УДК 517.956.4

©2012 р. **А.О. Данилюк, М.І. Матійчук**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРОМ ТИПУ ФРЕДГОЛЬМА

Доведено теорему про коректну розв'язність задачі Коші для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь з оператором Фредгольма. Встановлено умови існування фундаментальної матриці розв'язків.

The theorem about the correctness of the Cauchy problem for the parabolic system of integro-differential equations with Fredholm operator has been proved. The existence conditions of the fundamental matrix of solutions have been established.

Існує завершена теорія коректної розв'язності задачі Коші для параболічних систем [1-3]. Теоретичний інтерес становить подальше дослідження задач для параболічних систем, що піддаються імпульсній дії, з псевдодиференціальними операторами, різними особливостями в коефіцієнтах системи, виродженнями на початковій гіперплощині та ін.

У даній статті розглядається задача Коші для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь, що містить оператор Фредгольма. Подібна задача, тільки з оператором Вольтерри-Фредгольма, досліджувалась в [5], а відповідна крайова задача — в [6]. Головна відмінність тут полягає в оцінках, одержаних для об'ємного потенціалу W, що є складовою фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) Γ. Також важливим є встановлення диференціальних властивостей ядра K інтегрального оператора вихідної системи для коректної розв'язності задачі Коші.

В області $\Pi = (0,T) \times E_n$ розглянемо задачу Коші для параболічної системи N інтегро-диференціальних рівнянь, що містить оператор Фредгольма

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k| \le 2b} A_k(t,x) D_x^k u +$$
$$+ \int_{E_n} K(t,x,\xi) u(t,\xi)\, d\xi + f(t,x), \qquad (1)$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x). \qquad (2)$$

Правильна наступна теорема.

Теорема. *Нехай система (1) рівномірно параболічна, коефіцієнти системи* $A_k(t,x)$ *визначені в шарі* Π, *неперервні по* t, *причому рівномірно щодо* x *при* $|k| = 2b$, $A_k \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$. *Елементи ядра* $K = (K_{ij})_{i,j=1}^N$ *інтегрального оператора системи задовольняють нерівності*

$$|D_x^m K_{ij}(t,x,\xi)| \le C_m t^{-\frac{n+|m|+2b-\alpha}{2b}} e^{-c\rho(t,x,\xi)}, \qquad (3)$$

$$t > 0, \quad x,\xi \in E_n, \quad |m| = 0,1,$$

$$\rho(t,\tau,x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{|x_i-\xi_i|}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^q, \quad q = \tfrac{2b}{2b-1},$$

$$\rho(t,x,\xi) \equiv \rho(t,0,x,\xi).$$

Тоді існує ФМР $\Gamma(t,\tau,x,\xi)$ *системи (1), за допомогою якої розв'язок задачі Коші (1)-(2) за умов* $\varphi \in C(E_n)$, $f \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$ *визначається формулою*

$$u(t,x) = \int_{E_n} \Gamma(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} \Gamma(t,\tau,x,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi \qquad (4)$$

і

$$|D_x^k u| \le C(t^{-\frac{|k|}{2b}} |\varphi|_C + |f|_\alpha), \qquad (5)$$

$$t > 0, \quad x \in E_n, \quad |k| \le 2b.$$

Тут

$$\Gamma(t,\tau,x,\xi) = Z(t,\tau,x,\xi) +$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{E_n} Z(t,\beta,x,z) R(\beta,\tau,z,\xi)\, dz \equiv Z + W, \tag{6}$$

R – резольвента відповідної системи інтегральних рівнянь Вольтерри-Фредгольма 2-го роду, повторні ядра якої виражаються через згортку інтегрального оператора K системи (1) та ФМР Z відповідної параболічної системи.

Для похідних об'ємного потенціалу W правильні оцінки

$$|D_x^k W(t,\tau,x,\xi)| \le C_k (t-\tau)^{-\frac{n+|k|-\alpha}{2b}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \times$$

$$\times (\nu_o + m)^{\frac{n}{2b}} \prod_{p=1}^{m} \tfrac{2b}{2b+(p-2)\alpha} e^{-(c_{\nu_o}-\varepsilon)\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)}, \tag{7}$$

$$|k| \le 2b, \quad t > \tau, \quad x,\xi \in E_n,$$

$$r_m \equiv \left(C_o C_\varepsilon \tilde{C}_\varepsilon 2^{\frac{n}{2b}} T^{\frac{\alpha}{2b}} \right)^{m-1},$$

$$c_{\nu_o} = c - \nu_o \varepsilon, \quad \nu_o = \left[\tfrac{n+2b}{\alpha}\right] + 1, \quad \varepsilon > 0.$$

Доведення. Побудуємо ФМР задачі Коші (1)-(2) та знайдемо оцінки для її похідних.

