УДК 519.21

©2012 р. І.М. Боднарчук, В.М. Радченко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЗІ СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ

Розглядається стохастичне рівняння теплопровідності в $\mathbb{R}$ у м'якому сенсі, в якому випадковий вплив задано інтегралом за загальною стохастичною мірою. При певних умовах показано, що розв'язок прямує до нуля м.н. при $|x| \to \infty$.

We consider the stochastic heat equation driven by general stochastic measure in $\mathbb{R}$ in the mild sense. Under some assumptions, we prove that the solution tends to 0 a.s. as $|x| \to \infty$.

1. Вступ. Нехай $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — борельова σ-алгебра підмножин евклідового простору $\mathbb{R}$, $L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — простір дійснозначних випадкових величин, заданих на довільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Нехай μ — стохастична міра на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, тобто σ-адитивне відображення $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L_0$ (відмітимо, що ми розглядаємо загальне означення стохастичної міри і, зокрема, не вимагаємо існування моментів для значень μ). В якості прикладу стохастичної міри ми можемо взяти $\mu(A) = \int_{[0,T]} \mathbf{1}_A(s)\, dX(s)$, де $X(s)$ — квадратично інтегровний мартингал або процес дробового броунівського руху з показником Хюрста $H > 1/2$.

Теорія інтегрування дійсних функцій за стохастичними мірами побудована, наприклад, у [1], [2]. Зокрема, будь-яка обмежена вимірна функція є інтегровною за будь-якою μ. Крім того, має місце аналог теореми Лебега (див. [1, наслідок 1.2] або [2, твердження 7.1.1]).

Розглянемо задачу Коші, що відповідає наступному стохастичному рівнянню теплопровідності

$$du(t,\ x) = a^2 \frac{\partial^2 u(t,\ x)}{\partial x^2} dt + f(t, x, u(t,x))dt + $$
$$+\sigma(t,x)\, d\mu(x),\ t > 0, \quad u(0,x) = u_0(x). \quad (1)$$

Тут $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $u : [0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ — невідома вимірна випадкова функція. Рівняння (1) ми розглядатимемо у м'якому сенсі (див. рівність (2) нижче).

Стохастичні рівняння в частинних похідних здебільшого досліджуються як рівняння в нескінченновимірних просторах (див., наприклад, [3], [4]). Серед асимптотичних властивостей розв'язків найбільш досліджено є експоненціальна стабільність за часом (див. [4], де також наведені додаткові посилання).

В даній статті ми розглядаємо розв'язок стохастичного рівняння як скінченновимірну випадкову функцію (що є природним, коли ми не накладаємо ніяких умов регулярності на стохастичний доданок в (1)). У роботі [5] було отримано твердження про існування та єдиність м'якого розв'язку рівняння (1), доведено існування його неперервної модифікації. Додаткові властивості розв'язку було розглянуто в [6]. У даній роботі ми покажемо, що цей розв'язок прямує до нуля при нескінченному збільшенні просторової змінної.

2. Постановка задачі. Розв'язком рівняння (1) у м'якому сенсі є вимірна випадкова функція $u(t,x)$, для якої справджується рівність

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t, x-y) u_0(y) dy +$$
$$+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t-s, x-y) f(s, y, u(s,y)) dy +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t-s, x-y) \sigma(s,y) ds, \quad (2)$$

де для кожних t, x рівність справджується м.н., а

$$p(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4a^2t}$$

— фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності. Нагадаємо, що $\int_{\mathbb{R}} p(t,x)dx = 1$. Інтеграли від випадкових функцій за dy і ds беремо при кожному фіксованому ω (властивості таких інтегралів розглянуто, наприклад, у [7]).

Ми будемо розглядати наступні припущення щодо елементів рівняння (2).

A1. $u_0(y)=u_0(y,\omega):\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$ вимірна і обмежена, $|u_0(y,\omega)|\le C_{u_0}(\omega)$.

A2. u_0 задовольняє умову Гельдера:

$$|u_0(y_1)-u_0(y_2)|\le L_{u_0}(\omega)|y_1-y_2|^{\beta(u_0)},$$

де $\beta(u_0)\ge 1/6$.

