

АПРОКСИМАЦІЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Розглянуто систему лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу, що не містить сингулярної складової. Побудовано та обґрунтовано схему апроксимації такої системи послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь.

We considered a system of linear differential-functional equations of neutral type, which does not contain a singular part. An approximation scheme of such a system is constructed and grounded by a sequence of the systems of ordinary differential equations.

Схеми апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь (ДРР) послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь вперше були запропоновані в роботі [1]. Для нелінійних ДРР запізнюючого типу такі задачі вивчалися в [2-4], а для ДРР нейтрального типу в [5]. Схема апроксимації лінійних диференціально-функціональних рівнянь (ДФР) розглянута в [6]. Метою даної роботи є поширення схеми апроксимації [6] для лінійних ДФР нейтрального типу.

1. Постановка задачі. Означення та допоміжні твердження.

Нехай R^n – дійсний n -вимірний лінійний векторний простір з деякою векторною нормою $|\cdot|$. Для $r \geq 0$ позначимо $C = C([-r, 0], R^n)$ – простір неперервних функцій, що відображають $[-r, 0]$ в R^n , з рівномірною нормою $|\varphi| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\varphi|$. Припустимо, що g, f неперервні функції, які відображають $[r, \infty) \times C \rightarrow R^n$ та визначений функціонально-різницевий оператор $D(\cdot) : [r, \infty) \times C \rightarrow R^n$,

$$D(t)\varphi = \varphi(0) - g(t, \varphi). \quad (1)$$

Диференціально-функціональним рівнянням нейтрального типу називатимемо рівняння

$$\frac{d}{dt}D(t)x_t = f(t, x_t), \quad (2)$$

де $x_t \in C$ визначається рівністю $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$.

Означення 1 [7]. Для будь-яких $\varphi \in C, \sigma \in [r, \infty), A \geq 0$, функція $x(t, \varphi)$ визначена на $[\sigma - r, \sigma + A]$ називається розв'язком рівняння (2) на $[\sigma, \sigma + A]$ з початковим значенням φ в точці $t = \sigma$, якщо x – неперервна на $[\sigma - r, \sigma + A]$; $x_\sigma = \varphi$; $D(t)x_t$ – неперервно диференційовна на $[\sigma, \sigma + A]$ і задовільняє рівність (2) на $[\sigma, \sigma + A]$.

Диференціально-функціональні рівняння нейтрального типу є математичними моделями важливих прикладних задач в теорії автоматичного керування, в електродинаміці, біології, медицині та в багатьох інших прикладних задачах.

Основи теорії цих рівнянь, зокрема теореми існування, єдиності та неперервної залежності розв'язків від початкових даних досліджені в роботах [7-10].

У даній роботі досліджуватимемо початкову задачу для лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}[x(t) - G(t, x_t)] = P(t, x_t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (4)$$

де $G(t, x_t), P(t, x_t)$ – лінійні обмежені функціонали, що не містять сингулярної складової вигляду

$$G(t, x_t) = \sum_{i=1}^p G_i(t)x(t-\tau_i) + \int_{-\tau}^0 H(t, \theta)x(t+\theta)d\theta,$$

$$P(t, x_t) = \sum_{i=0}^p P_i(t)x(t-\tau_i) + \int_{-\tau}^0 Q(t, \theta)x(t+\theta)d\theta,$$

$G_i(t), P_i(t), i = \overline{0, p} - n \times n$ – неперервні матричні функції при $t \in [0, T], H(t, \theta), Q(t, \theta)$ – матричні функції, компоненти яких неперервні за сукупністю змінних функції на $[0, T] \times [-\tau, 0], 0 < \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = \tau$.