Введемо підстановку

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k| \le 2b} A_k(t,x) D_x^k u = y(t,x), \tag{8}$$

де $y(t,x)$ – невідома N-вектор-функція. Тоді задача (8)-(2) – це задача Коші для параболічної системи з неоднорідністю $y(t,x)$. Для цієї задачі Коші у припущенні, що $y \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$, розв'язок записується через ФМР Z у вигляді [1, с. 269]

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n} Z(t,0,x,\xi) \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{E_n} Z(t,\tau,x,\xi) y(\tau,\xi) d\xi \tag{9}$$

і для похідних Z правильні оцінки [1, с. 73]:

$$\left| D_x^k Z(t,\tau,x,\xi) \right| \le C_k (t-\tau)^{-\frac{n+|k|}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)},$$

$$|k| \le 2b,\ t > \tau,\ x,\xi \in E_n. \tag{10}$$

Підставимо вираз для u (9) у вихідну систему (1):

$$y(t,x) = f(t,x) +$$

$$+ \int\limits_{E_n} K(t,x,\xi) \Bigg(\int\limits_{E_n} Z(t,0,\xi,z) \varphi(z) dz \Bigg) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{E_n} K(t,x,\xi) \Bigg(\int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{E_n} Z(t,\tau,\xi,z) y(\tau,z) dz \Bigg) d\xi. \tag{11}$$

Одержано інтегральне рівняння Вольтерри-Фредгольма 2-го роду відносно невідомої вектор-функції y. В останньому інтегралі змінимо порядок інтегрування, щоб виділити ядро інтегрального оператора

$$\int\limits_{E_n} K(t,x,\xi) \Bigg(\int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{E_n} Z(t,\tau,\xi,z) y(\tau,z) dz \Bigg) d\xi =$$

$$= \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{E_n} \Bigg(\int\limits_{E_n} K(t,x,z) Z(t,\tau,z,\xi) dz \Bigg) y(\tau,\xi) d\xi,$$

яке позначимо через

$$H(t,\tau,x,\xi) \equiv \int\limits_{E_n} K(t,x,z) Z(t,\tau,z,\xi) dz.$$

Тоді (11) набуде вигляду

$$y(t,x) = F(t,x) + \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{E_n} H(t,\tau,x,\xi) y(\tau,\xi) d\xi, \tag{12}$$

де

$$F(t,x) \equiv f(t,x) + \int\limits_{E_n} H(t,0,x,\xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Згідно з теорією інтегральних рівнянь з регулярним чи квазірегулярним ядром ядру $H(t,\tau,x,\xi)$ відповідає резольвента

$$R(t,\tau,x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu(t,\tau,x,\xi),$$

$$H_\nu(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{E_n} H_1(t,\beta,x,z) H_{\nu-1}(\beta,\tau,z,\xi) dz,$$

$$\nu = 2,3,..., \quad H_1 = H.$$

Тоді розв'язок рівняння (12) зобразиться у вигляді

$$y(t,x) = F(t,x) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} R(t,\tau,x,\xi)F(\tau,\xi)d\xi.$$

Якщо підставити його у зображення для u (9), то розв'язок вихідної задачі Коші (1)-(2) через оператор символічної згортки набуде вигляду:

$$u = Z * \varphi + Z * *f + Z * *(R * *f) +$$

$$+Z * *[(H + R * *H) * \varphi] =$$

$$= \{Z + Z * *R\} * \varphi + \{Z + Z * *R\} * *f.$$

Отже, виділено ядро Г (6) оберненого оператора задачі Коші (1)-(2), за допомогою якого розв'язок вихідної задачі записується у вигляді (4).

Визначимо, за яких умов можна побудувати резольвенту R для існування ФМР Г. Для цього встановимо спочатку у вигляді леми наступну нерівність, яку будемо використовувати при подальших оцінках.

Лема. *Для функції*

$$\rho(t,\tau,x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i - \xi_i|}{(t-\tau)^{1/2b}} \right)^q, \quad q = \frac{2b}{2b-1}$$

справджується нерівність

$$\rho(t,\tau,x,y) + \rho(\beta,\theta,y,\xi) \geq \rho(t+\beta-\tau,\theta,x,\xi),$$

$$t > \tau > 0, \quad \beta > \theta > 0, \quad x,y,\xi \in E_n. \quad (13)$$

Доведення. Якщо $y = x = \xi$, маємо тривіальний випадок. Якщо $y = x, y \neq \xi$ або $y = \xi, y \neq x$, нерівність очевидна.

Розглянемо загальний випадок, коли $y \neq x, y \neq \xi$. Оскільки ліва частина нерівності

$$\rho(t,\tau,x,y) + \rho(\beta,\theta,y,\xi) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i - y_i|^q}{(t-\tau)^{q/2b}} + \frac{|y_i - \xi_i|^q}{(\beta-\theta)^{q/2b}} \right) \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i)$$

– додатна функція для довільних $x, y, \xi \in E_n, t > \tau, \beta > \theta$, то її мінімум дорівнює сумі мінімумів функцій f_i. Знайдемо цей мінімум:

$$f_i'(y_i) = -\frac{q|x_i - y_i|^{q-1} sgn(x_i - y_i)}{(t-\tau)^{q-1}} +$$

$$+\frac{q|y_i - \xi_i|^{q-1} sgn(y_i - \xi_i)}{(\beta-\theta)^{q-1}}, \quad q/2b = q-1;$$

$$f_i'(y_i) = 0:$$

$$\frac{|x_i - y_i|^{q-1} sgn(x_i - y_i)}{(t-\tau)^{q/2b}} = \frac{|y_i - \xi_i|^{q-1} sgn(y_i - \xi_i)}{(\beta-\theta)^{q/2b}}.$$

Розглянемо випадки.

$$1) x_i > y_i > \xi_i: \quad \frac{(x_i - y_i)^{q-1}}{(t-\tau)^{q-1}} = \frac{(y_i - \xi_i)^{q-1}}{(\beta-\theta)^{q-1}}.$$