A3. $f(s,y,z):[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ вимірна і обмежена, $|f(s,y,z)|\le C_f$.

A4. Функція f задовольняє умову Ліпшиця за $y,z\in\mathbb{R}$: $|f(s,y_1,z_1)-f(s,y_2,z_2)|\le L_f\left(|y_1-y_2|+|z_1-z_2|\right)$.

A5. $\sigma(s,y):[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ вимірна і обмежена, $|\sigma(s,y)|\le C_\sigma$.

A6. σ задовольняє умову Гельдера:

$$|\sigma(s,y_1)-\sigma(s,y_2)|\le L_\sigma|y_1-y_2|^{\beta(\sigma)},\beta(\sigma)>1/2.$$

A7. $\sup_{s\in[0,T],z\in\mathbb{R}}|f(s,y,z)| \to 0$, $u_0(y)\to 0$, $|y|\to\infty$.

A8. Функція $|y|^\tau$ інтегровна на $\mathbb{R}$ за $d\mu(y)$ для деякого $\tau>3/2$.

Теорема роботи [5] стверджує, що при виконанні умов **A1-A6** рівняння (2) має єдиний розв'язок.

Також важливим для нас є твердження двох наступних лем.

Лема 1. *(лема 3.1 [5]). Нехай $g_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{Z}$ — вимірні функції такі, що $g(y)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}|g_j(y)|$ інтегровна на $\mathbb{R}$ за $d\mu(y)$. Тоді $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\int_{\mathbb{R}} g_j d\mu\right)^2<\infty$ м.н.*

В подальшому будемо використовувати норму в просторі Бєсова $B^\alpha_{22}([c,d])$, $0<\alpha<1$. Нагадаємо, що ця норма визначена рівністю

$$\|g\|_{B^\alpha_{22}([c,d])}=\|g\|_{L_2([c,d])}+ \left(\int_0^{d-c}(w_2(g,r))^2r^{-2\alpha-1}dr\right)^{1/2}, \quad (3)$$

де

$$w_2(g,r)=\sup_{0\le v\le r}\left(\int_c^{d-v}|g(y+v)-g(y)|^2dy\right)^{\frac12}.$$

Також для $j\in\mathbb{R}$ і $n\ge 0$ покладемо

$$d^{(j)}_{kn}=j+k2^{-n},\quad 0\le k\le 2^n,$$

$$\Delta^{(j)}_{kn}=\left(d^{(j)}_{(k-1)n},d^{(j)}_{kn}\right],\quad 1\le k\le 2^n.$$

Лема 2. *(лема 3.2 [7]). Нехай Z — довільна множина, а функція $q(z,y):Z\times[j,j+1]\to\mathbb{R}$ така, що для деякого $1/2<\alpha<1$ для всіх $z\in Z$ $q(z,\cdot)\in B^\alpha_{22}([j,j+1])$. Тоді випадкова функція*

$$\eta(z)=\int_{(j,j+1]}q(z,y)d\mu(y),\ z\in Z$$

має модифікацію $\tilde\eta(z)$ таку, що для деякої константи C_0 (незалежної від z,j,ω) і кожного $\omega\in\Omega$

$$|\tilde\eta(z)|\le|q(z,j)\mu((j,j+1])|+ +C_0\|q(z,\cdot)\|_{B^\alpha_{22}([j,j+1])}\times \times\left\{\sum_{n\ge1}2^{n(1-2\alpha)}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(j)}_{kn}\right)\right|^2\right\}^{\frac12}. \quad (4)$$

3. Основний результат.