Позначимо $K_G = \max_{k=\overline{1, p}} \max_t \|G_k(t)\|, K_P = \max_{k=\overline{0, p}} \max_t \|P_k(t)\|, K_H = \max_{t, \theta} \|H(t, \theta)\|, K_Q = \max_{t, \theta} \|Q(t, \theta)\|, \omega_Q(\frac{\tau}{m}) = n \max_{i, j} \omega(q_{ij}, \frac{\tau}{m}),$

$\omega_H(\frac{\tau}{m}) = n \max_{i, j} \omega(h_{ij}, \frac{\tau}{m}),$ де $\omega(q_{ij}, \frac{\tau}{m}), \omega(h_{ij}, \frac{\tau}{m})$ – модуль неперервності функцій $q_{ij}(t, \theta), h_{ij}(t, \theta), i, j = \overline{1, n}, t \in [0, T]$.

Припустимо, що для системи (3) справджується нерівність

$$pK_G + \tau K_H < 1. \quad (5)$$

2. Обґрунтування схеми апроксимації. Нехай $m, p \in N$. Поставимо у відповідність рівнянню (3) систему звичайних диференціальних рівнянь де використано заміну інтегралів за формулою лівих прямокутників з кроком $h = \frac{\tau}{m}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[z_0(t) - \sum_{i=1}^p G_i(t)z_{l_i}(t) - \\ - \frac{\tau}{m} \sum_{i=0}^{m-1} H(t, -\frac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(t)] = \\ = \sum_{i=0}^p P_i(t)z_{l_i}(t) + \frac{\tau}{m} \sum_{i=0}^{m-1} Q(t, -\frac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(t), \end{aligned}$$

$$\frac{dz_j(t)}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_{j-1}(t) - z_j(t)), j = \overline{1, m}, \quad (6)$$

$t \in [0, T], l_i = [\frac{m\tau_i}{\tau}].$

$$z_j(0) = \varphi(-\frac{\tau j}{m}), j = \overline{0, m}. \quad (7)$$

Будемо говорити, що система звичайних диференціальних рівнянь (6) апроксимує систему лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу (3), якщо справджуються співвідношення

$\|x(t - \frac{\tau j}{m}) - z_j(t)\| \rightarrow 0, j = \overline{0, m}, t \in [0, T]$ при $m \rightarrow \infty$.

Дослідимо питання про близькість розв'язків початкової задачі (3)-(4) та роз-

в'язків задачі Коші (6)-(7).

Розглянемо зображення $z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t)$, де $z_j^{(1)}(t)$ та $z_j^{(2)}(t)$ – розв'язки таких задач Коші

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} z_1^{(1)'}(t) + z_1^{(1)}(t) &= x(t), t \in [0, T], \\ \frac{\tau}{m} z_j^{(1)'}(t) + z_j^{(1)}(t) &= z_{j-1}^{(1)}(t), j = \overline{2, m}, \\ z_j^{(1)}(0) &= x(-\frac{j\tau}{m}), j = \overline{1, m}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} z_1^{(2)'}(t) + z_1^{(2)}(t) &= z_0(t) - x(t), t \in [0, T], \\ \frac{\tau}{m} z_j^{(2)'}(t) + z_j^{(2)}(t) &= z_{j-1}^{(2)}(t), j = \overline{2, m}, \\ z_j^{(2)}(0) &= 0, j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (9)$$

Оцінимо різниці $z_j(t) - x(t - \frac{j\tau}{m}), j = \overline{1, m}$ враховуючи структуру систем (8)-(9) та нерівність $\|z_j(t) - x(t - \frac{j\tau}{m})\| \leq \|z_j^{(2)}(t)\| + \|z_j^{(1)}(t) - x(t - \frac{j\tau}{m})\|$.

Враховуючи позначення $z_j(t) = (z_{j1}(t), \dots, z_{jn}(t))$, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, представимо $z_{ji}(t), j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}$ у вигляді суми $z_{ji}^{(1)}(t) + z_{ji}^{(2)}(t)$, де $z_{ji}^{(1)}(t)$ і $z_{ji}^{(2)}(t)$ є розв'язками таких задач Коші

