УДК 517.51

©2012 р. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЗВ'ЯЗКИ МІЖ РІЗНИМИ ТИПАМИ НЕПЕРЕРВНОСТІ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРІ $C(T)$

Досліджено зв'язки між різними типами неперервності операторів, що діють у просторі неперервних функцій, наділеному топологією поточкової чи рівномірної збіжності.

Relations between different types of continuity of operators which act in the space of continuous functions equipped with the topology of pointwise or uniform convergence are studied.

1. При дослідженні задач про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій [1, 2] виникла потреба розгляду різних типів неперервності операторів, що діють у просторі $C(T)$ неперервних функцій $x : T \to \mathbb{R}$, які визначені на топологічному просторі T. Символом $C_p(T)$ позначатимемо цей же простір, наділений топологією поточкової збіжності $\mathcal{T}_p$, що породжується сукупністю переднорм

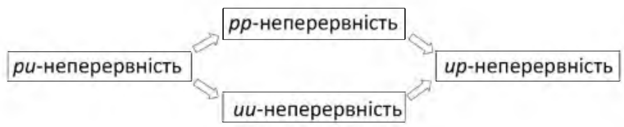
$$q_t(x) = |x(t)|,$$

де t пробігає множину T [3, с.30].

Для компактного простору T символом $C_u(T)$ ми позначаємо банахів простір $(C(T), \|\cdot\|)$ з топологією рівномірної збіжності $\mathcal{T}_u$, що породжується нормою

$$\|x\| = \max_{t\in T} |x(t)|.$$

Нехай α і β – довільні елементи з множини $\{p, u\}$. Неперервний оператор $A : C_\alpha(T) \to C_\beta(T)$ ми називаємо *$\alpha\beta$-неперервним.* Таким чином, для операторів $A : C(T) \to C(T)$ ми ввели чотири типи неперервності: pu-, pp-, uu- і up-неперервність. Оскільки $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}_u$, то ці типи неперервності пов'язані між собою так:



Мета цієї замітки – показати, що жодну з цих імплікацій у загальному випадку не можна обернути, а також з'ясувати, що з pp-неперервності не випливає uu-неперервність і навпаки.

2. Доведемо, що ліві імплікації нашої схеми не можна обернути. Ми будемо спиратися на наступні дві леми, які, певно, що добре відомі, але для повноти викладу ми все ж дамо відповідні доведення.

Лема 1. Нехай T – нормальний простір і $t_1, \dots, t_n$ – довільна скінченна послідовність різних точок з T, а $c_1, \dots, c_n$ – довільна послідовність дійсних чисел. Тоді існує такий елемент $x \in C(T)$, що $x(t_k) = c_k$ для кожного $k = 1, \dots, n$.

Доведення. За теоремою Тітце-Урисона[4, с. 116] кожну неперервну функцію $f_0 : E \to \mathbb{R}$, задану на замкненому підпросторі нормального простору T, можна продовжити до неперервної функції $f : T \to \mathbb{R}$, яка визначена на всьому просторі T.

Розглянемо множину $E = \{t_1, \dots, t_n\}$ і функцію $x_0(t_k) = c_k$ при $k = 1, \dots, n$. Оскільки нормальний простір є T_1-простором, то кожна одноточкова множина в T замкнена, а тому і множина $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{t_k\}$ буде замкненою в T, як скінченне об'єднання замкнених множин.

Для довільної замкненої множини B в $\mathbb{R}$ прообраз $x_0^{-1}(B)$ – підмножина скінченної множини E, а значить, скінченна множина, яка буде замкненою в T і у підпросторі E. Тому функція x_0 буде неперервною на основі критерію неперервності через замкнені множини [5, с.79]. За теоремою Тітце-Урисона існує функція $x \in C(T)$, така, що $x|_E = x_0$. Тоді $x(t_k) = x_0(t_k) = c_k$ для кожного $k = 1, \ldots, n$. Отже, x – шукана функція.

Лема 2. Нехай T – нескінченний компакт. Тоді $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_u$, тобто $\mathcal{T}_p \subsetneq \mathcal{T}_u$ і існує множина B, яка відкрита в $C_u(T)$, але не відкрита в $C_p(T)$.

Доведення. Розглянемо множину

$$B = \{x \in C(T) : \|x\| < 1\},$$

тобто відкриту одиничну кулю банахового простору $C_u(T)$. Добре відомо, що кожна відкрита куля

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

у метричному просторі (X, d) є відкритою множиною у цьому просторі [5, с.61]. Зокрема, і $B = B(0, 1)$ – це відкрита множина в просторі $C_u(T)$, тобто $B \in \mathcal{T}_u$.