Тоді

$$\frac{x_i - y_i}{t - \tau} = \frac{y_i - \xi_i}{\beta - \theta}$$

і

$$y_i^o = \frac{t-\tau}{t+\beta-\tau-\theta}\xi_i + \frac{\beta-\theta}{t+\beta-\tau-\theta}x_i$$

– стаціонарна точка.

$$2) x_i < y_i < \xi_i: -\frac{(y_i - x_i)^{q-1}}{(t-\tau)^{q-1}} = -\frac{(\xi_i - y_i)^{q-1}}{(\beta-\theta)^{q-1}}.$$

Домноживши на -1, маємо перший випадок.

$$3) x_i < y_i, y_i > \xi_i: -\frac{(y_i - x_i)^{q-1}}{(t-\tau)^{q-1}} = \frac{(y_i - \xi_i)^{q-1}}{(\beta-\theta)^{q-1}}.$$

Оскільки зліва від'ємна величина, а справа – додатна, то дана рівність розв'язків не має.

$$4) x_i > y_i, y_i < \xi_i: \frac{(x_i - y_i)^{q-1}}{(t-\tau)^{q-1}} = -\frac{(\xi_i - y_i)^{q-1}}{(\beta-\theta)^{q-1}}.$$

Аналогічно 3-му випадку розв'язків немає.

Покажемо, що y_i^o – точка мінімуму. Для цього вирахуємо другу похідну в цій точці:

$$f_i'' = \frac{q(q-1)|x_i - y_i|^{q-2}(sgn(x_i - y_i))^2}{(t-\tau)^{q-1}} +$$

$$+\frac{q(q-1)|y_i - \xi_i|^{q-2}(sgn(y_i - \xi_i))^2}{(\beta-\theta)^{q-1}};$$

$$f_i''(y_i^o) = \frac{q(q-1)|x_i - \xi_i|^{q-2}}{(t+\beta-\tau-\theta)^{q-2}} \left[\frac{1}{t-\tau} + \frac{1}{\beta-\theta} \right].$$

Очевидно, що $f_i''(y_i^o) > 0 \ \forall x_i, \xi_i \in E_1, x_i \neq \xi_i, t > \tau, \beta > \theta$. Отже, в точці y_i^o функція f_i набуває свого мінімального значення

$$f_i(y_i^o) = \frac{|x_i - \xi_i|^q}{(t+\beta-\tau-\theta)^{q/2b}}.$$

А це означає, що виконується нерівність (13).

Лему доведено.

Припустимо, що ядро K інтегрального оператора системи (1) задовольняє нерівність (3). Оцінимо ядро H, користуючись оцінками (3) та (10):

$$|H(t,\tau,x,\xi)| \leq \int\limits_{E_n} |K(t,x,z)||Z(t,\tau,z,\xi)|dz \leq$$

$$\leq C_o \int\limits_{E_n} \frac{e^{-c\rho(t,x,z)}}{t^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}} \cdot \frac{e^{-c\rho(t,\tau,z,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2b}}} dz.$$

Згідно з лемою правильна наступна нерівність

$$\rho(t,x,z) + \rho(t,\tau,z,\xi) \geq \rho(2t,\tau,x,\xi).$$

Тоді

$$|H| \leq C_o \frac{e^{-(c-\varepsilon)\rho(2t,\tau,x,\xi)}}{t^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}} \int\limits_{E_n} e^{-\varepsilon\rho(t,x,z)} \frac{e^{-\varepsilon\rho(t,\tau,z,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2b}}} dz.$$

Тут $e^{-\varepsilon\rho(t,x,z)}$ оцінюється одиницею, а об'ємний інтеграл є інтегралом типу інтеграла Пуассона, що дорівнює $C_\varepsilon = Const(\varepsilon, b, n)$.

Отже,

$$|H(t,\tau,x,\xi)| \leq C_o C_\varepsilon t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} e^{-(c-\varepsilon)\rho(2t,\tau,x,\xi)},$$

$$t > \tau, \quad x,\xi \in E_n.$$

Далі оцінимо повторні ядра

$$H_2(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{E_n} H_1(t,\beta,x,z) H_1(\beta,\tau,z,\xi) dz.$$

Для оцінки H_2 знову відповідно до леми скористаємось нерівністю

$$\rho(2t,\beta,x,z) + \rho(2\beta,\tau,z,\xi) \geq \rho(2t+\beta,\tau,x,\xi) \geq$$

$$\geq \rho(3t,\tau,x,\xi),$$

оскільки $\beta \leq t$. У результаті одержимо

$$|H_2(t,\tau,x,\xi)| \leq C_o^2 C_\varepsilon^2 t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} e^{-(c-2\varepsilon)\rho(3t,\tau,x,\xi)} \times$$

$$\times \int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{\beta^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} \int\limits_{E_n} e^{-\varepsilon\rho(2t,\beta,x,z)} \frac{e^{-\varepsilon\rho(2\beta,\tau,z,\xi)}}{\beta^{\frac{n}{2b}}} dz \leq$$

$$\leq C_o^2 C_\varepsilon^2 \, t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} e^{-(c-2\varepsilon)\rho(3t,\tau,x,\xi)} 2^{\frac{n}{2b}} \times$$