Теорема. *Нехай справджуються припущення* **A1-A8**. *Тоді для розв'язку рівняння (2) існує модифікація $u(t,x)$ така, що при кожному $t\in[0,T]$ і кожному $\omega\in\Omega$ $u(t,x)\to 0$, $|x|\to\infty$.*

Доведення. Позначимо

$$h(t,x,y)=\int_0^t p(t-s,x-y)\sigma(s,y)ds$$

і оцінимо останній доданок (2):

$$\left|\int_{\mathbb{R}}h(t,x,y)d\mu(y)\right|\le\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\int_{(j,j+1]}h(t,x,y)d\mu(y)\right|.$$

Візьмемо довільне $\frac{1}{2} < \alpha < \min\{\beta(\sigma), \frac{3}{4}\}$. Розглянемо суми по $j \in \mathbb{Z}$ обох доданків правої частини (4), застосованої для $q(z, y) = h(t, x, y)$, $Z = [0, T] \times \mathbb{R}$. Для перших доданків маємо, що

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |h(t,x,j)\mu((j,j+1])| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(1+|j|)^{-2\tau} |h(t,x,j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(1+|j|)^{2\tau} |\mu((j,j+1])|^2\right)^{\frac{1}{2}} = A_1A_2.$$

Візьмемо $\tau > 3/2$, для якого справджується **A8**. Тоді з леми 1, застосованої до $g_j(y) = (1+|j|)^{\tau}\mathbf{1}_{(j,j+1]}(y)$, випливає, що $A_2 < \infty$ м.н. (далі вважаємо, що $u(t,x) = 0$ на множині $A_2 = \infty$). З використанням **A5** маємо, що

$$|h(t,x,j)| \leq C_\sigma \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-s)}} e^{\frac{-(x-j)^2}{4a^2(t-s)}} ds \leq$$

$$\leq C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} ds = C\sqrt{t}. \tag{5}$$

(Тут і надалі ми позначаємо через C неістотну для подальших обчислень константу, значення якої може бути різним в різних виразах.) Оскільки $\sum_{j\in\mathbb{Z}}(1+|j|)^{-2\tau} < \infty$, маємо, що $A_1 < \infty$. При цьому з оцінок (5) випливає, що при кожному фіксованому j $h(t,x,j) \to 0$, $|x| \to \infty$. З теореми Лебега про мажоровану збіжність випливає, що $A_1 \to 0$, $|x| \to \infty$.

В останньому доданку (4) використаємо рівність (3). З (5) легко отримуємо, що

$$\|h(t,x,\cdot)\|_{L_2([j,j+1])} \leq C\sqrt{t},$$
$$\|h(t,x,\cdot)\|_{L_2([j,j+1])} \to 0,\ |x| \to \infty. \tag{6}$$

Далі маємо, що

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|h(t,x,\cdot)\|_{L_2([j,j+1])} \times$$

$$\times \left\{\sum_{n\geq 1} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{1\leq k\leq 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(j)}\right)\right|^2\right\} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (1+|j|)^{-2\tau} \|h(t,x,\cdot)\|^2_{L_2([j,j+1])}\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (1+|j|)^{2\tau} \times\right.$$

$$\left.\times \left\{\sum_{n\geq 1} 2^{n(1-2\alpha)} \sum_{1\leq k\leq 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(j)}\right)\right|^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= B_1B_2. \tag{7}$$

З (6) випливає, що ряд B_1 збігається і $B_1 \to 0$, $|x| \to \infty$. Тоді з леми 1, застосованої до

$$\{g_j(y),\ j \in \mathbb{Z}\} =$$

$$= \left\{2^{n(\frac{1}{2}-\alpha)} (1+|j|)^{\tau}\, \mathbf{1}_{\Delta_{kn}^{(j)}}(y),\ j \in \mathbb{Z},\ n \geq 1\right\}$$

маємо, що $B_2 < \infty$ м.н. (вважаємо $u(t,x) = 0$ на множині $B_2 = \infty$).

