УДК 517.51

©2012 р. О.О. Карлова, В.В. Михайлюк, О.В. Собчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ПРОДОВЖЕННЯ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Досліджується можливість продовження нарізно неперервної функції з підмножини добутку топологічних просторів. Вивчаються також деякі властивості функціонально замкнених підмножин евклідової площини, наділеної хрест-топологією.

We investigate the extendibility of a separately continuous function from a subset of a product of topological spaces. We obtain also several properties of functionally closed subsets of the Euclidian plane equipped with the cross-topology.

1. Вступ

Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Для функції $f : X \times Y \to Z$ і точки $(x,y) \in X \times Y$ позначимо

$$f^x(y) = f_y(x) = f(x,y).$$

Функція f називається *нарізно неперервною*, якщо для всіх $(x,y) \in X \times Y$ функції $f^x : Y \to Z$ і $f_y : X \to Z$ неперервні.

Символом $C(X)$ ($C^*(X)$) ми будемо позначати сукупність усіх (обмежених) неперервних дійснозначних функцій на X.

Функція $f : X \to Y$ належить до *першого класу Бера*, якщо f є поточковою границею послідовності неперервних функцій $f_n : X \to Y$. Сукупність всіх функцій першого класу Бера з X в Y ми позначаємо через $B_1(X,Y)$.

Через $C(f)$ і $D(f)$ ми позначатимемо множини точок неперервності і розриву функції f відповідно.

Згідно з класичною теоремою Тітце-Урисона [6, с. 116], кожну неперервну дійснозначну функцію, визначену на замкненій підмножині нормального простору, можна продовжити до неперервної функції на весь простір. Розвитком теореми Тітце-Урисона є теорема Дуґунджі [1, с. 86], яка твердить, що довільну неперервну функцію, яка визначена на замкненій підмножині метризовного простору і набуває значень у локально опуклому просторі, можна продовжити до неперервної функції на весь простір.

На добутку $X \times Y$ топологічних просторів X і Y природно виникає топологія σ нарізної неперервності, тобто найслабша топологія на $X \times Y$, відносно якої всі нарізно неперервні функції є неперервними. Відомо (див. [8], [3]), що навіть для $X = Y = \mathbb{R}$ топологія σ не є регулярною і теорема Тітце-Урисона не має місце для функцій $f : (X^2, \sigma) \to \mathbb{R}$ (це пов'язано з тим фактом, що кожна функція на діагоналі є σ-неперервною). Тому природно виникає задача про продовження σ-неперервних функцій.

У цій статті ми спочатку доводимо аналог теореми Дуґунджі про продовження σ-неперервних функцій з множин $A \times B$ в добутку метризовних просторів X і Y, і показуємо, що послабити умову метризовності до нормальності не можна. Далі, в пункті 3, ми отримуємо необхідні і достатні умови можливості продовження дійснозначної обмеженої неперервної функції, визначеної на підмножині топологічного простору. В четвертому пункті ми встановлюємо деякі властивості функціонально замкнених підмножин евклідової площини, наділеної хрест-топологією.

2. Теореми Дуґунджі та Тітце-Урисона для нарізно неперервних відображень

Теорема 1. *Нехай X та Y – метризовні простори, Z – локально опуклий простір, множини F_X і F_Y замкнені в X та Y відповідно. Тоді кожну нарізно неперервну функцію $f : F_X \times F_Y \to Z$ можна продовжити до нарізно неперервної функції $g : X \times Y \to Z$.*

Доведення. Для кожної точки $x \in F_X$ розглянемо асоційоване відображення $\varphi : F_X \to C_p(F_Y, Z)$, $\varphi(x) = f^x$. Оскільки відображення φ неперервне, множина F_X замкнена у метризовному просторі X, а простір $C_p(F_Y, Z)$ локально опуклий, то за теоремою Дуґунджі існує неперервне відображення $\tilde{\varphi} : X \to C_p(F_Y, Z)$, таке, що $\tilde{\varphi}|_{F_X} = \varphi$. Для кожного $(x, y) \in X \times F_Y$ покладемо $\tilde{f}(x, y) = \tilde{\varphi}(x)(y)$. Тоді відображення $\tilde{f} : X \times F_Y \to Z$ нарізно неперервне.