$$\times \int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{\beta^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} \int\limits_{E_n} \frac{e^{-\varepsilon\rho(2\beta,z,\xi)}}{(2\beta)^{\frac{n}{2b}}} dz \leq$$

$$\leq C_o^2 C_\varepsilon^3 \, 2^{\frac{n}{2b}} \, \tfrac{2b}{\alpha} \, t^{-\frac{n+2b-2\alpha}{2b}} e^{-(c-2\varepsilon)\rho(3t,\tau,x,\xi)},$$

$$t > \tau, \quad x,\xi \in E_n.$$

Тут

$$\rho(2\beta,\tau,z,\xi) \geq \rho(2\beta,z,\xi).$$

Аналогічними міркуваннями встановлюється оцінка для H_3:

$$|H_3(t,\tau,x,\xi)| \leq C_o^3 C_\varepsilon^4 \, 2^{\frac{n}{2b}} 3^{\frac{n}{2b}} \, \tfrac{2b}{\alpha} \, t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \times$$

$$\times e^{-(c-3\varepsilon)\rho(4t,\tau,x,\xi)} \int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{\beta^{\frac{2b-2\alpha}{2b}}} \int\limits_{E_n} \frac{e^{-\varepsilon\rho(3\beta,z,\xi)}}{(3\beta)^{\frac{n}{2b}}} dz \leq$$

$$\leq C_o^3 C_\varepsilon^5 \, 2^{\frac{n}{2b}} 3^{\frac{n}{2b}} \, \tfrac{2b}{\alpha} \, \tfrac{2b}{2\alpha} \, t^{-\frac{n+2b-3\alpha}{2b}} e^{-(c-3\varepsilon)\rho(4t,\tau,x,\xi)},$$

$$t > \tau, \quad x,\xi \in E_n.$$

По індукції будемо мати:

$$|H_\nu(t,\tau,x,\xi)| \leq C_o^\nu C_\varepsilon^{2\nu-1} \, 2^{\frac{n}{2b}} \cdot 3^{\frac{n}{2b}} \cdot \ldots \cdot \nu^{\frac{n}{2b}} \times$$

$$\times \tfrac{2b}{\alpha} \cdot \tfrac{2b}{2\alpha} \cdot \ldots \cdot \tfrac{2b}{(\nu-1)\alpha} \, t^{-\frac{n+2b-\nu\alpha}{2b}} e^{-(c-\nu\varepsilon)\rho((\nu+1)t,\tau,x,\xi)},$$

$$t > \tau, \quad x,\xi \in E_n, \quad \nu \geq 2.$$

З останньої нерівності видно, що, починаючи з $\nu \geq \nu_o = \left[\frac{n+2b}{\alpha}\right] + 1$, ядра не матимуть особливості і для H_{ν_o} правильна нерівність

$$|H_{\nu_o}(t,\tau,x,\xi)| \leq C_{\nu_o} e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+1)t,\tau,x,\xi)},$$

$$C_{\nu_o} \equiv C_o^{\nu_o} C_\varepsilon^{2\nu_o-1} \, 2^{\frac{n}{2b}} \cdot 3^{\frac{n}{2b}} \cdot \ldots \cdot \nu_o^{\frac{n}{2b}} \cdot \tfrac{2b}{\alpha} \cdot \tfrac{2b}{2\alpha} \cdot \ldots \cdot \tfrac{2b}{(\nu_o-1)\alpha},$$

$$c_{\nu_o} \equiv c - \nu_o\varepsilon, \; t > \tau, \; x,\xi \in E_n.$$

Оцінимо наступне ядро:

$$|H_{\nu_o+1}| \leq \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{E_n} |H_1(t,\beta,x,z)||H_{\nu_o}(\beta,\tau,z,\xi)| dz \leq$$

$$\leq C_o C_\varepsilon C_{\nu_o} 2^{\frac{n}{2b}} \, t^{-\frac{2b-\alpha}{2b}} e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+2)t,\tau,x,\xi)} \times$$

$$\times \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{E_n} \frac{e^{-(\nu_o-1)\varepsilon\rho(2t,\beta,x,z)}}{(2t)^{\frac{n}{2b}}} dz \leq$$

$$\leq C_o C_\varepsilon C_{\nu_o} \tilde{C}_\varepsilon \, 2^{\frac{n}{2b}} \, t^{\frac{\alpha}{2b}} e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+2)t,\tau,x,\xi)},$$

$$t > \tau, \quad x,\xi \in E_n.$$

Для всіх наступних ядер справедлива оцінка:

$$|H_{\nu_o+m}(t,\tau,x,\xi)| \le C_o^m C_\varepsilon^m C_{\nu_o} \tilde{C_\varepsilon}^m \left(2^{\frac{n}{2b}}\right)^m t^{\frac{m\alpha}{2b}} \times$$

$$\times \tfrac{2b}{2b+\alpha} \cdot \tfrac{2b}{2b+2\alpha} \cdot \ldots \cdot \tfrac{2b}{2b+(m-1)\alpha} e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m+1)t,\tau,x,\xi)},$$

$$t > \tau, \quad x,\xi \in E_n, \quad m \ge 1,$$

яка одержиться, коли в показнику експоненти відщеплювати від $c-\varepsilon$ величину c_{ν_o} і користуватись нерівністю

$$\rho(2t,\beta,x,z) + \rho((\nu_o+m)\beta,\tau,z,\xi) \ge$$

$$\ge \rho((\nu_o+m+1)t,\tau,x,\xi), \ \ \beta \le t,$$

у результаті чого матимемо інтеграл типу інтеграла Пуассона, який оцінюється величиною $\tilde{C}_\varepsilon$, а інтеграл по часовій змінній безпосередньо вираховується.