Покажемо, що $B \notin \mathcal{T}_p$. Більше того, доведемо, що множина B не має внутрішніх точок у просторі $C_p(T)$. Для цього розглянемо довільну точку $x_0 \in B$, довільний її базисний окіл

$$U = U_{\tau,\varepsilon}(x_0) =$$
$$= \{x \in C(T) : \max_{1 \le k \le n} |x(t_k) - x_0(t_k)| \le \varepsilon\}$$

і покажемо, що $U \nsubseteq B$. Тут $\tau = \{t_1, \ldots, t_n\}$ – довільна скінченна підмножина простору T і ε – довільне додатне число. Оскільки простір T нескінченний, то існує така точка $t_{n+1} \in T$, що $t_{n+1} \neq t_k$ при $k = 1, \ldots, n$. Розглянемо числа $c_k = x_0(t_k)$ при $k = 1, \ldots, n$ і $c_{n+1} = 2$. За лемою 1 існує така неперервна функція $x : T \to \mathbb{R}$, що $x(t_k) = c_k$ для кожного $k = 1, \ldots, n, n+1$. Оскільки $x(t_k) = x_0(t_k)$ при $k = 1, \ldots, n$, то, очевидно, $x \in U$. Але $\|x\| \ge |x(t_{n+1})| = 2 > 1$, отже, $x \notin B$. Таким чином, $U \nsubseteq B$.

Тому непорожня множина B не має внутрішніх точок у просторі $C_p(T)$, а значить не може бути відкритою у цьому просторі, отже, $B \notin \mathcal{T}_p$.

Оскільки $\mathcal{T}_p \subseteq T_u$, то тут ми маємо строге включення $\mathcal{T}_p \subset T_u$.

Теорема 1. Нехай T – нескінченний компакт. Тоді $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_u$ і одиничний оператор $I : C(T) \to C(T)$ є pp-неперервним і uu-неперервним, але не є pu-неперервним.

Доведення. Тотожний оператор $I : X \to X$, $Ix = x$, очевидно, неперервний у будь-якому топологічному просторі X. Таким чином, наш оператор є pp-неперервним, як тотожний оператор у просторі $C_p(T)$, і uu-неперервним, як тотожний оператор у просторі $C_u(T)$.

Проте оператор I не є pu-неперервним. Справді, за лемою 2 існує множина B, така, що $B \in \mathcal{T}_u$ і $B \notin \mathcal{T}_p$. Оскільки I – тотожний оператор, то $I^{-1}(B) = B$, отже, ми вказали приклад відкритої множини B у просторі $C_u(T)$, прообраз якої при відображенні I не є відкритою множиною у просторі $C_p(T)$, що і показує, що I не є pu-неперервним.

3. Тепер з'ясуємо, що з uu-неперервності не випливає pp-неперервність, звідки негайно отримуємо, що і up-неперервність $\not\Rightarrow$ pp-неперервність.

Теорема 2. Нехай $x_0(t) = 1$ на $[0, 1]$, $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt$ і $Ax = f(x)x_0$ на $C[0, 1]$. Тоді f – лінійний неперервний функціонал на $C_u[0, 1]$, який розривний у кожній точці як функціонал на $C_p[0, 1]$, а лінійний оператор $A : C[0, 1] \to [0, 1]$ є uu-неперервним, up-неперервним, але не pp-неперервним.

Доведення. Лінійність f і A випливають з лінійності інтеграла і операції множення на скаляр $\lambda \mapsto \lambda x_0 : \mathbb{R} \to C[0, 1]$. Крім того, для кожного $x \in C[0, 1]$

$$|f(x)| = |\int_0^1 x(t)dt| \le \int_0^1 |x(t)|dt \le \|x\|.$$

Це показує, що лінійний функціонал f обмежений, а значить, неперервний на просторі $C_u[0, 1]$. Оскільки множення на скаляр $\lambda \mapsto \lambda x_0 : \mathbb{R} \to C[0, 1]$ – це також неперервна функція, то і оператор $A : C_u[0, 1] \to C_u[0, 1]$ неперервний, тобто A – uu-неперервний оператор.

Покажемо, що функціонал $f : C_p[0, 1] \to \mathbb{R}$ розривний в точці 0. Оскільки $f(0) = 0$ то для цього досить вказати таке $\varepsilon > 0$, що у кожному базисному околі нуля $U = U_{\tau,\delta}(0)$ знайдеться точка $x \in U$, для якої $f(x) > \varepsilon$.

Нехай ε – довільне дійсне число і $\tau = \{t_1, \dots, t_n\}$, де $0 \le t_1 < \dots < t_n \le 1$ і $n \ge 2$. Візьмемо довільне додатне число $c > 0$ і розглянемо функцію $x_c : [0,1] \to \mathbb{R}$, для якої $x_c(t) = 0$ при $t \in [0,1] \backslash (t_1, t_2)$, $x(\frac{t_1+t_2}{2}) = c$ і x – лінійна на відрізках $[t_1, \frac{t_1+t_2}{2}]$ і $[\frac{t_1+t_2}{2}, t_2]$. Ясно, що $x_c \in U$, адже $x_c(t_k) = 0$ для кожного $k = 1, \dots, n$.

Далі

$$f(x_c) = \int\limits_{t_1}^{t_2} x_c(t)dt = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)c.$$

Якщо взяти $c = \frac{4\varepsilon}{t_2 - t_1}$, то $f(x_c) = 2\varepsilon > \varepsilon$, отже, точка x_c і буде шуканою.