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} \frac{dz_{j1}^{(1)}(t)}{dt} + z_{j1}^{(1)}(t) &= x_i(t), i = \overline{1, n}, \\ \frac{\tau}{m} \frac{dz_{ji}^{(1)}(t)}{dt} + z_{ji}^{(1)}(t) &= z_{j-1, i}^{(1)}(t), j = \overline{2, m}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$z_{ji}^{(1)}(0) = x_i(-\frac{j\tau}{m}), j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m} \frac{dz_{j1}^{(2)}(t)}{dt} + z_{j1}^{(2)}(t) &= z_{0i}(t) - x_i(t), \\ \frac{\tau}{m} \frac{dz_{ji}^{(2)}(t)}{dt} + z_{ji}^{(2)}(t) &= z_{j-1, i}^{(2)}(t), j = \overline{2, m}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$z_{ji}^{(2)}(0) = 0, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Нехай

$$N_j(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \sum_{i=1}^n |x_i(s - \frac{\tau j}{m}) - z_{ji}(s)|, \quad (14)$$

$j = \overline{0, m}, t \in [0, T].$

Враховуючи вигляд систем (10) та (12) для різниці $\sum_{i=1}^n |x_i(t - \frac{\tau j}{m}) - z_{ji}(t)|$ маємо нерівність

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i(t - \frac{j\tau}{m}) - z_{ji}(t)| &\leq \sum_{i=1}^n |z_{ji}^{(2)}(t)| + \\ + \sum_{i=1}^n |x_i(t - \frac{j\tau}{m}) - z_{ji}^{(1)}(t)|. \end{aligned} \quad (15)$$

Покажемо методом математичної індукції, що для першого доданку в правій частині (15) справедлива оцінка

$$\sum_{i=1}^n |z_{ji}^{(2)}(s)| \leq N_0(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [0, T]. \quad (16)$$

Для розв'язку задачі Коші

$$\frac{\tau}{m} \frac{dz_{1i}^{(2)}(t)}{dt} + z_{1i}^{(2)}(t) = z_{0i}(t) - x_i(t),$$

$$z_{1i}^{(2)}(0) = 0,$$

маємо зображення

$$z_{1i}^{(2)}(t) = \frac{m}{\tau} \int_0^t (z_{0i}(\xi) - x_i(\xi)) \exp\left(\frac{m(\xi - t)}{\tau}\right) d\xi.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^n |z_{1i}^{(2)}(t)| \leq \frac{m}{\tau} \int_0^t \left(\max_{0 \leq s \leq t} \sum_{i=1}^n |z_{0i}(s) - x_i(s)| \right) \times \exp\left(\frac{m(\xi - t)}{\tau}\right) d\xi \leq N_0(t).$$

Припустимо, що нерівність (16) справедлива при $j = k$: $\sum_{i=1}^n |z_{ki}^{(2)}(t)| \leq N_0(t)$.

Покажемо, що дана нерівність буде справедлива при $j = k + 1$. Маємо оцінку

$$\sum_{i=1}^n |z_{k+1,i}^{(2)}(t)| \leq \frac{m}{\tau} \int_0^t \left(\max_{0 \leq s \leq t} \sum_{i=1}^n |z_{ki}^{(2)}(s)| \right) \exp\left(\frac{m(\xi - t)}{\tau}\right) d\xi \leq N_0(t).$$

Отже, нерівність (16) має місце.

Враховуючи властивості розв'язків початкової задачі диференціально-функціонального рівняння (3) [8, 11] маємо, що функції $x_i(t) \in C[-\tau, T]$, $i = \overline{1, n}$ - тому, застосовуючи теорему 1 [12], для різниці $|x_i(t - \frac{j\tau}{m}) - z_{ji}^{(1)}(t)|$ дістаємо оцінку

$$\sum_{i=1}^n |x_i(t - \frac{j\tau}{m}) - z_{ji}^{(1)}(t)| \leq \gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \gamma(\delta) = 0. \quad (17)$$

Нерівність (17) справедлива для всіх $t \in [0, T]$, тому враховуючи (14), маємо

$$N_j(t) \leq \gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + N_0(t), \quad j = \overline{1, m}. \quad (18)$$

Сформулюємо одержаний результат у вигляді такого твердження.