З використанням похідної легко отримати нерівність

$$\int_0^t \frac{1}{r^{3/2}} e^{-B/r} dr \leq \frac{t^{1/2}}{B} e^{-B/t},\ B > 0.$$

Для оцінювання L_2-модуля неперервності $w_2(h, r)$ на відрізку $[j, j+1]$ при $v > 0$ розглянемо

$$|h(t,x,y+v) - h(t,x,y)| \leq$$

$$\leq \int_0^t p(t-s, x-y-v)\, |\sigma(s,y+v) - \sigma(s,y)|\, ds +$$

$$+ \int_0^t |p(t-s, x-y-v) - p(t-s, x-y)|\, |\sigma(s,y)| ds =$$

$$= I_1 + I_2.$$

З умови **A6** і нерівності $p(t,y) \leq C/\sqrt{t}$ отримуємо, що $I_1 \leq Cv^{\beta(\sigma)}$. Також маємо, що

$$I_2 \leq C_\sigma \int_0^t ds \int_y^{y+v} \left|\frac{\partial p(t-s,x-z)}{\partial z}\right| dz =$$

$$= C \int\limits_{y}^{y+v} dz \int\limits_{0}^{t} \frac{|x-z|}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2(t-s)}} ds \le$$

$$\le C\sqrt{t} \int\limits_{y}^{y+v} |x-z|^{-1} e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2 t}} dz \le$$

$$\le Cv \sup_{z\in[j,j+1]} \left\{ |x-z|^{-1} e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2 t}} \right\}.$$

Позначимо останній супремум за допомогою величини $M_j(x)$, він не перевищує 1 при $x \notin [j-1, j+2]$. При фіксованих t і j $M_j(x) \to 0$, $|x| \to \infty$.

Також, використовуючи припущення **A5**, формулу Лагранжа та позначення

$$\theta = \min\left\{|x-y-v|,\, |x-y|\right\},$$

для $y, y+v \in [j, j+1]$ маємо наступні оцінки:

$$I_2 \le C \int\limits_{0}^{t} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left| e^{-\frac{(x-y-v)^2}{4a^2(t-s)}} - e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}} \right| ds \le$$

$$\le C \int\limits_{0}^{t} \frac{e^{-\frac{\theta^2}{4a^2(t-s)}}}{\sqrt{t-s}} \left| \frac{(x-y-v)^2}{4a^2(t-s)} - \frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)} \right| ds \le$$

$$\le Cv\left(|x|+|j|+1\right) \int\limits_{0}^{t} \frac{e^{-\frac{\theta^2}{4a^2(t-s)}}}{(t-s)^{3/2}} ds =$$

$$= Cv\left(|x|+|j|+1\right)\theta^{-1} \int\limits_{\theta/2a\sqrt{t}}^{\infty} e^{-z^2} dz \le$$

$$\le Cv\left(|x|+|j|+1\right)\theta^{-1}.$$

Оскільки $\theta \ge |y-x|/2$ для $|y-x| > 2\sqrt{v}$, то з отриманих оцінок далі маємо, що

$$\int\limits_{[j,j+1-v]\cap\left\{|y-x|>2\sqrt{v}\right\}} I_2^2 dy \le$$

$$\le C\left(|x|+|j|+1\right)^2 v^2 \int\limits_{\left\{|y-x|>2\sqrt{v}\right\}} \frac{1}{(x-y)^2} dy =$$

$$= C\left(|x|+|j|+1\right)^2 v^{3/2}. \qquad (8)$$

Також відмітимо наступні елементарні нерівності для $\delta, \delta_1, \delta_2 \ge 0$:

$$\int\limits_{0}^{t} \frac{1}{\sqrt{r}} \left(1 - e^{-\delta/r}\right) dr = \int\limits_{0}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{t} \le$$

$$\le \int\limits_{0}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{r}} dr + \int\limits_{\delta}^{t} \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\delta}{r} dr \le 4\sqrt{\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{0}^{t} \frac{1}{\sqrt{r}} \left| e^{-\delta_1/r} - e^{-\delta_2/r} \right| dr \le 4\sqrt{|\delta_1 - \delta_2|}.$$

