УДК 517.983

©2012 р. С.С. Лінчук, Ю.С. Лінчук, Ю.І. Симонович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДЕЯКИХ ОПЕРАТОРІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ З ОПЕРАТОРОМ ПОММ'Є

У просторах функцій, аналітичних у кругових областях, досліджені умови еквівалентності збурень операторів множення на незалежну змінну функціями від оператора Помм'є.

The conditions of equivalence perturbations of the operator of multiplication by the independent variable functions of the Pommiez operator in the spaces of functions analytic in the circular domains are established.

Через A_R, $0 < R \le \infty$, (відповідно $\overline{A}_R$, $0 \le R < \infty$,) позначимо простір усіх функцій, які аналітичні в крузі $|z| < R$ (відповідно в крузі $|z| \le R$), що наділений загальноприйнятою топологією [1]. Нехай Δ – оператор Помм'є, який лінійно та неперервно діє у цих просторах за правилом

$$(\Delta f)(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z} \text{ при } z \ne 0; \\ f'(0) \text{ при } z = 0. \end{cases}$$

У роботах [2]–[6] досліджені умови еквівалентності операторів скінченного порядку відносно оператора Помм'є у просторах функцій, аналітичних у відкритих областях. В цій статті вивчені умови еквівалентності операторів, пов'язаних з операторами Помм'є, у просторах функцій, аналітичних у відкритих та замкнених кругових областях. Для цього використовуються характеристичні функції лінійних неперервних операторів, що діють у цих просторах і побудовані за допомогою власних функцій оператора Помм'є.

Наведемо спочатку деякі допоміжні твердження. Нехай $0 < R \le \infty$ і $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ – деяка монотонно зростаюча до R послідовність додатних чисел. Нагадаємо, що функція $g(\lambda, z)$ називається локально аналітичною на множині $\overline{K}_{R^{-1}} \times K_R$ якщо:

1) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists N(n) \in \mathbb{N}$ таке, що $g(\lambda, z)$ є аналітичною на множині $K_{r^{-1}_{N(n)}} \times K_{r_n}$;

2) при $m > n$ функція $g(\lambda, z)$ набуває однакових значень на перерізі множин $K_{r^{-1}_{N(m)}} \times K_{r_m}$ та $K_{r^{-1}_{N(n)}} \times K_{r_n}$, тобто на множині $K_{r^{-1}_{N(m)}} \times K_{r_n}$.

Лема 1. *Нехай T – лінійний неперервний оператор, що діє у просторі A_R. Тоді його характеристична функція*

$$t(\lambda, z) = T\left(\frac{1}{1-\lambda z}\right) \tag{1}$$

локально аналітична на множині $\overline{K}_{R^{-1}} \times K_R$. При цьому для довільної функції $f \in A_R$ при $|z| < r_n$ виконується рівність

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{1}{\lambda} t(\lambda, z) f\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\lambda, \tag{2}$$

де $\gamma_n = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r^{-1}_{N(n)+1}\}$, а число $N(n)$ вибирається для $n \in \mathbb{N}$ за означенням локально аналітичної функції $t(\lambda, z)$.

Навпаки, для довільної локально аналітичної на множині $\overline{K}_{R^{-1}} \times K_R$ функції $t(\lambda, z)$ формулою (2) визначається лінійний неперервний оператор $T : A_R \to A_R$. При цьому функція $t(\lambda, z)$ є характеристичною функцією оператора T.

З леми 1 випливає, що формулами (1) та (2) встановлюється взаємно однозначна відповідність між лінійними неперервними операторами $T : A_R \to A_R$ та їхніми характеристичними функціями вигляду $t(\lambda, z) = T\left(\frac{1}{1-\lambda z}\right)$, які локально аналітичні на множині $\overline{K}_{R^{-1}} \times K_R$. Множину всіх лінійних неперервних операторів, що діють у просторі A_R, позначатимемо через $\mathcal{L}(A_R)$.