Лема 1. . Нехай вхідна функція $x(t)$ в системі (8) є неперервною при $t \in [0, T]$, тоді для розв'язків задач Коші (8)-(9) справедливо співвідношення (17), де $N_j(t)$ визначається рівністю (14).

Для оцінки різниці $\|x(t) - z_0(t)\|$, представимо рівняння (3) та (6) в еквівалентній інтегральній формі

$$\begin{aligned} & [x(t) - \sum_{i=1}^p G_i(t)x(t - \tau_i) - \int_{-\tau}^0 H(t, \theta)x(t + \theta)d\theta] \\ & - [x(0) - \sum_{i=1}^p G_i(0)x(-\tau_i) - \int_{-\tau}^0 H(0, \theta)x(\theta)d\theta] = \\ & = \int_0^t \sum_{i=0}^p P_i(t)x(t - \tau_i)dt + \\ & + \int_0^t \sum_{i=0}^{m-1} \int_{-\tau + i\frac{\tau}{m}}^{-\tau + (i+1)\frac{\tau}{m}} Q(t, \theta)x(t + \theta)d\theta dt; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & [z_0(t) - \sum_{i=1}^p G_i(t)z_{li}(t) - \frac{\tau}{m} \sum_{i=0}^{m-1} H(t, -\frac{\tau(m-i)}{m}) \times \\ & \times z_{m-i}(t) - [z_0(0) - \sum_{i=1}^p G_i(0)z_{li}(0) - \\ & - \frac{\tau}{m} \sum_{i=0}^{m-1} H(0, -\frac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(0)] = \\ & = \int_0^t \sum_{i=0}^p P_i(t)z_{li}(t)dt + \\ & + \int_0^t \sum_{i=0}^{m-1} \int_{-\tau + i\frac{\tau}{m}}^{-\tau + (i+1)\frac{\tau}{m}} Q(t, -\frac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(t)d\theta dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Встановимо деякі властивості розв'язків задачі Коші (6)-(7). Нехай початкові умови для системи (6)-(7) задовольняють нерівності $\sum_{i=1}^n |z_{ji}(0)| < \delta$, $j = \overline{0, m}$. Позначимо

$$M(t) = \max_{s \in [0, t]} \left[\delta, \sum_{i=1}^n |z_{0i}(s)| \right]. \quad (21)$$

Із векторного рівняння

$\frac{dz_1}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_0(t) - z_1(t))$ одержимо

$$z_{1i}(t) = z_{1i}(0)\exp\left(\frac{-mt}{\tau}\right) + \frac{m}{\tau} \int_0^t z_{0i}(s) \times \exp\left(\frac{m(s-t)}{\tau}\right) ds.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^n |z_{1i}(t)| \leq M(t)\left(\exp\left(\frac{-mt}{\tau}\right) + \frac{m}{\tau} \int_0^t \exp\left(\frac{m(s-t)}{\tau}\right) ds\right) = M(t).$$

