsilon > 0$.

Доведення. Скористаємося результатом леми 2:

$$|\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u,v)| = |\Gamma^0\varphi(u,v) + \widetilde{R}^{\varepsilon}\varphi(u,v)| \leq$$

$$\leq |\Gamma^0\varphi(u,v)| + |\widetilde{R}^{\varepsilon}\varphi(u,v)| \leq$$

$$\sup_{(u,v)\in R^{2d}} |b(v)a_1(v,u)\varphi'_u(u,v) +$$

$$+ C(v)\varphi'_v(u,v)| +$$

$$+ \sup_{(u,v)\in R^{2d}} \left|\frac{1}{2}\varphi''_u(u,v)\left(b(v)\widetilde{B}(v) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^{\infty} s^2 F_v(ds)C^2(v) - 2C(v)a(v)\right)\right| +$$

$$+ \sup_{(u,v)\in R^{2d}} |\widetilde{R}^{\varepsilon}\varphi(u,v)|$$

За означенням тест-функції φ маємо, що $\sup_{(u,v)\in R^{2d}} |\varphi'_u(u,v)| < K <$

∞, $\sup\limits_{(u,v)\in R^{2d}} |\varphi''_u(u,v)| < K < \infty$, $\sup\limits_{(u,v)\in R^{2d}} |\varphi'_v(u,v)| < K < \infty$, $\sup\limits_{(u,v)\in R^{2d}} |\varphi(u,v)| < K < \infty$. Для доведення леми залишилось скористатися умовою обмеженості першого та другого моментів **C1**, умовою розкладу **C2** та умовою **У2**, з якої випливає, що $|b(u)| < c < \infty$.

Тоді

$$|\Gamma^\varepsilon \varphi(u)| \le c\widetilde{K}\,(1+\varepsilon) < C_\varphi,$$

де стала $\widetilde{K} = \widetilde{K}(\varphi)$ – залежна лише від φ, $C_\varphi := 2c\widetilde{K}$.

Для доведення умови (10) достатньо нагадати властивості функції $\varphi_0(u) = \sqrt{1+u^2+v^2}$, а саме:

$$|(\varphi_0(u,v))'_u| \le 1 \le \varphi_0(u),$$

$$|(\varphi_0(u,v))''_{uv}| \le \varphi_0(u),$$

$$|(\varphi_0(u,v))'_v| \le 1 \le \varphi_0(u),$$

$$|(\varphi_0(u,v))''_v| \le \varphi_0(u),$$

Лема 4 доведена.

Лема 5 [3]. Нехай сім'я моментів відновлення $\theta_u, u \in R^d$, що мають функції розподілу F_u, задовольняє умови **У1**, **У2**.

Тоді має місце наступне співвідношення

$$P\left(\max_{0\le t\le T} \gamma^\varepsilon(t) \ge \delta\right) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

для будь-яких $\delta > 0$ та $T > 0$, де $\gamma^\varepsilon(t) := t - \tau^\varepsilon(t)$.

Доведення леми 3. Доведемо, що випадковий процес $\varrho^\varepsilon(t)$ є невід'ємним субмартингалом відносно потоку σ - алгебр $\Im^\varepsilon_t := \sigma\left(\tau^\varepsilon_+(s), s \le t\right)$, де $\tau^\varepsilon_+(t) = \tau^\varepsilon(t) + 1$:

$$E\left[\varrho^\varepsilon(t) - \varrho^\varepsilon(s)|\Im^\varepsilon_s\right] =$$

$$= E\left[\varphi(\zeta^\varepsilon(t)) - \varphi(\zeta^\varepsilon(s))|\Im^\varepsilon_s\right] + C_\varphi(t-s) =$$

$$= E\left[\int_s^t \Gamma^\varepsilon \varphi(\zeta^\varepsilon(u))du|\Im^\varepsilon_s\right] + C_\varphi(t-s) =$$

$$= E\left[\int_{\tau^\varepsilon_+(s)}^{\tau^\varepsilon_+(t)} (\Gamma^\varepsilon \varphi(\zeta^\varepsilon(u)) + C_\varphi)du|\Im^\varepsilon_s\right] +$$

$$+E\left[\left(\int_s^{\tau^\varepsilon_+(s)} + \int_{\tau^\varepsilon_+(t)}^t\right) \Gamma^\varepsilon \varphi(\zeta^\varepsilon(u))du|\Im^\varepsilon_s\right] +$$

$$+C(t - \tau^\varepsilon_+(t) - s + \tau^\varepsilon_+(s)).$$

За лемою 5 два останні доданки прямують до 0 при $\varepsilon \to 0$. Згідно леми 4

$$E\left[\int_{\tau^\varepsilon_+(s)}^{\tau^\varepsilon_+(t)} (\Gamma^\varepsilon \varphi(\xi^\varepsilon(u)) + C_\varphi)du|\Im^\varepsilon_s\right] \ge 0.$$

Вимірність процесу $\varrho^\varepsilon(t)$ відносно потоку $\Im^\varepsilon_t$ очевидна.