Далі розглянемо залишковий ряд $\sum\limits_{\nu=\nu_o+1}^{\infty} H_\nu$. За ознакою Даламбера мажорантний числовий ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(C_oC_\varepsilon\tilde{C}_\varepsilon 2^{\frac{n}{2b}}T^{\frac{\alpha}{2b}}\right)^m C_{\nu_o}\tfrac{2b}{2b+\alpha}\tfrac{2b}{2b+2\alpha}\cdots\tfrac{2b}{2b+(m-1)\alpha}$, де експонента оцінена одиницею, а $t \le T$, збігається, а звідси випливає рівномірна і абсолютна збіжність за критерієм Вейєрштрасса функціонального ряду $\sum\limits_{\nu=\nu_o+1}^{\infty} H_\nu$. Це дозволяє побудувати резольвенту, для якої з нерівностей для повторних ядер можна одержати наступну оцінку:

$$|R(t,\tau,x,\xi)| \le \sum_{m=1}^{\nu_o}|H_m| + \sum_{m=\nu_o+1}^{\infty}|H_m| \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{\nu_o} C_o^m C_\varepsilon^{2m-1}\frac{(m!)^{\frac{n}{2b}}}{(m-1)!}\Big(\frac{2b}{\alpha}\Big)^{m-1}\times$$

$$\times t^{-\frac{n+2b-m\alpha}{2b}} e^{-(c-m\varepsilon)\rho((m+1)t,\tau,x,\xi)} +$$

$$+C_{\nu_o}\sum_{m=\nu_o+1}^{\infty}(C_oC_\varepsilon\tilde{C}_\varepsilon 2^{\frac{n}{2b}}T^{\frac{\alpha}{2b}})^{m-\nu_o}\prod_{p=1}^{m-\nu_o}\tfrac{2b}{2b+(p-1)\alpha}\times$$

$$\times e^{-c_{\nu_o}\rho((m+1)t,\tau,x,\xi)} \le$$

$$\le t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} e^{-(c-\nu_o\varepsilon)\rho((\nu_o+1)t,\tau,x,\xi)} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\nu_o} C_o^m C_\varepsilon^{2m-1}\frac{(m!)^{\frac{n}{2b}}}{(m-1)!}\Big(\frac{2b}{\alpha}\Big)^{m-1} +$$

$$+C_{\nu_o}\sum_{m=1}^{\infty}(C_oC_\varepsilon\tilde{C}_\varepsilon 2^{\frac{n}{2b}}T^{\frac{\alpha}{2b}})^m\prod_{p=1}^{m}\tfrac{2b}{2b+(p-1)\alpha}\times$$

$$\times e^{-c_{\nu_o}\rho((m+\nu_o+1)t,\tau,x,\xi)} \le$$

$$\le C_1 r_1 \tfrac{2b}{2b-\alpha} t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+1)t,\tau,x,\xi)} +$$

$$+C_2 t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}}\sum_{m=2}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^{m}\tfrac{2b}{2b+(p-2)\alpha}\times$$

$$\times e^{-c_{\nu_o}\rho((m+\nu_o)t,\tau,x,\xi)} \le$$

$$\le C_R t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}}\sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^{m}\tfrac{2b}{2b+(p-2)\alpha}\times$$

$$\times e^{-c_{\nu_o}\rho((m+\nu_o)t,\tau,x,\xi)},$$

де

$$C_1 \equiv \sum_{m=1}^{\nu_o} C_o^m C_\varepsilon^{2m-1}\frac{(m!)^{\frac{n}{2b}}}{(m-1)!}\Big(\frac{2b}{\alpha}\Big)^{m-1}\frac{2b-\alpha}{2b},$$

$$C_2 \equiv C_{\nu_o}T^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}\ \tfrac{2b-\alpha}{2b}, \quad C_R \equiv \max\{C_1, C_2\},$$

$$r_m \equiv \left(C_oC_\varepsilon\tilde{C}_\varepsilon 2^{\frac{n}{2b}}T^{\frac{\alpha}{2b}}\right)^{m-1}.$$

Отже,

$$|R(t,\tau,x,\xi)| \le C_R t^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}}\times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^{m}\tfrac{2b}{2b+(p-2)\alpha} e^{-c_{\nu_o}\rho((m+\nu_o)t,\tau,x,\xi)}, \quad (14)$$

$$t > \tau, \ \ x,\xi \in E_n.$$

Далі покажемо, що функція y у розв'язку (9) є гельдеровою з показником α. Для цього встановимо спочатку оцінки для приростів ядер K, H та резольвенти R. Для ядра K правильна оцінка (3), з якої випливає оцінка для приросту ядра при $|\triangle x| \ge t^{1/2b}$:

$$\big|\triangle_x K(t,x,\xi)\big| \le |K(t,x+\triangle x,\xi)| + |K(t,x,\xi)| \le$$

$$\le C\Big[\frac{e^{-c\rho(t,x+\triangle x,\xi)}}{t^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}} + \frac{e^{-c\rho(t,x,\xi)}}{t^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}}\Big] \le$$

$$\le C\frac{|\triangle x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}}\big[e^{-c\rho(t,x+\triangle x,\xi)} + e^{-c\rho(t,x,\xi)}\big].$$