Аналогічно, одержуємо

$$\sum_{i=1}^n |z_{ji}(t)| \leq M(t), j = \overline{1, m}. \quad (22)$$

Враховуючи рівність (20), маємо

$$\begin{aligned} \|z_{0i}(t)\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^p G_i(t) z_{i_i}(t) \right\| + \\ &+ \frac{\tau}{m} \left\| \sum_{i=0}^{m-1} H\left(t, -\frac{\tau(m-i)}{m}\right) z_{m-i}(t) \right\| + \|z_{0i}(0)\| + \\ &+ \left\| \sum_{i=1}^p G_i(0) z_{i_i}(0) \right\| + \frac{\tau}{m} \left\| \sum_{i=0}^{m-1} H\left(0, -\frac{\tau(m-i)}{m}\right) \times \right. \\ &\times z_{m-i}(0) \left. \right\| + \int_0^t \left\| \sum_{i=1}^p P_i(s) z_{i_i}(s) \right\| ds + \\ &+ \int_0^t \left\| \sum_{i=1}^{m-1} \int_{-\tau+i\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(i+1)\frac{\tau}{m}} Q\left(s, -\frac{\tau(m-i)}{m}\right) \times \right. \\ &\times z_{m-i}(s) d\theta \left. \right\| ds \leq K_G \sum_{i=1}^p \sum_{l=1}^n \|z_{i,l}(t)\| + \\ &+ \frac{\tau}{m} K_H \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=1}^n \|z_{m-i,l}(t)\| + \|z_{0i}(0)\| + \\ &+ K_G \sum_{i=1}^p \sum_{l=1}^n \|z_{i,l}(0)\| + \\ &+ \frac{\tau}{m} K_H \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=1}^n \|z_{m-i,l}(0)\| + \\ &+ K_P \int_0^t \sum_{i=1}^p \sum_{l=1}^n \|z_{i,l}(s)\| ds + \\ &+ \frac{\tau}{m} K_H \int_0^t \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{l=1}^n \|z_{m-i,l}(s)\| ds \leq \\ &\leq \|z_{0i}(0)\| + (pK_G + \tau K_H)M(t) + \\ &+ (pK_G + \tau K_H)M(0) + (pK_P + \tau K_Q) \int_0^t M(s) ds. \end{aligned}$$

Сумуючи одержані нерівності, дістаємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|z_{0i}(t)\| &\leq \sum_{i=1}^n \|z_{0i}(0)\| + \\ &+ n(pK_G + \tau K_H)M(t) + n(pK_G + \tau K_H)M(0) + \\ &+ n(pK_P + \tau K_Q) \int_0^t M(s) ds. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} M(t) &\leq \delta + n(pK_G + \tau K_H)M(t) + \\ &+ n(pK_G + \tau K_H)M(0) + n(pK_P + \\ &+ \tau K_Q) \int_0^t M(s) ds. \end{aligned} \quad (23)$$

Використовуючи лему Гронуолла-Беллмана та позначення (21), маємо

$$M(t) \leq (\delta + n(pK_G + \tau K_H)M(t) + n(pK_G + \tau K_H)M(0))e^{n(pK_P + \tau K_Q)t} = K_Z. \quad (24)$$

Із рівностей (19), (20), враховуючи властивості матриць $G_i(t), P_j(t), i = \overline{1, p}, j = \overline{0, p}, H(t, \theta), Q(t, \theta)$, та (24), дістаємо

$$\begin{aligned} \|x(t) - z_0(t)\| &\leq \sum_{i=1}^p \|G_i(t)\| \cdot \|x(t - \tau_i) - \\ &- z_{i_i}(t)\| + \left\| \int_{-\tau}^0 H(t, \theta) x(t + \theta) d\theta - \right. \\ &- z_{i_i}(t) \left. \right\| + \left\| \int_{-\tau}^0 H(t, \theta) x(t + \theta) d\theta - \right. \\ &- \frac{\tau}{m} \sum_{i=0}^{m-1} H\left(t, -\frac{\tau(m-i)}{m}\right) z_{m-i}(t) \left. \right\| + \sum_{i=1}^p \|G_i(0)\| \times \\ &\times \|x(-\tau_i) - z_{i_i}(0)\| + \left\| \int_{-\tau}^0 H(0, \theta) x(\theta) d\theta - \right. \\ &- \frac{\tau}{m} \sum_{i=0}^{m-1} H\left(0, -\frac{\tau(m-i)}{m}\right) z_{m-i}(0) \left. \right\| + \\ &+ \int_0^t \sum_{i=0}^p \|P_i(t)\| \cdot \|x(t - \tau_i) - z_{i_i}(t)\| dt + \\ &+ \int_0^t \sum_{i=0}^{m-1} \int_{-\tau+i\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(i+1)\frac{\tau}{m}} \|Q(t, \theta) x(t + \theta) - \\ &- Q\left(t, -\frac{\tau(m-i)}{m}\right) z_{m-i}(t)\| d\theta dt \leq pK_G \left(\gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + \right. \\ &+ N_0(t) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) \left. \right) + \tau \left[K_H \left(n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) + \gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + \right. \right. \\ &+ N_0(t) \left. \left. \right) + K_Z \omega_H \right] + pK_G n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) + \\ &+ \tau \left[K_H n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) + K_Z \omega_H \right] + T(p+1)K_P \times \\ &\times \left[\gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) \right] + (p+1)K_P \int_0^t N_0(s) ds + \\ &+ T\tau \left[K_Q \left(n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) + \gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) \right) + K_Z \omega_Q \right] + \\ &+ \tau K_Q \int_0^t N_0(s) ds. \end{aligned} \quad (25)$$