Зауваження 1. *Якщо через $\tilde{t}(\lambda, z) = T\left(\frac{1}{\lambda - z}\right)$ позначити характеристичну за*

Кете [1] функцію лінійного неперервного оператора $T : A_R \to A_R$, то при $|z| < r_n$ і $|\lambda| > r_{N(n)}$ виконується рівність

$$\tilde{t}(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k(z)}{\lambda^{k+1}}, \quad (3)$$

де $\varphi_k(z) = Tz^k$, $k = 0, 1, \ldots$. Оскільки на множині $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{r^{-1}_{N(n)}} \times K_{r_n}$ виконується рівність $t(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)\lambda^k$, то функція $\tilde{t}(\lambda, z)$ є аналогом перетворення Бореля функції $t(\lambda, z)$ по параметру λ.

Наведемо зв'язок між лінійними неперервними операторами $T : \overline{A}_R \to \overline{A}_R$ та їхніми характеристичними функціями виду $t(\lambda, z) = T\left(\frac{1}{1-\lambda z}\right)$. Зафіксуємо довільну послідовність додатних чисел $(\tilde{r}_n)_{n=1}^{\infty}$, яка монотонно спадаючи прямує до R, де $0 \le R < \infty$. Нехай $t(\lambda, z)$ є характеристичною функцією оператора $T : \overline{A}_R \to \overline{A}_R$. Тоді функція $t(\lambda, z)$ володіє властивістю: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists N(n) \in \mathbb{N}$ таке, що $t(\lambda, z)$ є аналітичною при $|\lambda| < \frac{1}{\tilde{r}_n}$ і $|z| < \tilde{r}_{N(n)}$. Таким чином, характеристична функція $t(\lambda, z)$ оператора $T : \overline{A}_R \to \overline{A}_R$ є локально аналітичною на множині $K_{R^{-1}} \times \overline{K}_R$.

Лема 2. *Нехай T – лінійний неперервний оператор, що діє у просторі $\overline{A}_R$. Тоді його характеристична функція $t(\lambda, z) = T\left(\frac{1}{1-\lambda z}\right)$ є локально аналітичною на множині $K_{R^{-1}} \times \overline{K}_R$. При цьому для довільної функції $f(z) \in \overline{A}_R$ при $|z| < r_{N(n)}$ виконується рівність*

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{1}{\lambda} t(\lambda, z) f\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\lambda, \quad (4)$$

де $\gamma_n = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \frac{1}{\tilde{r}_{n+1}}\}$, а число $N(n)$ вибирається для $n \in \mathbb{N}$ за означенням локально аналітичної функції $t(\lambda, z)$.

Навпаки, для довільної локально аналітичної на множині $K_{R^{-1}} \times \overline{K}_R$ функції $t(\lambda, z)$ формулою (4) визначається лінійний неперервний оператор $T : \overline{A}_R \to \overline{A}_R$. При цьому функція $t(\lambda, z)$ є характеристичною функцією оператора T.

Як відомо, [7] для того, щоб L був лінійним неперервним функціоналом на просторі A_R, необхідно і достатньо, щоб він зображався у вигляді

$$L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n l_n, \quad (5)$$

де $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in A_R$, а $(l_n)_{n=0}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел, яка задовольняє умову

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|l_n|} < R. \quad (6)$$

Позначимо через $l(z)$ функцію виду $l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n z^n$. Умова (6) рівносильна тому, що функція $l(z)$ належить до простору $\overline{A}_{\frac{1}{R}}$. Тому простір $\overline{A}_{\frac{1}{R}}$ є спряженим до $\overline{A}_R$.

Наведемо зв'язок між характеристичними функціями оператора T та спряженого до нього оператора T^*.

Лема 3. *Нехай T – лінійний неперервний оператор, який діє у просторі A_R, і $t(\lambda, z) = T\left(\frac{1}{1-\lambda z}\right)$ – його характеристична функція. Нехай $t^*(\lambda, z) = T^*\left(\frac{1}{1-\lambda z}\right)$ – характеристична функція спряженого оператора T^*, що діє у просторі $\overline{A}_{\frac{1}{R}}$. Тоді на множині $\mathcal{F}$ виконується рівність*

$$t(\lambda, z) = t^*(z, \lambda).$$

Зауважимо, що для доведення лем 1-3 використовується техніка, яка запропонована Кете в [1] при вивченні інтегрального зображення лінійних неперервних операторів, що діють у просторах аналітичних функцій. Нагадаємо, що формулою $c(\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Delta^n$, в якій функція $c(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ належить до простору $\overline{A}_{\frac{1}{R}}$, описується множина усіх лінійних неперервних операторів, які діють у просторі A_R і є переставними з оператором Помм'є [4]. Аналогічно описується комутант оператора Помм'є у просторі $\overline{A}_R$.