Тепер для кожного $y \in F_Y$ розглянемо асоційоване відображення $\psi : F_Y \to C_p(X)$, $\psi(y) = \tilde{f}_y$. Оскільки відображення ψ неперервне, множина F_Y замкнена у метризовному просторі Y, а простір $C_p(X, Z)$ локально опуклий, то за теоремою Дуґунджі існує неперервне відображення $\tilde{\psi} : Y \to C_p(X)$, таке, що $\tilde{\psi}|_{F_Y} = \psi$. Для кожної точки $(x, y) \in X \times Y$ покладемо $g(x, y) = \tilde{\psi}(y)(x)$. Тоді відображення $g : X \times Y \to Z$ нарізно неперервне.

Якщо $(x, y) \in F_X \times F_Y$, то

$$g(x,y) = \tilde{\psi}(y)(x) = \psi(y)(x) = \tilde{f}_y(x) =$$
$$= \tilde{f}(x,y) = \tilde{\varphi}(x)(y) = \varphi(x)(y) =$$
$$= f^x(y) = f(x,y).$$

Отже, відображення g є шуканим продовженням відображення f. $\square$

Приклад 1. *Існує замкнена підмножина F нормального простору X і нарізно неперервна функція $f : F \times F \to \mathbb{R}$, яку не можна продовжити до нарізно неперервної функції $g : X \times X \to \mathbb{R}$.*

Доведення. Нехай $F = D \cup \{\infty\}$ – компактифікація Александрова дискретного простору D континуальної потужності. Згідно з теоремою Тихонова [6, с. 219] можна вважати, що F є підпростором простору $X = [0,1]^{[0,1]}$. Оскільки множина F компактна, то вона замкнена в X. Розглянемо функцію $f : F^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = y \in D, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Легко бачити, що $f \in CC(F \times F, \mathbb{R})$.

Припустимо, що існує така нарізно неперервна функція $g : X \times X \to \mathbb{R}$, що $g|_{F^2} = f$. Тоді $g \in B_1(X \times X, \mathbb{R})$ згідно з [5, Наслідок 4], звідки $f|_\Delta \in B_1(\Delta, \mathbb{R})$, де $\Delta = \{(x,x) : x \in F\}$. Зауважимо, що для кожної функції першого класу Бера $h : F \to \mathbb{R}$ існує не більше, ніж зліченна множина $A \subseteq D$, така, що $h(x) = h(\infty)$ для всіх $x \in D \setminus A$, звідки випливає, що $f|_\Delta \notin B_1(\Delta, \mathbb{R})$, суперечність. $\square$

3. Продовження обмежених неперервних функцій

Означення 1. Система $\mathcal{F}$ дійснозначних функцій на топологічному просторі X називається *L-конусом* (див. [9]), якщо вона має наступні властивості:

1. $f + g, \alpha f, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{F}$ для довільних функцій $f, g \in \mathcal{F}$ і числа $\alpha > 0$;
2. $\mathcal{F}$ містить всі сталі функції;
3. $\mathcal{F}$ замкнена відносно взяття рівномірної границі.

Системи $C(X)$ і $C^*(X)$ є прикладами L-конусів на топологічному просторі X.

Означення 2. Нехай система $\mathcal{F}$ є L-конусом. Ми кажемо, що множина $A \subseteq X$ *$\mathcal{F}$-відокремлюється від множини $B \subseteq X$*, якщо існує функція $f \in \mathcal{F}$, така, що $A \subseteq f^{-1}(0)$ і $B \subseteq f^{-1}(1)$.

В [9] був встановлений такий результат.

Теорема 2. *Нехай X – топологічний простір, $\mathcal{F}$ – L-конус, h_1, h_2 – обмежені дійснозначні функції на X, такі, що $h_1(x) \le h_2(x)$ для всіх $x \in X$. Тоді наступні умови еквівалентні:*
(i) існує $g \in \mathcal{F}$, таке, що $h_1(x) \le g(x) \le h_2(x)$ для всіх $x \in X$;
(ii) для будь-яких чисел a і b якщо $a < b$, то множина $h_2^{-1}((-\infty, a])$ є $\mathcal{F}$-відокремною від множини $h_1^{-1}([b, +\infty))$.

З цієї теореми випливає наступний факт.

Теорема 3. *Нехай E – підмножина топологічного простору X. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) кожну функцію $f \in C^*(E)$ можна продовжити до функції $g \in C^*(X)$;

(ii) для будь-яких диз'юнктних функціонально замкнених множин F_1 та F_2 в E існують диз'юнктні функціонально замкнені множини F_1' та F_2' в X, такі, що $F_i = F_i' \cap E$ при $i = 1, 2$.

