

ПРО ПОЛІНОМІАЛЬНІСТЬ НАРІЗНО ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ВІД БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Доведені теореми про сукупну поліноміальність нарізно поліноміальних функцій від багатьох змінних, зокрема, знайдений загальний вигляд нарізно поліноміальних відображень $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow K$, де X_k — підмножини довільного поля K і f є поліномом фіксованого степеня m_k відносно кожної змінної x_k , за умови, що $|X_k| > m_k$ для всіх k , крім, можливо, одного.

We prove theorems on the joint polynomiality of separately polynomial functions of several variables. In particular, we obtain a general representation of separately polynomial mappings $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow K$ for the case where every X_k is a subset of a field K , f is polynomial of a fixed power m_k with respect to each variable x_k and $|X_k| > m_k$ for all k except for at most one.

1. Вступ. Нехай K — довільне поле і Z — векторний простір над полем K . Поліномом від n змінних на полі K з коефіцієнтами з простору Z називається відображення $f : K^n \rightarrow Z$, яке має вигляд

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^N a_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n},$$

де $a_{k_1, \dots, k_n}$ — довільні вектори з простору Z . Символом $\mathbb{K}$ позначимо поле $\mathbb{R}$ дійсних чисел або поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Якщо $E \subseteq K^n$, то функцію $f : E \rightarrow Z$ називають *поліноміальною*, якщо існує такий поліном $g : K^n \rightarrow Z$, що $g|_E = f$. При $n > 1$ поліноміальну функцію $f : E \rightarrow Z$ називають *сукупно поліноміальною* або *поліноміальною за сукупністю змінних*.

Для точки $a = (a_1, \dots, a_n)$ з K^n і номера $k = 1, \dots, n$ покладемо $\widehat{a}_k = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n)$. Зрозуміло, що $\widehat{a}_k \in K^{n-1}$. Покладаючи

$$q_{\widehat{a}_k}(x_k) = (a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

для довільного $k = 1, \dots, n$, $a \in K^n$ і $x_k \in K$, ми одержимо відображення $q_{\widehat{a}_k} : K \rightarrow K^n$. Для множини $E \subseteq K^n$, і точки $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$ і номера $k = 1, \dots, n$ введемо множини $E_{\widehat{a}_k} = q_{\widehat{a}_k}^{-1}(E)$. Відображення $f : E \rightarrow Z$ називається *нарізно поліноміальним*, якщо для кожної точки $a \in E$ і довіль-

ного $k = 1, \dots, n$ відображення $f_{\widehat{a}_k} = f \circ q_{\widehat{a}_k} : E_{\widehat{a}_k} \rightarrow Z$ буде поліноміальним.

Нехай $\vec{m} = (m_1, \dots, m_n)$ — набір з n невід'ємних цілих чисел і $E \subseteq K^n$. Нарізно поліноміальне відображення $f : E \rightarrow Z$ називається $\vec{m}$ -*поліноміальним*, якщо для кожної точки $a \in K^n$ і довільного номера $k = 1, \dots, n$ поліноміальне відображення $f_{\widehat{a}_k} : E_k \rightarrow Z$ є звуженням полінома $g : K \rightarrow Z$, степінь якого не перевищує m_k . Символ $|M|$ означає потужність множини M .

У випадку $E = X_1 \times \dots \times X_n$, де $X_k \subseteq K$ при $k = 1, \dots, n$, у праці [1] було дано необхідні і достатні умови для того, щоб кожна нарізно поліноміальна функція $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow K$ була поліноміальною за сукупністю змінних. Для довільної множини E питання про сукупну поліноміальність нарізно поліноміальних функцій $f : E \rightarrow K$ ще не дуже добре вивчене, хоча часткові відповіді на нього були отримані в [2].

У цій статті ми продовжуємо дослідження зв'язків між нарізною і сукупною поліноміальністю функцій багатьох змінних. Спочатку ми переносимо на випадок довільного n доведену в [3] при $n = 2$ теорему про загальний вигляд $\vec{m}$ -поліноміальних відображень для $E = X_1 \times \dots \times X_n$.