Вивчимо умови еквівалентності в просторі A_R оператора $U_z + c(\Delta)$ та оператора множення на незалежну змінну U_z, де $c(\Delta)$ – довільний оператор, який є функцією від оператора Помм'є і діє у просторі A_R.

Дослідимо спочатку розв'язки операторного рівняння виду

$$T(U_z + c(\Delta)) = U_z T \qquad (7)$$

в класі лінійних неперервних операторів $T \in \mathcal{L}(A_R)$, де $0 < R \leq \infty$. Нехай $c(\Delta)$ – функція від оператора Помм'є, причому $c(\Delta) \in \mathcal{L}(A_R)$. Припустимо, що оператор T з класу $\mathcal{L}(A_R)$ задовольняє рівність (7). Нехай $t(\lambda, z) = T\left(\frac{1}{1-\lambda z}\right)$ – характеристична функція оператора T. Візьмемо довільне натуральне число n і нехай $N(n)$ знайдене для n за означенням локально аналітичної на множині $\overline{K}_{R^{-1}} \times K_R$ функції $t(\lambda, z)$. Тоді при $z \in K_{r_n}$ і $\lambda \in K_{r^{-1}_{N(n)}} \backslash \{0\}$ маємо

$$(T(U_z + c(\Delta)))\left(\frac{1}{1-\lambda z}\right) = T\left(\frac{z + c(\lambda)}{1-\lambda z}\right) =$$

$$= T\left(\frac{\frac{1}{\lambda}(\lambda z - 1)}{1-\lambda z} + \frac{c(\lambda) + \frac{1}{\lambda}}{1-\lambda z}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\varphi(z) + \left(c(\lambda) + \frac{1}{\lambda}\right) t(\lambda, z),$$

де $\varphi(z)$ належить до простору A_R, причому $\varphi(z) = T1$. З іншого боку при таких самих z та λ отримуємо, що

$$(U_z T)\left(\frac{1}{1-\lambda z}\right) = z t(\lambda, z).$$

Тому з рівності (7) випливає, що

$$(\lambda c(\lambda) + 1 - \lambda z) t(\lambda, z) = \varphi(z) \qquad (8)$$

при $z \in K_{r_n}$ і $\lambda \in K_{r^{-1}_{N(n)}} \backslash \{0\}$.

Подальші дослідження здійснюються різними методами, в залежності від того, чи R є скінченним, або ж $R = \infty$.

Нехай спочатку $R < \infty$. Розглянемо два можливі випадки.

1° Нехай існують точки $z_0 \in K_R$ і $\lambda_0 \in \overline{K}_{R^{-1}}$ такі, що

$$\lambda_0 c(\lambda_0) + 1 - \lambda_0 z_0 = 0. \qquad (9)$$

Вважатимемо n настільки великим, щоб точка $z_0 \in K_{r_n}$. Оскільки функція $c(\lambda)$ є неперервною в точці λ_0 і виконується рівність (9), то існує окіл точки λ_0 виду $V_\delta(\lambda_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \delta\}$ такий, що $V_\delta(\lambda_0) \subset K_{r^{-1}_{N(n)}}$ і для довільного $\lambda \in V_\delta(\lambda_0)$ відповідна точка $z = \frac{\lambda c(\lambda)+1}{\lambda}$ належить множині K_{r_n}. Покладаючи в (8) $\lambda \in V_\delta(\lambda_0)$ і $z = \frac{\lambda c(\lambda)+1}{\lambda}$, одержимо, що $\varphi\left(\frac{\lambda c(\lambda)+1}{\lambda}\right) = 0$. Нехай $\mathcal{U} = g(V_\delta(\lambda_0))$, де $g(\lambda) = \frac{\lambda c(\lambda)+1}{\lambda}$. Оскільки функція $g(\lambda)$ відмінна від сталої і є аналітичною на множині $V_\delta(\lambda_0)$, то за принципом збереження області при відображенні за допомогою аналітичних функцій, множина $\mathcal{U}$ є околом точки z_0, причому $\mathcal{U} \subset K_{r_n}$. Тому $\varphi(z) = 0$ при $z \in \mathcal{U}$. За теоремою єдиності для аналітичних функцій звідси випливає, що $\varphi(z) \equiv 0$ в K_{r_n}. Таким чином, $\varphi(z) \equiv 0$ при $|z| < R$ і з рівності (8) випливає, що $t(\lambda, z) = 0$ при $z \in K_{r_n}$ і $\lambda \in K_{r^{-1}_{N(n)}}$. Відновлюючи оператор T за його характеристичною функцією одержуємо, що $T = 0$.

