УДК 517.9+517.95

©2012 р. Я.М. Дрінь, М.М. Дрінь

Буковинський державний фінансово-економічний університет,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ B-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТА

Встановлена теорема про коректну розв'язність задачі Коші для квазілінійних B-параболічних рівнянь з відхиленням аргументу.

The theorem about correct solvability Cauchy problem for B-parabolic equations with deviation time variable was proved.

При математичному описі різних процесів та проблем теорії автоматичного регулювання, автоматики і телемеханіки, радіолокації і радіонавігації, електрозв'язку, теоретичної кібернетики, ракетної техніки, термоядерного синтезу, біології, економіки і медицини часто зустрічаються системи диференціальних рівнянь з відхиленням аргумента (ДРВА). Велике їх застосування сприяло збільшенню інтересу до теорії цих рівнянь, що виявилося у великій кількості опублікованих робіт, присвячених ДРВА. Класичними в області ДРВА стали результати А.Д. Мишкіса, А.Е. Ельсгольца, Н.В. Азбелева, С.Б. Норкіна, Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, М.М. Перестюка, В.П. Рубаника, В.І. Фодчука, Д.І. Мартинюка, Дж. Хейла, В.В. Мариняка та багатьох інших.

Теорія класичних розв'язків задачі Коші для B-параболічних рівнянь побудована у працях М.І. Матійчука, В.В, Крехівського (див. [1] і наведену там бібліографію), С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, В.П. Лавренчука, І.І. Веренич та ін. Задача Коші для таких рівнянь у класах розподілів та ультрарозподілів вивчалася Я.І. Житомирським, В.В. Городецьким, І.В. Житарюком, В.П. Лавренчуком і ін. [2, 3].

Використовуючи результати та ідеї, відомі в теорії задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$ параболічних рівнянь [2] – [3], в яких поряд із частинними похідними по просторових змінних, є степені оператора Бесселя по нормальній змінній (що відповідає рівнянням, які вироджуються на гіперплощині), а також права частина в неоднорідності містить шукану функцію із запізненням за часовим аргументом, шукаємо класичний розв'язок задачі Коші методом кроків [4].

1. Постановка задачі Коші. Розглядається задача Коші для системи квазілінійних диференціальних рівнянь з одновимірним оператором Бесселя вигляду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{\tilde{k}+\frac{2j}{2b_n}\leq 1} A_{kj} D_x^k B_{x_n}^j u(t,x) + \\ + f(t,x,u(t-h,x)) \qquad (1)$$

$(\tilde{k} = \dfrac{k_1}{2b_1} + \cdots + \dfrac{k_{n-1}}{2b_{n-1}}$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 1$ – цілі додатні числа) в області $\Pi^+ = E_1^+ \times E_{n-1} \times E_1^+$ точок $(t,x) = (t, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, $t > 0$, $x_n \geq 0$, $b \geq 1$, B_{x_n} – оператор Бесселя

$$B_{x_n} = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu+1}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \nu > -\frac{1}{2},$$

$$u(t,x) = \varphi(t,x), \qquad (2)$$

$$0 \leq t \leq h, x \in E_{n-1} \times E_1^+ \equiv E_n^+,$$

f, φ – відомі функції своїх аргументів, A_{kj} – відомі дійсні числа, або відомі функції, залежні від $t \geq 0$, або від $(t,x) \in \Pi^+$.

Означення [1, стор. 11]. Система рівнянь (1) називається B-параболічною в точці (t,x), якщо всі корені характеристичного рівняння

$$\det\Big\| \sum_{\tilde{k}+\frac{2j}{2b_n}=1} A_k(t,x)(i\sigma')^k(i\sigma_n)^{2j} - \lambda E\Big\| = 0$$

задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\lambda(t,x,\sigma) \leq -\delta(t,x)(\sigma_1^{2b_1} + \cdots + \sigma_n^{2b_n}) \equiv$$

$$\equiv -\delta(t,x)\|\sigma\|^{2b}$$

при $(t,x) \in \Pi^+$, $\sigma \in E_n^+$, $\delta(t,x) > 0$.

Якщо $\inf\limits_{\Pi^+} \delta(t,x) = \delta_0 > 0$ і $\mathrm{Re}\lambda \leq -\delta_0\|\sigma\|^{2b}$, то система (1) називається рівномірно $\overrightarrow{2B}$-параболічною.

У випадку, коли $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = b \geq 1$, ця система називається B-параболічною, при цьому

$$\mathrm{Re}\lambda \leq -\delta_0|\sigma|^{2b}$$

і в (1) сумування проводиться так: $|k| + 2j \leq 2b$.

2. Розв'язування задачі (1), (2) проводимо у випадку сталих коефіцієнтів. Для простоти викладок розглянемо одне рівняння. Нехай $h \leq t \leq 2h$. Тоді рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{|k|+2j\leq 2b} A_{kj} D_{x'}^k B_{x_n}^j u(t,x) +$$

$$+ f(t,x,\varphi(t-h,x)). \qquad (3)$$

Розв'язок рівняння (3) будемо шукати у вигляді перетворення Фур'є-Бесселя від шуканої функції v: $\Pi^+ \to E$

$$u(t,x) = c_\nu \int\limits_{E_n^+} e^{i(x',\sigma')} v(t,\sigma) j_\nu(x_n,\sigma_n)\sigma_n^{2\nu-1} d\sigma,$$

$$\nu > -\frac{1}{2}, c_\nu = (2\pi)^{-n} 2^{-2\nu}\Gamma^{-2}(\nu+1). \qquad (4)$$