Таким чином, f розривний в нулі у просторі $C_p[0,1]$, а значить, і в кожній точці простору $C_p[0,1]$, адже функціонал f лінійний.

Покажемо, що оператор $A : C_p[0,1] \to C_p[0,1]$ теж розривний в точці 0. Для цього нам потрібно вказати такий окіл нуля $V = U_{\sigma,\varepsilon}(0)$ в просторі $C_p[0,1]$, що для кожного околу нуля $U = U_{\tau,\delta}$ існує точка $x \in U$, така, що $Ax \notin V$.

Розглянемо довільну точку $s \in [0,1]$, одноточкову множину $\sigma = \{s\}$ і довільне $\varepsilon > 0$. В околі U візьмемо таку ж точку x_c як і раніше. Тоді

$$(Ax_c)(s) = f(x_c)x_0(s) = f(x_c) = 2\varepsilon > \varepsilon.$$

Це показує, що $Ax_c \notin V$, отже, $A(U) \not\subseteq V$, що і дає нам розривність оператора $A : C_p[0,1] \to C_p[0,1]$. Як і f, оператор A буде насправді розривний у кожній точці $x \in C_p[0,1]$, адже він лінійний.

4. Для лінійних операторів, справедлива така властивість:

Теорема 3. Кожний лінійний up-неперервний оператор $A : C(T) \to C(T)$ є uu-неперервним.

Доведення. Згідно з теоремою про замкнений графік [5, с.148] досить показати, що у такого оператора графік є замкненим у добутку $C_u(T) \times C_u(T)$.

Припустимо, що $x_n \to x$ і $y_n = A_n x_n \to y$ в $C_u(T)$ і доведемо, що $y = Ax$. Оскільки оператор A є up-неперервним, то $y_n = A_n x_n \to Ax$ в $C_p(T)$, адже $x_n \to x$ в $C_u(T)$. Але за припущенням $y_n \to y$ в $C_u(T)$, а значить $y_n \to y$ в $C_p(T)$. В такому разі $y_n(t) \to (Ax)(t)$ і $y_n(t) \to y(t)$ для кожного $t \in T$. Тоді $y(t) = (Ax)(t)$ для кожного $t \in T$, отже, $y = Ax$. Таким чином, за теоремою про замкнений графік оператор A неперервний. Тут ми скористалися і тим фактом, що $C_u(T)$ – банаховий простір.

Для нелінійних операторів це твердження, взагалі кажучи, неправильне.

Розглянемо функцію Шварца $sp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для якої $sp(t,s) = \frac{2ts}{t^2+s^2}$ при $(t,s) \neq (0,0)$ і $sp(0,0) = 0$, – класичний приклад нарізно неперервної і розривної в точці $(0,0)$ функції.

Теорема 4. Оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, який діє за правилом $(Ax)(s) = sp(x(0), s)$, де $0 \le s \le 1$, є pp-неперервним, up-неперервним, але не uu-неперервним.

Доведення. Покладемо $\varphi(u)(s) = sp(u,s)$ і $\delta_0(x) = x(0)$. Ясно, що $\delta_0 : C_p[0,1] \to \mathbb{R}$ – неперервний функціонал. Відображення $\varphi : [0,1] \to C_p[0,1]$ є неперервним, бо функція Шварца нарізно неперервна.

Оператор $A = \varphi \circ \delta_0 : C_p[0,1] \to C_p[0,1]$ буде pp-неперервним як композиція неперервних відображень.

Покажемо, що оператор A не є uu-неперервним. З цією метою розглянемо послідовність $x_n(t) = \frac{1}{n}$, яка рівномірно прямує до 0 на $[0,1]$. Знайдемо значення оператора A на цій послідовності:

$$y_n(s) = Ax_n(s) = sp(x_n(0), s) =$$

$$sp(\frac{1}{n}, s) = \frac{2ns}{n^2s^2 + 1}$$

Оскільки $y_n(\frac{1}{n}) = 1$ для кожного n, то $y_n \nrightarrow 0$ у просторі $C_u[0,1]$. Отже, $x_n \to 0$, але $y_n = Ax_n \nrightarrow 0$ у просторі $C_u[0,1]$. Таким чином, оператор $A : C_u[0,1] \to C_u[0,1]$ розривний в нулі, а значить не є uu-неперервним.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К.* Про наближення нарізно неперервних функцій, 2π-періодичних відносно другої змінної //Карп. матем.публ. – 2010. – **2**, №1 – С. 4-14.

2. *Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В.* Про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій //Карп. матем.публ. – 2010. – **2**, №2 – С.11-21.

3. *Маслюченко В.К.* Перші типи топологічних векторних просторів. – Чернівці: Рута, 2002. – 72с.

4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752с.

5. *Маслюченко В.К.* Лекції з функціонального аналізу. Ч.2.Лінійні оператори і функціонали. – Чернівці: ЧНУ Рута, 2010. – 192с.