Одержана нерівність справедлива для всіх $t \in [0, T]$, тому враховуючи нерівність (5) маємо

$$N_0(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t N_0(s) ds,$$

де

$$\alpha = \frac{[\gamma(\frac{\tau}{\sqrt{m}}) + n\omega(\frac{\tau}{m})] \cdot [pK_G + \tau K_H + T\tau K_Q + T(p+1)K_P] + \tau K_Z \omega_H + pK_G n\omega(\frac{\tau}{m}) + \tau [K_H n\omega(\frac{\tau}{m}) + K_Z \omega_H] + T\tau K_Z \omega_Q}{[1 - pK_G - \tau K_H]},$$

$$\beta = \frac{[(p+1)K_P + \tau K_Q]}{[1 - pK_G - \tau K_H]},$$

Скориставшись тепер нерівністю Гронуолла-Беллмана, одержуємо

$$N_0(t) \leq \alpha \left(\frac{\tau}{m}\right) e^{\beta}, t \in [0, T], \quad (26)$$

Оскільки $\gamma(\frac{\tau}{\sqrt{m}})$, $\omega(\frac{\tau}{m})$, $\omega_H \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, тоді

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha \left(\frac{\tau}{m}\right) = 0.$$

Із останнього співвідношення випливає, що розв'язки задачі Коші (6)-(7) апроксимують розв'язки початкової задачі (3) при $m \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Нехай $G_i(t), P_i(t), i = \overline{0, p} - n \times n$ - неперервні матричні функції при $t \in [0, T]$, $H(t, \theta), Q(t, \theta)$ - матричні функції, компоненти яких неперервні за сукупністю змінних функції на $[0, T] \times [-\tau, 0]$, $0 < \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = \tau$ і виконується умова (5). Тоді розв'язок задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (6), (7) апроксимує розв'язок початкової задачі для системи диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу розв'язок (3) при $m \rightarrow \infty$ і $t \in [0, T]$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Красовский Н.Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // ПММ. - 1964. - Т. 28, № 4. - С. 716-725.

2. Репин Ю.М. О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // ПММ. - 1965. - Т. 29, №2. - С. 226 - 245.
3. Піддубна Л.А., Черевко І. М. Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. - 1999. - № 1. - С.42-50.
4. Матвій О.В., Черевко І.М. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. - 2004. - Т. 7, № 2. - С. 208-216.
5. Матвій О.В., Черевко І.М. Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. - 2007. - Т. 10, №3. - С. 329 - 335.
6. Матвій О.В., Черевко І.М. Про апроксимацію систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту : зб. наук. праць. - Чернівці : Рута, 2006.- Вип. 314 - 315. Математика. - С. 125-128.
7. Cruz M.A., Hale J.K. Stability of Functional Differential Equations of Neutral Type // Journal Of Differential Equations. - 1970. - Vol. 7. - P. 334-355.
8. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений.- М.: Мир, 1984. - 421с.
9. Hale J.K., and Verduyn Lunel S.M., Introduction to Functional Differential Equations, Springer Verlag, New York, NY, 1993. - 447p.
10. Burns J.A., Herdman T.L., Steck H.W. Linear Functional Differential Equations as Semigroups on Product Spaces // SIAM J.Math. Analysis. - 1983, №14. - P. 98-116.
11. Yang Kuang. Delay differential equations: with applications in population dynamics. - Academic Press, 1993. - 398 p.
12. Черевко І.М., Матвій О.В., Стельмащук Л.В. Про апроксимацію системи різницевих рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту : зб. наук. праць. - Чернівці : Рута, 2007. - Вип. 349. Математика. - С. 88-94.