Таким чином, $(\varrho^\varepsilon(t), \Im^\varepsilon_t)$ – невід'ємний субмартингал.

Лема 3 доведена.

Доведення теореми. Згідно з лемою 3 $\zeta^\varepsilon(t), t \ge 0, \varepsilon > 0$ – відносно компактна сім'я. Для завершення доведення теореми залишилося показати, що граничний розподіл єдиний. Для цього достатньо довести, що сім'я $\zeta^\varepsilon(t)$ збігається до мартингала.

Введемо до розгляду випадкові процеси

$$\zeta^\varepsilon_+(t) := \zeta^\varepsilon(\tau^\varepsilon_+(t)), \zeta^\varepsilon_\tau(t) := \zeta^\varepsilon(\tau^\varepsilon(t)), t \ge 0,$$

де $\tau^\varepsilon_+(t) = \tau^\varepsilon(t) + 1$.

Розглянемо випадковий процес

$$\mu^\varepsilon_t := \varphi(\zeta^\varepsilon(t)) - \int_0^t \Gamma^0 \varphi(\zeta^\varepsilon(s))ds.$$

Тоді

$$E\mu^\varepsilon_t = E[\varphi(\zeta^\varepsilon(t)) - \varphi(\zeta^\varepsilon_+(t))] +$$

$$+E\left[\varphi(\zeta^\varepsilon_+(t)) - \int_0^{\tau^\varepsilon_+(t)} \Gamma^\varepsilon \varphi(\zeta^\varepsilon_+(s))ds\right] +$$

$$+E\left[\int_t^{\tau^\varepsilon_+(t)} \Gamma^\varepsilon \varphi(\zeta^\varepsilon_+(s))ds\right] +$$

$$+E\int_0^t \Gamma^\varepsilon[\varphi(\zeta^\varepsilon_+(s)) - \varphi(\zeta^\varepsilon(s))]ds +$$

$$+E\int_0^t [\Gamma^\varepsilon \varphi(\zeta^\varepsilon(s)) - \Gamma^0 \varphi(\zeta^\varepsilon(s))]ds.$$

Третій доданок за лемами 4 і 5 задовольняє співвідношення

$$E\int_t^{\tau^\varepsilon_+(t)} \Gamma^\varepsilon \varphi(\zeta^\varepsilon_\tau(s))ds \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Аналогічно доводиться збіжність до 0 першого та четвертого доданків завдяки неперервності $\varphi(u)$.

Останній доданок прямує до 0 за лемою 2, бо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u)=\Gamma^{0}\varphi(u),\varphi(u)\in C^{\infty}(R^{2d})$$

на тест-функціях $\varphi(u)$, що мають рівномірно обмежені похідні всіх порядків.

Другий доданок рівний

$$\vartheta_t^{\varepsilon}:=\varphi\left(\zeta_+^{\varepsilon}(t)\right)-\int\limits_0^{\tau_+^{\varepsilon}(t)}\Gamma^{\varepsilon}\varphi\left(\zeta_+^{\varepsilon}(s)\right)ds$$

і має мартингальну властивість згідно леми 6.1 в [1].

Скористаємося його мартингальною властивістю:

$$E\vartheta_t^{\varepsilon}=E\zeta^{\varepsilon}(0)=E\varphi(\zeta^{\varepsilon}(0)).$$

Остаточно маємо:

$$E\mu_t^{\varepsilon}=E\varphi(\zeta^{\varepsilon}(0))+r^{\varepsilon},$$

де $r^{\varepsilon}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Тепер з умови **C4** отримуємо:

$$E\mu_t=E\varphi(\zeta(0)),$$

тобто μ_t-мартингал.

Таким чином, всі умови слабкої збіжності виконані, а саме відносна компактність сім'ї процесів та мартингальність граничного процесу. Також за лемою 2 має місце збіжність КО до генератора дифузійного процесу, що гарантує виконання твердження теореми.

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Koroliuk V.S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. – Berlin: Springer, 2005. – 331 p.
2. Stroock D.W., Varadhan S.R.S. Multidimensional Diffusion Processes. – Berlin: Springer, 1997. – 338 p.
3. Самойленко І.В., Малик І.В. Збіжність напівмарковського і супровод- жуючого марковського процесу до марковського процесу // УМЖ. – 2010.– Т.62, №5, С. 674-681.
4. Свириденко М.Н. Об условиях сходимости семейства полумарковских процессов к марковскому процессу. – М.: Препринт МЫТИЩИ. – 1986. – 17 с.
5. Sviridenko M.N. Martingale characterization of limit distributions in the space of functions without discontinuities of second kind // Math. Notes. – 1998.– 43, No 5. – P. 398-402.