2° Нехай для довільної точки $z \in K_R$ і для довільної точки точки $\lambda \in \overline{K}_{R^{-1}}$ виконується умова

$$\lambda c(\lambda) + 1 - \lambda z \neq 0.$$

Тоді при $|\lambda| \leq \frac{1}{R}$ виконується нерівність $\left|\frac{\lambda c(\lambda)+1}{\lambda}\right| \geq R$. Звідси випливає, що $\lambda c(\lambda) + 1 \neq 0$ при $|\lambda| \leq \frac{1}{R}$ і

$$\left|\frac{\lambda}{1 + \lambda c(\lambda)}\right| \leq \frac{1}{R} \qquad (10)$$

при $|\lambda| \leq \frac{1}{R}$. За лемою Шварца з (10) випливає, що $\left|\frac{\lambda}{1+\lambda c(\lambda)}\right| \leq |\lambda|$ при $|\lambda| < \frac{1}{R}$. Таким чином,

$$\left|\frac{1}{1 + \lambda c(\lambda)}\right| \leq 1 \qquad (11)$$

при $|\lambda| < \frac{1}{R}$. За принципом максимума модуля з (11) одержуємо, що $c(\lambda) \equiv 0$ при $|\lambda| < \frac{1}{R}$.

Таким чином, у випадку $R < \infty$ операторне рівняння (7) в класі операторів $T \in \mathcal{L}(A_R)$ має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли $c(\Delta) = 0$. Звідси одержуємо наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай оператор $c(\Delta) \in \mathcal{L}(A_R)$, причому $R < \infty$. Для того, щоб оператор $U_z + c(\Delta)$ був еквівалентним у про-*

сторі A_R до оператора U_z необхідно і достатньо, щоб $c(\Delta) = 0$.

Нехай тепер $R = \infty$ і оператор T, який задовольняє рівність (7), є ненульовим. Тоді для досить великих n при $z \in K_{r_n}$ і $\lambda \in K_{r^{-1}_{N(n)}}$ виконується умова $\lambda c(\lambda) + 1 - \lambda z \neq 0$. Тому з (8) випливає, що

$$t(\lambda, z) = \frac{\varphi(z)}{\lambda c(\lambda) + 1 - \lambda z} \qquad (12)$$

при $z \in K_{r_n}$ і $\lambda \in K_{r^{-1}_{N(n)}}$. Навпаки, у випадку $R = \infty$ для довільної функції $\varphi(z) \in A_\infty$ і для довільної функції $c(\lambda) \in \overline{A}_0$ функція $t(\lambda, z)$, яка визначається формулою (12), є локально аналітичною на множині $\{0\} \times \mathbb{C}$ і є правильним наступне твердження.

Лема 4. *Нехай $c(\lambda) \in \overline{A}_0$. Для того, щоб оператор T належав до класу $\mathcal{L}(A_\infty)$ і задовольняв співвідношення* (7) *необхідно і достатньо, щоб його характеристична функція $t(\lambda, z)$ зображалася у вигляді* (12), *де $\varphi(z) \in A_\infty$.*

Дослідження умов еквівалентності операторів $U_z + c(\Delta)$ та U_z у просторі A_∞ зводиться до вивчення умов оборотності в просторі A_∞ оператора T, характеристична функція якого визначається формулою (12). Пізніше ми покажемо, що для довільної функції $c(\lambda) \in \overline{A}_0$ і $\varphi(z) \equiv 1$ відповідний оператор T є ізоморфізмом простору A_∞.