Доведення. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Нехай F_1 та F_2 – диз'юнктні функціонально замкнені в E множини. Тоді існує неперервна функція $f : X \to [0, 1]$, така, що $F_i = f^{-1}(i-1)$ при $i = 1, 2$. Нехай $g \in C^*(X)$ – продовження функції f. Покладаючи $F_i' = g^{-1}(i-1)$ при $i = 1, 2$, ми отримаємо диз'юнктні функціонально замкнені множини в X, такі, що $F_i = F_i' \cap E$, $i = 1, 2$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Нехай f – неперервна обмежена функція на E. Покладемо

$$h_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in E, \\ \inf f(E), & \text{якщо } x \in X \setminus E, \end{cases}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in E, \\ \sup f(E), & \text{якщо } x \in X \setminus E, \end{cases}$$

Тоді $h_1(x) \le h_2(x)$ для всіх $x \in X$.

Зафіксуємо числа $a < b$. Без обмеження загальності можемо вважати, що $\inf f(E) \le a < b \le \sup f(E)$. Позначимо $F_1 = h_2^{-1}((-\infty, a])$, $F_2 = h_1^{-1}([b, +\infty))$. Тоді $F_1 = f^{-1}((-\infty, a])$, а $F_2 = f^{-1}([b, +\infty))$, звідки випливає, що множини F_1 та F_2 є диз'юнктними функціонально замкненими в E. Згідно з умовою (ii) існують диз'юнктні функціонально замкнені множини F_1' та F_2' в X, такі, що $F_1 = F_1' \cap E$ і $F_2 = F_2' \cap E$. Нехай $h \in C^*(X)$ – така функція, що $F_i' = h^{-1}(i-1)$, $i = 1, 2$, тобто, множина F_1' є $\mathcal{F}$-відокремною від множини F_2', де $\mathcal{F}$ – L-конус обмежених неперервних функцій. Оскільки $F_1 \subseteq F_1'$, а $F_2 \subseteq F_2'$, то множина F_1 є $\mathcal{F}$-відокремною від множини F_2. Згідно з теоремою 2, існує функція $g \in C^*(X)$, така, що $h_1(x) \le g(x) \le h_2(x)$ для всіх $x \in X$. Тоді g є шуканим продовженням функції f. □

4. Про функціонально замкнені множини в хрест-топології

Нехай X і Y – топологічні простори. Позначимо через γ сукупність всіх таких підмножин A добутку $X \times Y$, що для кожної точки (x, y) з A існують такі околи U та V точок x і y в просторах X і Y відповідно, що $(\{x\} \times V) \bigcup (U \times \{y\}) \subseteq A$. Система γ утворює деяку топологію на множині $X \times Y$, яку ми називаємо *хрест-топологією.* Простір $X \times Y$ з такою топологією ми позначаємо $(X \times Y, \gamma)$.

Зауважимо, що сім'я всіх неперервних функцій, визначених на $(X \times Y, \gamma)$, збігається з сім'єю всіх нарізно неперервних функцій на просторі $X \times Y$ з топологією добутку. Таким чином, задача про продовження дійснозначної нарізно неперервної функції, визначеної на підмножині E добутку $X \times Y$ зводиться до задачі про продовження неперервної функції з підпростору $E \subseteq (X \times Y, \gamma)$. Враховуючи умову (ii) теореми 3, природно поставити питання про опис функціонально замкнених множин простору $(X \times Y, \gamma)$.

Означення 3. *Множину $A \subseteq X \times Y$ ми називаємо нарізно замкненою /одноточковою/, якщо для кожного $x \in X$ та $y \in Y$ множини $(\{x\} \times Y) \bigcap A$ та $(X \times \{y\}) \bigcap A$ замкнені /одноточкові/ в просторі $X \times Y$.*

Слід зазначити, що система всіх функціонально замкнених множин в $(\mathbb{R}^2, \gamma)$ має континуальну потужність, а потужність системи всіх нарізно замкнених множин в $\mathbb{R}^2$ – це $2^{\mathfrak{c}}$. З цього факту випливає існування нарізно замкненої множини, яка не є функціонально замкненою в хрест-топології на $\mathbb{R}^2$, що було встановлено З. Пьотровським, Р. Валліном та Е. Вінглером в [10].

Зауважимо, що з [2] випливає, що довільна функціонально замкнена множина в $(\mathbb{R}^2, \gamma)$ є типу G_δ в $\mathbb{R}^2$. Виходячи з цього, природно запитати, чи кожна нарізно замкнена G_δ-множина в $\mathbb{R}^2$ є функціонально замкненою в $(\mathbb{R}^2, \gamma)$? Відповідь на це питання негативна, як показує наступний приклад.