Далі ми розглядаємо питання про сукупну поліноміальність нарізно поліноміальних відображень $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Z$,

де $X_1, \dots, X_n$ і Z – векторні простори. Модифікуючи конструкцію С.Мазура і В.Орлича [4], ми будемо явний приклад нарізно поліноміальної функції $f : \mathbb{K}^\infty \times \mathbb{K}^\infty \rightarrow \mathbb{K}$, де $\mathbb{K}^\infty$ – простір фінітних послідовностей скалярів, яке не є сукупно поліноміальною. Нарешті, ми доводимо, що для комплексних банахових просторів $X_1, \dots, X_n$ кожна нарізно неперервна і нарізно поліноміальна функція $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{C}$ буде поліноміальною за сукупністю змінних (цей результат був анонсований в [5]).

2. Загальний вигляд $\vec{m}$ -поліноміальних відображень.

Теорема 2. Нехай $\vec{m} = (m_1, \dots, m_n)$ – довільний набір з n невід’ємних цілих чисел, $E = X_1 \times \dots \times X_n$ – добуток довільних підмножин поля K , таких, що $|X_k| > m_k$ для всіх $k = 1, \dots, n$, крім, можливо, одного, і $f : E \rightarrow K$ – $\vec{m}$ -поліноміальне відображення. Тоді існують такі елементи $a_{k_1, \dots, k_n}$ з поля K , що

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \dots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}.$$

Доведення. При $n = 1$ доводити нічого, при $n = 2$ відповідне твердження було доведено в [3].

Нехай $n > 2$ і відповідне твердження справджується, коли кількість змінних дорівнює $n - 1$. Доведемо, що тоді воно справджується і для n змінних, як у формулюванні теореми.

Нехай $\vec{m}, E$ і f – такі, як у формулюванні теореми. Будемо вважати для певності, що $|X_n| > m_n$. Покладемо $X = X_1 \times \dots \times X_{n-1}$ і $Y = X_n$. Тоді $E = X_1 \times \dots \times X_{n-1} \times X_n = X \times Y$. За умовою, для кожного $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ функція $f_x(y) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$, де $y = x_n \in Y$, є m_n -поліноміальною, тобто існує такий поліном $p_x(y) = \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_n}(x) y^{k_n}$, що $f_x(y) = p_x(y)$ для кожного $y \in Y$. Оскільки $|Y| = |X_n| > m_n$, то в множині Y ми можемо знайти $m_n + 1$ різних точок $y_0, \dots, y_{m_n}$. Підставляючи їх замість y у рівність

$$f(x, y) = \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_n}(x) y^{k_n},$$

отримаємо при $j = 0, 1, \dots, m_n$ рівності

$$\sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_n}(x) y_j^{k_n} = f(x, y_j) = f_{y_j}(x).$$

Оскільки f – це $\vec{m}$ -поліноміальна функція, то для кожного $\vec{j} = 0, \dots, m_n$ функція $f_{y_j} : X \rightarrow K$ буде $\vec{l}$ -поліноміальною, де $\vec{l} = (m_1, \dots, m_{n-1})$. За індуктивним припущенням для кожного $j = 0, \dots, m_n$ існують такі елементи $a_{k_1, \dots, k_{n-1}}^j \in K$, що

$$f_{y_j}(x) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \dots \sum_{k_{n-1}=0}^{m_{n-1}} a_{k_1, \dots, k_{n-1}}^j x_1^{k_1} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}}.$$

Розглянемо визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & y_0 & \dots & y_0^{m_n} \\ 1 & y_1 & \dots & y_1^{m_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & \dots & y_n^{m_n} \end{vmatrix}$$

і $\Delta_{k_n}(x)$, який отримується з визначника Δ шляхом заміни елементів $y_0^{k_n}, y_1^{k_n}, \dots, y_n^{k_n}$ його k_n -го стовпчика, де $k_n = 0, 1, \dots, m_n$ на елементи $f_{y_0}(x), f_{y_1}(x), \dots, f_{y_{m_n}}(x)$ відповідно.