При $|\triangle x| < t^{1/2b}$ за теоремою Лагранжа одержимо

$$|\triangle_x K(t,x,\xi)| = |D_x K(t,x+\theta\triangle x,\xi)| \cdot |\triangle x| \le$$

$$\le C|\triangle x|\frac{e^{-c\rho(t,x+\theta\triangle x,\xi)}}{t^{\frac{n+2b+1-\alpha}{2b}}}.$$

За лемою з [4, с. 144] $\exists\, c_1 > 0$, що

$$e^{-c\left(\frac{|x+\theta\triangle x-\xi|}{t^{1/2b}}\right)^q} \le e^{-c_1\left(\frac{|x-\xi|}{t^{1/2b}}\right)^q} e^{c'\left(|\theta|\frac{|\triangle x|}{t^{1/2b}}\right)^q} \le$$

$$\le const\cdot e^{-c_1\left(\frac{|x-\xi|}{t^{1/2b}}\right)^q},$$

оскільки $\frac{|\triangle x|}{t^{1/2b}} < 1$. Тоді

$$\left|\triangle_x K(t,x,\xi)\right| \le C\frac{|\triangle x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}}\left(\frac{|\triangle x|}{t^{1/2b}}\right)^{1-\alpha} e^{-c_1\rho(t,x,\xi)} \le$$

$$\le C\frac{|\triangle x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}} e^{-c_1\rho(t,x,\xi)}.$$

Отже, для приросту інтегрального ядра K правильна оцінка

$$\left|\triangle_x K(t,x,\xi)\right| \le C\frac{|\triangle x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}}\left[e^{-c\rho(t,x+\triangle x,\xi)}+e^{-c\rho(t,x,\xi)}\right],$$

$$t > 0,\ \ x,\xi\in E_n.$$

Оцінимо приріст ядра H

$$\triangle_x H(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_{E_n}\triangle_x K(t,x,z)Z(t,\tau,z,\xi)dz.$$

$$|\triangle_x H| \le C_o\int\limits_{E_n}\frac{|\triangle x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}}\left[e^{-c\rho(t,x+\triangle x,z)}+e^{-c\rho(t,x,z)}\right]\times$$

$$\times\frac{e^{-c\rho(t,\tau,z,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2b}}}dz \le C_o\frac{|\triangle x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}}\int\limits_{E_n}\frac{e^{-\varepsilon\rho(t,\tau,z,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2b}}}dz\times$$

$$\times\left[e^{-(c-\varepsilon)\rho(2t,\tau,x+\triangle x,\xi)}+e^{-(c-\varepsilon)\rho(2t,\tau,x,\xi)}\right] \le$$

$$\le C_oC_\varepsilon\frac{|\triangle x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}}\left[e^{-c'\rho(2t,\tau,x+\triangle x,\xi)}+e^{-c'\rho(2t,\tau,x,\xi)}\right],$$

$$t > \tau,\ \ x,\xi\in E_n,\ \ c' = c-\varepsilon.$$

Аналогічними міркуваннями, що і при встановленні оцінок для повторних ядер H_m та резольвенти R, для приросту резольвенти $\triangle_x R(t,\tau,x,\xi) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\triangle_x H_m(t,\tau,x,\xi)$ будемо мати оцінку:

$$\left|\triangle_x R(t,\tau,x,\xi)\right| \le C_R\frac{|\triangle x|^\alpha}{t^{\frac{n+2b}{2b}}}\sum_{m=1}^{\infty} r_m\prod_{p=1}^{m}\frac{2b}{2b+(p-2)\alpha}\times$$

$$\times\left[e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,\tau,x+\triangle x,\xi)}+e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)}\right],$$

$$t > \tau,\ \ x,\xi\in E_n. \qquad (15)$$

Тепер покажемо, що функція y, яку можна подати у вигляді

$$y(t,x) = f(t,x) + \int\limits_{E_n} H(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{E_n} R(t,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{E_n} R(t,\tau,x,\xi)\int\limits_{E_n} H(\tau,0,\xi,z)\varphi(z)dzd\xi \equiv$$

$$\equiv f(t,x) + J_1 + J_2 + J_3,$$

є гельдеровою за просторовою змінною x. f є гельдеровою за припущенням. Розглянемо приріст другого доданку:

$$\left|\triangle_x J_1(t,x)\right| \le \int\limits_{E_n}|\triangle_x H||\varphi|d\xi \le$$

$$\le C_oC_\varepsilon 2^{\frac{n}{2b}}|\varphi|_C\int\limits_{E_n}\frac{e^{-c'\rho(2t,x+\triangle x,\xi)}+e^{-c'\rho(2t,x,\xi)}}{(2t)^{\frac{n}{2b}}}d\xi\times$$

$$\times\frac{|\triangle x|^\alpha}{t} \le C|\varphi|_C\frac{|\triangle x|^\alpha}{t},\ \ t > 0,\ x\in E_n. \qquad (16)$$