Приклад 2. *Нехай $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$, причому $r_n \ne r_m$ при $n \ne m$, і $E = \{(r_n, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$. Тоді множина E є нарізно одноточковою типу G_δ в $\mathbb{R}^2$, але не є функціонально замкненою в $(\mathbb{R}^2, \gamma)$.*

Доведення. Зауважимо спочатку, що

$$\overline{E} = E \sqcup L,$$

де $L = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$, звідки $E = \overline{E} \setminus L$. Отже, множина E, як різниця двох замкнених множин, є типу G_δ в $\mathbb{R}^2$.

Покажемо тепер, що множина E не є функціонально замкненою в $(\mathbb{R}^2, \gamma)$. Міркуючи від супротивного, припустимо, що існує нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, така, що $E = f^{-1}(0)$. Зазначимо, що кожна точка з множини $L = \overline{E} \setminus E$ є точкою розриву функції f. Справді, нехай $p \in \overline{E} \setminus E$. Тоді існує така послідовність $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, що $p_n \in E$ і $p_n \to p$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} f(p_n) = 0$, а $f(p) \neq 0$, то $p \in D(f)$. З іншого боку, в [7] доведено, що множина точок розриву довільної нарізно неперервної функції $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ в перетині з довільною горизонтальною або вертикальною прямою є множиною першої категорії. $\square$

Тим не менше, має місце такий результат.

Теорема 4. *Нехай X – топологічний простір, такий, що X^2 – досконало нормальний, і $E \subseteq \{(x,x) : x \in X\}$ – множина типу G_δ в X^2. Тоді множина E функціонально замкнена в (X^2, γ).*

Доведення. Оскільки простір X досконало нормальний, то множина E є функціонального типу G_δ в X, тобто $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, де всі множини E_n функціонально відкриті в X. Тоді існує послідовність неперервних функцій $f_n : X \to [0,1]$, така, що $E_n = f_n^{-1}((0,1])$. Покладаючи $h_{n,m}(x) = \sqrt[m]{f_n(x)}$, ми одержимо послідовність $(h_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ функцій $h_{n,m} \in B_1(X,[0,1])$, яка поточково збігається до функції χ_{E_n}. Тепер для всіх $x \in X$ покладемо

$$h(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_{E_n}(x).$$

Тоді $h \in B_1(X,[0,1])$ як сума рівномірно збіжного ряду функцій першого класу. Крім того, легко бачити, що $E = h^{-1}(0)$.

Згідно з [4] існує нарізно неперервна функція $f : X^2 \to [0,1]$, така, що $f(x,x) = h(x)$ для всіх $x \in X$. Оскільки діагональ $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ функціонально замкнена в X^2, то $\Delta = \varphi^{-1}(0)$, де $\varphi : X^2 \to [0,1]$ – неперервна функція. Покладемо

$$g(x,y) = f(x,y) + h(x,y)$$

для всіх $x, y \in X$. Тоді $g \in CC(X^2, \mathbb{R})$. Легко бачити, що $E = g^{-1}(0)$. Отже, множина E функціонально замкнена в (X^2, γ). $\square$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. К. Борсук. Теория ретрактов. – М.: Мир. – 1971. – 292 с.
2. О. Карлова. Перший функціональний лебеґівський клас і берівська класифікація нарізно неперервних відображень // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – Вип. 191-192. – 2004. – С. 52-60.
3. В. Михайлюк. Топологія нарізної неперервності і одне узагальнення теореми Серпінського // Мат. Студії. – 14, №2. – 2000. – С. 193-196.
4. В.В. Михайлюк, О.В. Собчук. Функції з діагоналлю скінченного класу Бера // Мат. Студії. – 14, №1. – 2000. – С. 23-28.
5. В.В. Михайлюк, О.В. Собчук. Берівська класифікація нарізно неперервних функцій і залежність від зліченного числа координат // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – Вип. 191-192. – 2004. – С. 116-118.
6. Р. Энгелькинг. Общая топология. – М.: Мир. – 1986. – 790 с.
7. R. Baire. Sur les functions des variables reélles // Ann. Mat. Pura Appl., ser. 3. – **3**. – 1899. – P. 1-123.
8. J.E. Hart, K. Kunen. On the regularity of the topology of separate continuity // Top. Appl. – **123**. – 2002. – P. 103-123.
9. J. Lukeš, J. Malý, L. Zajíček. Fine Topology Methods in Real Analysis and Potential Theory. – Springer-Verlag. – 1986. – 480 p.
10. Z. Piotrowski, R. Vallin, E. Wingler. On the separately open topology. – Tatra Mt. Math. Publ. – **42**. – 2009. – P. 39-49.