Визначник Δ – це визначник Вандермонда [6], для якого

$$\Delta = \prod_{0 \leq i < j \leq m_n} (y_j - y_i),$$

зокрема, $\Delta \neq 0$. Тому за формулами Крамера

$$a_{k_n}(x) = \frac{\Delta_{k_n}(x)}{\Delta}$$

для кожного $k_n = 0, 1, \dots, m_n$. Розкладаючи визначник $\Delta_{k_n}(x)$ по елементах k_n -го стовпчика, отримаємо, що

$$\Delta_{k_n}(x) = \sum_{j=0}^{m_n} a_{k_n, j} f_{y_j}(x),$$

де $a_{k_n, j}$ – алгебраїчне доповнення до елемента $f_j(x)$ у визначнику $\Delta_{k_n}(x)$, яке не залежить від x , а тільки від вибраних елементів $y_0, \dots, y_{m_n}$. Тоді, поклавши $\tilde{a}_{k_n, j} = \frac{a_{k_n, j}}{\Delta}$, і використавши формули для Δ_{k_n} і $f_{y_j}(x)$ отримаємо:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x, y) = \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_n}(x) y^{k_n} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

де $a_{k_1, \dots, k_n} = \sum_{j=0}^{m_n} a_{k_n, j} a_{k_1, \dots, k_{n-1}}^j$. Таким чином, теорема доведена.

3. Приклад нарізно поліноміального і не поліноміального відображення.

С. Банах запропонував загальне означення полінома $f: X \rightarrow Y$, де X, Y — довільні векторні простори над одним і тим самим полем $\mathbb{K}$. Такі поліноми вперше почали досліджувати С. Мазур і В. Орлич у [4]. Нагадаємо, що відображення $f: X \rightarrow Y$ називається *n-однорідним поліномом*, якщо існує таке *n-лінійне* відображення $g: X^n \rightarrow Y$, що $g(x, \dots, x) = f(x)$ на X , і просто *поліномом* степеня $\leq m$, якщо існують такі *k-однорідні* поліноми $f_k: X_k \rightarrow Y$ при $k = 0, 1, \dots, m$, що $f = \sum_{k=0}^m f_k$. Аналогічно до попереднього можна ввести поняття нарізно і сукупно поліноміальних відображень чи $\vec{m}$ -поліноміальних $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$, заданих на добутках векторних просторів, чи навіть їх підмножинах.

Довільні нарізно поліноміальні відображення $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ вже можуть не бути поліноміальними за сукупністю змінних. Так, в [4] для довільних нескінченновимірних просторів $X_1, \dots, X_n$ і ненульового векторного простору Y , було доведено існування нарізно поліноміальних відображень $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$, які не є поліноміальними. Використовуючи ідею Мазура-Орлича, ми можемо навести приклад нарізно поліноміального і не поліноміального відображення.

Теорема 2. Формулою $f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k \eta_k)^k$, де $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ і $y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ — довільні елементи з $\mathbb{K}^{\infty}$, визначається нарізно поліноміальна функція $f: \mathbb{K}^{\infty} \times \mathbb{K}^{\infty} \rightarrow \mathbb{K}$, яка не є поліномом.

Доведення. Доведемо, що f — нарізно поліноміальна функція. Зафіксуємо довільний елемент $y = (\eta_1, \dots, \eta_m, \dots, 0, 0, \dots)$ з про-

стору $\mathbb{K}^{\infty}$. Тоді для $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\infty}$

$$f_y(x) = f(x, y) = \sum_{k=1}^m (\xi_k \eta_k)^k = \sum_{k=1}^m \alpha_k \xi_k^k,$$

де $\alpha_k = \eta_k^k \in \mathbb{K}$ при $k = 1, \dots, m$. Кожна функція $g_k(x) = \alpha_k \xi_k^k$ — це *k-однорідний* поліном на просторі $\mathbb{K}^{\infty}$. Справді, функція $h_k(x_1, \dots, x_k) = \alpha_k \xi_{1,k} \dots \xi_{k,k}$, де $x_j = (\xi_{j,s})_{s=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\infty}$, є *n-лінійною* на $\mathbb{K}^n$ і

$$h_k(x, \dots, x) = \alpha_k \xi_k \dots \xi_k = \alpha_k \xi_k^k$$

для довільного $x = (\xi_s)_{s=1}^{\infty}$. Отже, функція $f_y(x) = \sum_{k=1}^m g_k(x)$ — це поліном, степеня $\leq m$. Так само і всі функції $f^x(y) = \sum_{k=1}^n \beta_k \eta_k^k$, де $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \dots) \in \mathbb{K}$ і $\beta_k = \xi_k^k$ — це поліноми на $\mathbb{K}^{\infty}$.