Для функції $\varphi(z)$ з простору A_R, $0 < R \leq \infty$, або з простору $\overline{A}_R$, $0 \leq R < \infty$, через U_φ позначатимемо оператор множення на функцію $\varphi(z)$, який лінійно і неперервно діє у відповідному просторі. За лемою 3 $\Delta^* = U_z$ і $U^*_\varphi = \varphi(\Delta)$. Скориставшись лемою 3 і теоремою 1, одержуємо наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $\varphi(z) \in \overline{A}_R$, причому $0 < R < \infty$. Для того, щоб оператор $\Delta + U_\varphi$ був еквівалентним у просторі $\overline{A}_R$ до оператора Δ необхідно і достатньо, щоб $\varphi(z) \equiv 0$.*

Вивчимо далі умови еквівалентності операторів $\Delta + U_\varphi$ та Δ у просторі $\overline{A}_0$. Скориставшись переходом до спряжених операторів і лемою 4, одержуємо, що є правильним наступне твердження.

Лема 5. *Нехай $\varphi(z) \in \overline{A}_0$. Для того, щоб оператор $T \in \mathcal{L}(\overline{A}_0)$ і задовольняв рівняння*

$$(\Delta + U_\varphi)T = T\Delta. \qquad (13)$$

необхідно і достатньо, щоб його характеристична функція $t(\lambda, z)$ зображалася формулою

$$t(\lambda, z) = \frac{\psi(\lambda)}{z\varphi(z) + 1 - \lambda z}, \qquad (14)$$

в якій $\psi(\lambda)$ – довільна ціла функція.

Зобразимо оператор T, характеристична функція якого подається у вигляді (14), в іншому вигляді. Розглянемо оператори: $(T_1 f)(z) = \frac{f(z)}{1+z\varphi(z)}$, $(T_2 f)(z) = f(\frac{z}{1+z\varphi(z)})$, $(T_3 f)(z) = (\psi(\Delta)f)(z)$. Оскільки $\varphi(z) \in \overline{A}_0$ і $\psi(\lambda) \in A_\infty$, то ці оператори належать до класу $\mathcal{L}(\overline{A}_0)$. Тоді $T = T_1 T_2 T_3$, оскільки характеристична функція оператора $T_1 T_2 T_3$ збігається з функцією $t(\lambda, z)$, яка визначається формулою (14).

Покажемо, що для довільної функції $\varphi(z)$ серед операторів T, характеристичні функції яких зображаються у вигляді (14), існує ізоморфізм простору $\overline{A}_0$. Візьмемо $\psi(\lambda) \equiv 1$. Тоді оператор $T_3 = E$, де E – одиничний оператор. Оскільки $\varphi(z) \in \overline{A}_0$, то оператор T_1 є ізоморфізмом простору $\overline{A}_0$. Ізоморфність оператора T_2 випливає з наступного твердження.

Лема 6. *Нехай функція $k(z)$ є аналітичною в точці $z_0 = 0$ і $k(0) = 0$. Для того, щоб оператор композиції K, який діє у просторі $\overline{A}_0$ за правилом $(Kf)(z) = f(k(z))$, був ізоморфізмом простору $\overline{A}_0$, необхідно і достатньо, щоб $k'(0) \neq 0$.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що оператор K є ізоморфізмом простору $\overline{A}_0$. Тоді для функції $g(z) = z$ існує функція $f(z)$ з простору $\overline{A}_0$, для якої $(Kf)(z) = g(z)$. Тому в деякому околі точки $z_0 = 0$ виконується рівність $f(k(z)) = z$. Тоді $f'(k(0))k'(0) = 1$ і тому $k'(0) \neq 0$.

Достатність. Нехай $k'(0) \neq 0$. За локальним критерієм однолистості для аналітичних функцій існує окіл $V_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \delta\}$ точки $z_0 = 0$, в якому функція $k(z)$ є однолистою. Нехай $G = k(V_\delta)$. Оскільки функція $k(z)$ відмінна від сталої, то за принципом збереження області при відображенні за допомогою аналітичних функцій, множина G є областю в $\mathbb{C}$, що містить початок координат. При цьому обернена функція $k^{-1}(w)$ є аналітичною в області G і відображає G на V_δ. Нехай $G_\mu = \{w \in \mathbb{C} : |w| < \mu\}$ – це деякий круг з центром в початку координат, який міститься в G. Тоді $k^{-1}(w)$ є аналітичною в G_μ і формулою $(\tilde{K}f)(z) = f(k^{-1}(z))$ визначається лінійний неперервний оператор $\tilde{K}$, який діє у просторі $\overline{A}_0$. Оскільки $K\tilde{K} = \tilde{K}K = E$, де E – одиничний оператор, то оператор K є ізоморфізмом простору $\overline{A}_0$.