Знайдемо приріст третього доданку:

$$\left|\triangle_x J_2(t,x)\right| \le C_R|f|_\alpha\frac{|\triangle x|^\alpha}{t}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty} r_m(\nu_o+m)^{\frac{n}{2b}}\prod_{p=1}^{m}\frac{2b}{2b+(p-2)\alpha}\int\limits_0^t d\tau$$

$$\int\limits_{E_n}\frac{e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,x+\triangle x,\xi)}+e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,x,\xi)}}{((\nu_o+m)t)^{\frac{n}{2b}}}d\xi \le$$

$$\le C|f|_\alpha|\triangle x|^\alpha\sum_{m=1}^{\infty} r_m(\nu_o+m)^{\frac{n}{2b}}\prod_{p=1}^{m}\frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \le$$

$$\le C|f|_\alpha|\triangle x|^\alpha,\quad t > 0,\ x\in E_n. \qquad (17)$$

Тут почленне інтегрування законне на основі ознаки Вейєрштрасса, оскільки числовий ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}2r_m\prod\limits_{p=1}^{m}\frac{2b}{2b+(p-2)\alpha}$, що мажорує відповідний функціональний ряд, є збіжним. При оцінюванні приросту четвертого доданку аналогічно завдяки рівномірній збіжності функціонального ряду можна почленно інтегрувати:

$$\left|\triangle_x J_3(t,x)\right| \le C_o C_\varepsilon 2^{\frac{n}{2b}} |\varphi|_C \times$$

$$\times \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} \int\limits_{E_n} |\triangle_x R| \int\limits_{E_n} \frac{e^{-(c-\varepsilon)\rho(2\tau,\xi,z)}}{(2\tau)^{\frac{n}{2b}}} dz d\xi \le$$

$$\le C|\varphi|_C \frac{|\triangle x|^\alpha}{t} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m (\nu_o+m)^{\frac{n}{2b}} \prod_{p=1}^{m} \tfrac{2b}{2b+(p-2)\alpha}$$

$$\int\limits_{E_n} \frac{e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,\tau,x+\triangle x,\xi)} + e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)}}{((\nu_o+m)t)^{\frac{n}{2b}}} d\xi \le$$

$$\le C|\varphi|_C |\triangle x|^\alpha t^{-\frac{2b-\alpha}{2b}}, \quad t>0, x\in E_n. \quad (18)$$

На основі оцінок (16)-(18) маємо, що

$$|\triangle_x y(t,x)| \le |\triangle x|^\alpha \left(C_1 |f|_\alpha + C_2 \frac{|\varphi|_C}{t} \right), \quad (19)$$

$$t>0, x\in E_n.$$

Оцінка (19) означає, що функція y задовольняє нерівномірну умову Гельдера з показником α. Ця умова необхідна для існування старших похідних об'ємного потенціалу у формулі (9) для розв'язку u.

Тепер встановимо оцінки для ФМР $\Gamma = Z + W$ (6) та її похідних. За побудовою [1]

$$Z(t,\tau,x,\xi) \equiv G_o(t,\tau,x-\xi,\xi) +$$

$$+ \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{E_n} G_o(t,\beta,x-y,y) R_o(\beta,\tau,y,\xi) dy \equiv G_o + W_o$$

і для G_o, W_o правильні оцінки

$$|D_x^k G_o(t,\tau,x,\xi)| \le C(t-\tau)^{-\frac{n+|k|}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)},$$

$$|D_x^k W_o(t,\tau,x,\xi)| \le C(t-\tau)^{-\frac{n+|k|-\alpha}{2b}} e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi)},$$

$$|k| \le 2b, \quad t>\tau, \quad x,\xi \in E_n.$$

Для Z маємо оцінку (10). Оцінимо похідні об'ємного потенціалу W. За лемою про диференціювання об'ємного потенціалу [1, с. 68] молодші похідні знаходимо безпосереднім диференціюванням під знаком інтеграла, а старші похідні вирахуємо за спеціальними формулами, врахувавши конструкцію ФМР Z:

$$D_x^{2b} W(t,\tau,x,\xi) =$$

$$= \int\limits_\tau^{t_1} d\beta \int\limits_{E_n} D_x^{2b} Z(t,\beta,x,z) R(\beta,\tau,z,\xi) dz +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^t d\beta \int\limits_{E_n} \bar{D}_x^{2b} G_o(t,\beta,x-z,x) [R(\beta,\tau,z,\xi) -$$

$$- R(\beta,\tau,x,\xi)] dz + \int\limits_{t_1}^t d\beta \int\limits_{E_n} \left[D_x^{2b} G_o(t,\beta,x-z,z) - \right.$$

$$\left. - \bar{D}_x^{2b} G_o(t,\beta,x-z,x) \right] R(\beta,\tau,z,\xi) dz +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^t R(\beta,\tau,x,\xi) d\beta \int\limits_{E_n} \bar{D}_x^{2b} G_o(t,\beta,x-z,x) dz +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^t d\beta \int\limits_{E_n} D_x^{2b} W_o(t,\beta,x,z) R(\beta,\tau,z,\xi) dz \equiv$$

$$\equiv A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5,$$

де $\bar{D}$ означає диференціювання тільки по третьому аргументу.

$A_4 = 0$ на основі властивості матриці Гріна G_o. W_o має менший порядок особливості, тому достатньо оцінити $A_1 - A_3$.