Доведемо, що f не є поліноміальною функцією на $\mathbb{K}^{\infty} \times \mathbb{K}^{\infty}$. Нехай це не так. Тоді існують такі *k-однорідні* поліноми f_k , що $f = \sum_{k=0}^N f_k$. Для кожного $p \in (\mathbb{K}^{\infty})^2$ і довільного $\lambda \in \mathbb{K}$ будемо мати

$$f(\lambda p) = \sum_{k=0}^N f_k(\lambda p) = \sum_{k=0}^N \lambda^k f_k(p) = \sum_{k=0}^N a_k \lambda^k,$$

де $a_k = f_k(p)$. Отже, функція $g(\lambda) = f(\lambda p)$ — це поліном степеня $\leq N$.

Розглянемо орти $e_j = (\delta_{j,k})_{k=1}^{\infty}$, де $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}$ — символ Кронекера, і точку $p_0 = (e_{N+1}, e_{N+1})$.

Для неї $\lambda p_0 = (\lambda e_{N+1}, \lambda e_{N+1})$, причому $\lambda e_{N+1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_N, \underbrace{\lambda}_{N+1}, 0, 0, \dots)$. Тому

$$f(\lambda p_0) = (\lambda \lambda)^{N+1} = \lambda^{2N+2}.$$

Ясно, що $f(\lambda p_0)$ — це многочлен степеня $2N + 2$, який більший від N , що приводить до суперечності.

4. Поліноміальність нарізно поліноміальних комплекснозначних функціоналів від багатьох змінних.

Теорема 3. Нехай $X_1, \dots, X_n$ — комплексні банахові простори і $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{C}$ — нарізно неперервна і нарізно поліноміальна функція. Тоді f — неперервний поліном на добутку $X = X_1 \times \dots \times X_n$.

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n . При $n = 1$ наше твердження тривіальне. Припустимо, що $n > 1$ і наше твердження справедливе, коли кількість співмножників дорівнює $n - 1$. Доведемо, що тоді воно буде справедливим і коли кількість співмножників дорівнює n як у формулюванні теореми. Як і в доведенні теореми 1 покладемо $X = X_1 \times \dots \times X_{n-1}$, $Y = X_n$ і $f(x, y) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, де $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in X$ і $y = x_n \in Y$.

Зрозуміло, що для кожного $y \in Y$ функція $f_y : X \rightarrow \mathbb{C}$, де $f_y(x) = f(x, y)$ є нарізно поліноміальною і нарізно неперервною. Тоді за індуктивним припущенням f_y — це неперервний поліном на X . Функція $f^x : Y \rightarrow \mathbb{C}$, $f^x(y) = f(x, y)$ теж буде неперервним поліномом, бо f — неперервна і поліноміальна відносно останньої змінної. Таким чином $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ — це нарізно неперервна і нарізно поліноміальна функція. Оскільки добуток $X = X_1 \times \dots \times X_n$ є банаховим простором, то за наслідком 2 з [5] f буде неперервним поліномом на добутку $X \times Y = X_1 \times \dots \times X_n$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Косован В.М., Маслюченко В.К. Нарізно поліноміальні функції // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. В.374. Математика. — 2008. — С. 66-74.
2. Косован В.М., Маслюченко В.К. Нарізно і сукупно поліноміальні функції на довільних підмножинах $\mathbb{R}^n$ // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. В.454. Математика. — 2009. — С. 50-53.
3. Косован В.М., Маслюченко В.К. Про (m, n) -поліноміальні функції на добутках та нарізно поліноміальні функції на хрестах // Наук. Вісн. Чернів. ун-ту. Серія: Мат. 2-3(3), — 2012. — С.108-113
4. Mazur S., Orlich W. Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen // Studia Math. — 1935. — 5 — S.50-68.
5. Косован В.М., Маслюченко В.К. Про поліноміальність нарізно поліноміальних функцій // Мат. вісн. НТШ — 2008. — 5 — С.89-96.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1971. — 432 с.