Тоді для визначення функції v отримаємо таку задачу Коші

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} = A(\sigma)v(t,\sigma) + \tilde{f}(t,t-h,\sigma), \qquad (5)$$

$$v(h,\sigma) = \tilde{\varphi}(h,\sigma), \qquad (6)$$

де $\tilde{f}$, $\tilde{\varphi}$ – перетворення Фур'є-Бесселя (4) функцій f і φ відповідно, $A(\sigma) \equiv \sum\limits_{|k|+2j\leq 2b} A_{kj}(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^j$. Функція

$$v(t,\sigma) = e^{A(\sigma)(t-h)}\tilde{\varphi}(h,\sigma) +$$

$$+ \int\limits_h^t e^{A(\sigma)(t-\tau)} \tilde{f}(\tau,\tau-h,\sigma)d\tau, \qquad (7)$$

$\sigma \in E_n$, $h \leq t \leq 2h$ є розв'язком задачі (5), (6) в околі точки $(h,\varphi(h,\sigma))$, якщо f і φ неперервні в області визначення і функція f задовольняє одну з умов, що забезпечує єдиність розв'язку задачі (5), (6).

Якщо підставити (7) в (4), то отримаємо, що

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n^+} G(t-h,x'-\xi',x_n)\varphi(h,\xi)\xi_n^{2\nu-1}d\xi +$$

$$+ \int\limits_{E_n^+} \Big(\int\limits_h^t G(t-\tau,x'-\xi',x_n) \times$$

$$\times f(\tau,\xi,\varphi(\tau-h,\xi)d\tau\Big)\xi^{2\nu-1}d\xi,$$

де $h \leq t \leq 2h$, $x \in \mathbb{R}^n$, $Q(t-y,\sigma) = \exp\{A(\sigma)(t-y)\}$,

$$G(t-y,x'-\xi',x_n) = c_\nu' \int\limits_{E_n^+} e^{i(x'-\xi',\sigma')}Q(t-y,\sigma) \times$$

$$\times J_\nu(\xi_n\sigma_n)J_\nu(\sigma_n x_n)\sigma_n^{2\nu-1}d\sigma.$$

Нехай $kh \leq t \leq (k+1)h$, $k > 1$, $x \in E_n$. Тоді виразом

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n^+} G(t-kh,x'-\xi',x_n)\varphi(kh,\xi)\xi_n^{2\nu-1}d\xi +$$

$$+ \int\limits_{E_n^+} \Big[\int\limits_{kh}^t G(t-\tau,x'-\xi',x_n)f(\tau,\xi,\varphi(\tau-h,\xi))d\tau\Big] d\xi \qquad (8)$$

визначається формула для єдиного розв'язку задачі Коші (1), (2).

Теорема. *Якщо рівняння (1) B-параболічне, його коефіцієнти задовольняють умови теореми 2.1 [1, стор. 21],* *функції* f, φ *неперервні в області визначення і* f *задовольняє одну з умов, що забезпечує єдиність розв'язку задачі* (5), (6), *то формулою* (8) *визначається єдиний розв'язок задачі Коші* (1), (2).

3. Обґрунтування формули (8)**.** У монографії [1, п. 1.3] спочатку вивчено перетворення Фур'є-Бесселя цілих функцій, а в §2 обґрунтовано класичну розв'язність задачі Коші для систем, коефіцієнти яких залежать від t. Спочатку проведена оцінка (2.7) нормальної фундаментальної матриці Q, описано її властивості. Визначені властивості матриці Q дозволяють за допомогою леми про перетворення Фур'є-Бесселя цілої функції встановити теорему 2.1 [1, стор. 21] про функцію Гріна $G(t, \tau, x, \xi)$. Наведені оцінки (2.12), (2.15) є точні, бо для рівняння Бельтрамі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\nu + 1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

ці нерівності перетворюються в рівності

$$G(t, x) = 2^{-\nu-1}\Gamma^{-1}(\nu + 1)t^{-\nu-1}\exp\Big\{-\frac{x^2}{4t}\Big\}.$$

Даний результат вірний для системи B-параболічних рівнянь з коефіцієнтами, залежними від часової змінної [1].

4. Зауваження

Зауваження 1 ([4, стор. 19]). Навіть у випадку існування неперервних похідних від початкової функції φ і неоднорідності f по t як завгодно високого порядку розв'язок основної початкової задачі буде, взагалі кажучи, мати розрив першого роду (похідна порядку k в точці $t_0 + (k-1)h$, але похідні нижчих порядків у цій точці уже неперервні, тут t_0 – початкова точка).

Зауваження 2 ([4, стор. 20]). Метод послідовного інтегрування розповсюджується і на диференціальні рівняння з запізнюючим аргументом з неперервним змінним запізненням $h = \tau(t)$. Випадок, коли процес послідовного визначення розв'язку не може бути продовженим далі деякої точки $\bar{t} > t_0$ називається особливим. Він може, очевидно, наступити лише у випадку перетворення функції $\tau(t)$ в нуль у точці $\bar{t}$. Щоб охопити цей випадок, застосовується принцип стиснутих відображень до рівняння із запізненням.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Матійчук М.І. Параболічні сингулярні крайові задачі / М.І. Матійчук. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
2. Городецький В.В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В.В. Городецький. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.
3. Городецький В.В. Задача Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку / В.В. Городецький. – Чернівці: Рута, 2005. – 291 с.
4. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. – М.: Наука, 1964. – 296 с.