Оцінка A_1 одержується з оцінок (10), (14) і того, що $t - \beta \ge (t-\tau)/2$:

$$|A_1| \le C_R \int\limits_\tau^{t_1} d\beta \int\limits_{E_n} \frac{e^{-c\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n+2b}{2b}}} \beta^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^{m} \tfrac{2b}{2b+(p-2)\alpha} e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)\beta,\tau,z,\xi)} dz \le$$

$$\le \frac{CC_R}{(t-\tau)^{\frac{n+2b}{2b}}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m (\nu_o+m)^{\frac{n}{2b}} \prod_{p=1}^{m} \tfrac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times$$

$$\times e^{-(c_{\nu_o}-\varepsilon)\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)} \int\limits_\tau^{t_1} \frac{d\beta}{\beta^{\frac{2b-\alpha}{2b}}}$$

$$\int\limits_{E_n} e^{-(\nu_o+1)\varepsilon\rho(t,\beta,x,z)} \frac{e^{-\varepsilon\rho((\nu_o+m)\beta,z,\xi)}}{(\nu_o+m)^{\frac{n}{2b}} \beta^{\frac{n}{2b}}} dz \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^{m} \tfrac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times$$

$$\times (\nu_o+m)^{\frac{n}{2b}} e^{-(c_{\nu_o}-\varepsilon)\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)},$$

$$t>\tau, \quad x,\xi \in E_n. \quad (20)$$

Нерівномірна умова Гельдера резольвенти R по третьому аргументу (15) дає можливість оцінити A_2:

$$|A_2| \le C_R \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{E_n} e^{-\varepsilon\rho(t,\beta,x,z)} \left(\frac{|x-z|}{(t-\beta)^{1/2b}}\right)^{\alpha} \times$$

$$\times \frac{e^{-(c-\varepsilon)\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^{m} \tfrac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times$$

$$\times \frac{e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)\beta,\tau,z,\xi)} + e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)\beta,\tau,x,\xi)}}{\beta^{\frac{n+2b}{2b}}} dz \le$$

$$\le C_R C(\varepsilon) \left(\frac{2}{t-\tau}\right)^{\frac{n+2b}{2b}} \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^{m} \tfrac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times$$

$$\times \left[e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)} \int\limits_{E_n} \frac{e^{-(\nu_o-1)\varepsilon\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}} dz + \right.$$

$$\left. + e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)} \int\limits_{E_n} \frac{e^{-(c-\varepsilon)\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}} dz \right] \le$$

$$\le C(t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^{m} \tfrac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times$$

$$\times e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)}, \quad t > \tau, x, \xi \in E_n. \quad (21)$$

Тут ми скористались очевидною нерівністю

$$\left(\frac{|x-z|}{(t-\beta)^{1/2b}}\right)^{\alpha} e^{-\varepsilon\rho(t,\beta,x,z)} \le C(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Також в показнику експоненти відщепили від $c-\varepsilon$ величину $c_{\nu_o} = c - \nu_o\varepsilon$ і скористались нерівністю

$$\rho(t,\beta,x,z) + \rho((\nu_o+m)\beta,\tau,z,\xi) \ge$$
$$\ge \rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi), \quad \beta \le t.$$

Далі, застосувавши лему про оцінку об'ємного інтегралу і скориставшись тим, що $\beta - \tau \ge (t-\tau)/2$, остаточно одержали оцінку (21).

Оцінка A_3 випливає з гельдеровості матриці Гріна G_o по четвертому аргументу та оцінки (14) для резольвенти R:

$$|A_3| \le C_R (t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^{m} \tfrac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times$$

$$\times e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)} \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} \times$$

$$\times \int\limits_{E_n} \left(\tfrac{|x-z|}{(t-\beta)^{1/2b}}\right)^{\alpha} e^{-\varepsilon\rho(t,\beta,x,z)} \frac{e^{-(\nu_o-1)\varepsilon\rho(t,\beta,x,z)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}} dz \le$$

$$\le CC(\varepsilon)(t-\tau)^{-\frac{n+2b-2\alpha}{2b}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \prod_{p=1}^{m} \tfrac{2b}{2b+(p-2)\alpha} \times$$

$$\times e^{-c_{\nu_o}\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)}, \quad t > \tau, x, \xi \in E_n. \quad (22)$$

У результаті оцінок для $A_1 - A_5$ (20)-(22) одержимо:

$$|D_x^{2b} W(t,\tau,x,\xi)| \le C(t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \sum_{m=1}^{\infty} r_m \times$$

$$\times (\nu_o+m)^{\frac{n}{2b}} \prod_{p=1}^{m} \tfrac{2b}{2b+(p-2)\alpha} e^{-(c_{\nu_o}-\varepsilon)\rho((\nu_o+m)t,\tau,x,\xi)},$$

$$t > \tau, \quad x, \xi \in E_n.$$

Отже, для похідних об'ємного потенціалу W правильні оцінки (7).

Оцінка похідних розв'язку (5) випливає із його зображення (4) та оцінок для ФМР Г.

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964. — 444 с.
2. *Ивасишен С.Д.* Матрица Грина параболических задач. — К.: Вища школа, 1990. — 199 с.
3. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. — К.: Ін-т математики НАН України, 1999. — 176 с.
4. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958. — 274 с.
5. *Данилюк А.О.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2007. – Вип. 349. – С. 18-24.
6. *Данилюк А.О.* Крайова задача для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь з інтегральними умовами // Укр. мат. журн. – 2008. – 60, №12. – С. 1610-1618.