Таким чином, оператор T є також ізоморфізмом простору $\overline{A}_0$, як добуток ізоморфізмів цього простору. Тому є правильною наступна теорема.

Теорема 3. *Для довільної функції $\varphi(z)$ з простору $\overline{A}_0$ оператор $\Delta + U_\varphi$ еквівалентний у просторі $\overline{A}_0$ до оператора Δ.*

Використовуючи транзитивність відношення еквівалентності операторів звідси одержуємо наслідок.

Наслідок 1. *Нехай φ_1 і φ_2 – довільні функції з простору $\overline{A}_0$. Тоді оператори $\Delta + U_{\varphi_1}$ та $\Delta + U_{\varphi_2}$ еквівалентні у просторі $\overline{A}_0$.*

За допомогою переходу до спряжених операторів та з використанням цих тверджень одержуємо також умови еквівалентності наступних операторів у просторі цілих функцій.

Наслідок 2. *Для довільної функції $c(\lambda) \in \overline{A}_0$ оператор $U_z + c(\Delta)$ в просторі A_∞ еквівалентний до оператора U_z.*

Наслідок 3. *Для довільних функцій $c_1(\lambda)$ та $c_2(\lambda)$ з простору $\overline{A}_0$ оператори $U_z + c_1(\Delta)$ та $U_z + c_2(\Delta)$ є еквівалентними у просторі A_∞.*

Використовуючи спряжені оператори та відомі результати стосовно еквівалентності операторів Помм'є у просторах A_R, легко одержати умови еквівалентності відповідних операторів у просторах $\overline{A}_R$. Наприклад, в [3] встановлено, що оператор $U_\varphi \Delta^n$ еквівалентний у просторі A_R до оператора Δ^n тоді і тільки тоді, коли $\varphi(z) \equiv e^{i\alpha}$, де $\alpha \in \mathbb{R}$ у випадку $R < \infty$, або ж $\varphi(z) = C$, де $C \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ у випадку $R = \infty$. Звідси одержуємо наступні твердження.

Наслідок 4. *Нехай $c(\Delta) \in \mathcal{L}(\overline{A}_R)$, $0 < R < \infty$, і n – фіксоване натуральне число. Для того, щоб оператор $U_{z^n}c(\Delta)$ був еквівалентним у просторі $\overline{A}_R$ до оператора U_{z^n} необхідно і достатньо, щоб $c(\lambda) \equiv e^{i\alpha}$, де $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Наслідок 5. *Нехай $c(\Delta) \in \mathcal{L}(\overline{A}_0)$, і n – фіксоване натуральне число. Для того, щоб оператор $U_{z^n}c(\Delta)$ був еквівалентним у просторі $\overline{A}_0$ до оператора U_{z^n} необхідно і достатньо, щоб $c(\lambda) \equiv C$, де $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math. – 1953. – **191**. – S. 30–49.
2. *Линчук С.С.* О представлении линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах аналитических функций // Черновцы. – 1982. – Деп. в ВИНИТИ 13.04.82, № 1798-82 Деп.
3. *Линчук С.С., Нагнибида Н.И.* Об эквивалентности операторов Поммье в пространстве аналитических в круге функций // Сиб. мат. журн. – 1990. – Т. 80, № 1. – С.55-61.
4. *Нагнибида Н. И.* Об условиях полноты одной системы целых функций и их применении к операторам Поммье // Матем. заметки, 1991. – С. 154–156.
5. *Лінчук Н.Є., Лінчук С.С.* Про еквівалентність операторів першого порядку відносно оператора Помм'є // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 111. Математика. Зб. наук. праць. - Чернівці: Рута, 2001.- С.66-69.
6. *Лінчук Н.Є. Лінчук С.С.* Про еквівалентність операторів Помм'є в просторі аналітичних в області функцій // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 134. Математика. Зб. наук. праць. - Чернівці: Рута, 2002.- С.61-64.
7. *Лінчук С.С., Лінчук Ю.С.* Оператори у просторах аналітичних функцій. – Чернівці, Рута. – 2011. – 148 с.