Звідси маємо, що

$$I_2 \le C \int\limits_{0}^{t} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left| e^{-\frac{(x-y-v)^2}{4a^2(t-s)}} - e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}} \right| ds \le$$

$$\le C\left(|x|+|j|+1\right)^{1/2} v^{1/2}.$$

Тому для інтеграла по іншій множині одержимо:

$$\int\limits_{[j,j+1-v]\cap\left\{|y-x|\le 2\sqrt{v}\right\}} I_2^2 dy \le$$

$$\le C\left(|x|+|j|+1\right) v^{3/2}. \qquad (9)$$

Врахувавши нерівність $(I_1+I_2)^2 \le 2I_1^2 + 2I_2^2$, оцінки (8), (9), маємо, що

$$W_j(x) = \left(\int\limits_{0}^{1} (w_2(h,r))^2 r^{-2\alpha-1} dr \right)^{1/2} \le$$

$$\le C\left(|x|+|j|+1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_j(x) \le C(|j|+1),\ x \in [j-1, j+2]. \qquad (10)$$

З відмічених вище властивостей $M_j(x)$ випливає, що (10) справджується для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $W_j(x) \to 0$, $|x| \to \infty$.

Далі ми можемо повторити міркування, проведені з виразами в (7), замінивши величину $\|h(t,x,\cdot)\|_{L_2([j,j+1])}$ на $W_j(x)$. З (10) випливає, що при $\tau > 3/2$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (1+|j|)^{-2\tau} W_j^2(x) \le$$

$$\le C \sum_{j\in\mathbb{Z}} (1+|j|)^{-2\tau} (1+|j|)^2 < +\infty,$$

і знову отримаємо потрібну збіжність. Також із наведених оцінок випливає, що $h(t,x,\cdot) \in B_{22}^{\alpha}([j,j+1])$. Візьмемо модифікацію стохастичного інтеграла, для якої справджується твердження леми 2. Тоді $\int\limits_{\mathbb{R}} h(t,x,y)d\mu(y) \to 0$ в сенсі, вказаному у твердженні теореми.

Розглянемо інші доданки в (2). Маємо, що

$$\left| \int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}} p(t-s,x-y) f(s,y,u(s,y)) dy \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_0^t ds \int\limits_{|y|\le y_0} \cdots dy \right| + \left| \int\limits_0^t ds \int\limits_{|y|>y_0} \cdots dy \right| = I_3 + I_4.$$

Користуючись умовою **A7**, для довільного $\varepsilon > 0$ візьмемо y_0 таке, що $|f(s,y,z)| < \varepsilon$ для $|y| > y_0$. Оскільки $\int_{\mathbb{R}} p(t,y)dy = 1$, то матимемо, що $I_4 \le \varepsilon t$ одразу для всіх x. При кожному фіксованому y_0 прямування I_3 до нуля при $|x| \to \infty$ випливає з теореми Лебега, в якій у якості мажоранти можна взяти

$$\frac{C_f}{2a\sqrt{\pi(t-s)}} e^{-\frac{(|y|-y_0)^2}{4a^2(t-s)}}, \quad |x| \ge y_0.$$

Цілком аналогічні міркування з використанням умови **A7** показують, що

$$\int_{\mathbb{R}} p(t,x-y) u_0(y) dy \to 0,\ |x| \to \infty,$$

звідки остаточно випливає твердження нашої теореми. $\square$

4. Висновок. Розглянуте в роботі стохастичне рівняння теплопровідності описує зміну температури в середовищі при наявності певних випадкових і невипадкових надходжень теплової енергії. Показано, що при виконанні вказаних умов і необмеженому збільшенні абсолютної величини просторової координати температура прямує до нуля.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Радченко В.Н.* Интегралы по общим случайным мерам // Труды Института математики НАН Украины. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – Т. 27. – 196 с.

2. *Kwapień S., Woyczyński W.A.* Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple. – Boston: Birkhäuser, 1992.

3. *Gawarecki L.* Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions. – Heidelberg: Springer, 2011.

4. *Peszat S., Zabczyk J.* Stochastic partial differential equations with Lévy noise. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

5. *Radchenko V.M.* Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure. // Studia Math. – 2009. – **194**, №3. – P. 231-251.

6. *Радченко В.М.* Властивості інтегралів за загальною випадковою мірою в стохастичному рівнянні теплопровідності // Теор. ймовірн. та матем. статист. – 2010. – **82**. – С. 104-114.

7. *Радченко В.Н.* Об определении интеграла от случайной функции // Теория вероятностей и её применения. – 1996. – **41**, №3. – С. 677-682.