УДК 517.929.7

©2011 р. М.П. Філіпчук, О.І. Філіпчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Буковинська державна фінансова академія

ОДНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

Чисельно-аналітичним методом досліджується питання існування та наближеної побудови розв'язку системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом та крайовими умовами вигляду $Ax(0)+Bx(T)+C\int\limits_0^T x(t)dt = d$.

The question of existence and approximate construction of a solution for a differential equations system with transformed argument and boundary conditions in the form $Ax(0)+Bx(T)+C\int\limits_0^T x(t)dt = d$ is investigated by the numerical-analytical method.

Чисельно-аналітичний метод А.М. Самойленка виявився ефективним та універсальним методом дослідження різноманітних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь [1, 2]. У дослідженнях крайових задач для рівнянь з відхиленим аргументом він ще не знайшов такого ж широкого застосування [3]. Відзначимо в цьому напрямку праці [1, 4] та [5], де розглянуто деякі крайові задачі відповідно для систем із постійним запізненням та диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу.

У даній роботі розглядається система диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda(t))), \tag{1}$$

де $t \in [0,T]$, $T = const > 0$; $x, f \in R^n$; $\lambda : [0,T] \to [0,T]$ – довільне неперервне відображення. Функція $f(t,x,y)$ вважається неперервною по t,x,y в області $G = [0,T]\times D\times D$, де D – замкнена обмежена область в R^n.

Припустимо також, що функція $f(t,x,y)$ в області G обмежена вектором $M \in R^n$, $M_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, та задовольняє умову Ліпшіця по x,y з матрицею $K = \{k_{ij} \geq 0;\ i,j = \overline{1,n}\}$:

$$|f(t,x,y)| \leq M, \tag{2}$$

$$|f(t,\overline{x},\overline{y}) - f(t,\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}})| \leq K(|\overline{x}-\overline{\overline{x}}| + |\overline{y}-\overline{\overline{y}}|), \tag{3}$$

де

$$|f(t,x,y)| = (|f_1(t,x,y)|, \dots, |f_n(t,x,y)|)$$

і нерівність між векторами розуміється покомпонентно.

Розглянемо для системи (1) крайові умови вигляду

$$Ax(0) + Bx(T) + C\int\limits_0^T x(t)dt = d, \tag{4}$$

де A, B, C – сталі $n\times n$ матриці, d – сталий n-вимірний вектор.

Зауважимо, що для системи звичайних диференціальних рівнянь крайові умови типу (4) розглядалися в [6].

Відзначимо також, що в працях [7-10] для системи (1) обгрунтовано схеми чисельно-аналітичного методу у випадках двоточкових, багатоточкових та інтегральних крайових умов.

Припустимо, що матриця $2B + TC$ є невиродженою:

$$\det(2B + TC) \neq 0. \tag{5}$$

Позначимо через D_β множину точок $x_0 \in R^n$, які містяться в області D разом зі своїм β-околом, де

$$\beta = \frac{T}{2}SM + 2|Hd(x_0)|,$$

$$H=(2B+TC)^{-1}, S=(E+\frac{4}{3}T|HC|),$$
$$d(x_0)=d-(A+B+TC)x_0.$$

Нехай
$$D_\beta \neq \varnothing \tag{6}$$
і найбільше власне значення матриці $Q=TSK$ не перевищує одиниці:
$$\nu_{\max}(Q)<1. \tag{7}$$

Розглянемо послідовність функцій, які визначаються рекурентним співвідношенням
$$x_0(t,x_0)=x_0,$$
$$x_m(t,x_0)=x_0+Lg_{m-1}(t,x_0)+$$
$$+\frac{2t}{T}H\left(d(x_0)-C\int\limits_0^T Lg_{m-1}(t,x_0)dt\right), \tag{8}$$
$$m=1,2,\ldots,$$
$$g_{m-1}(t,x_0)\equiv f(t,x_{m-1}(t,x_0),x_{m-1}(\lambda(t),x_0)),$$
де параметр $x_0\in D_\beta$, а оператор L діє на неперервну при $t\in[0,T]$ вектор-функцію $h(t,x_0)\equiv g_{m-1}(t,x_0)$ наступним чином:
$$Lh(t,x_0)=\int\limits_0^t\left[h(z,x_0)-\frac{1}{T}\int\limits_0^T h(s,x_0)ds\right]dz.$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що для довільного $x_0\in D_\beta$ всі функції цієї послідовності задовольняють крайові умови (4).

Має місце наступне твердження про збіжність послідовних наближень $x_m(t,x_0)$ вигляду (8).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (2), (3), (5)-(7). Тоді послідовність функцій $x_m(t,x_0)$ вигляду (8), які для довільного $x_0\in D_\beta$ задовольняють крайові умови (4), рівномірно збігається при $m\to\infty$ в області $(t,x_0)\in[0,T]\times D_\beta$ до граничної функції $x^*(t,x_0)$, яка задовольняє крайові умови (4) і є розв'язком інтегрального рівняння*
$$x(t)=x_0+Lf(t,x(t),x(\lambda(t)))+\frac{2t}{T}H\times$$
$$\times\left(d(x_0)-C\int\limits_0^T Lf(t,x(t),x(\lambda(t)))dt\right), \tag{9}$$
який при $t=0$ проходить через точку $x^*(0,x_0)=x_0$. Крім цього, $x^*(t,x_0)$ є розв'язком крайової задачі
$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(\lambda(t)))+\Delta(x_0),$$
$$Ax(0)+Bx(T)+C\int\limits_0^T x(t)dt=d, \tag{10}$$
де
$$\Delta(x_0)=\frac{2}{T}H\times$$
$$\times\left(d(x_0)-C\int\limits_0^T Lf(t,x(t),x(\lambda(t)))dt\right)-$$
$$-\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t,x(t),x(\lambda(t)))dt.$$
Для відхилення $x^*(t,x_0)$ від $x_m(t,x_0)$ при всіх $(t,x_0)\in[0,T]\times D_\beta$ і $m=1,2,\ldots$ вірна оцінка
$$|x^*(t,x_0)-x_m(t,x_0)|\leq W_m(x_0), \tag{11}$$
де
$$W_m(x_0)=Q^m(E-Q)^{-1}\beta.$$

Д о в е д е н н я. Покажемо, що в просторі неперервних вектор-функцій послідовність (8) є фундаментальною, а отже, і рівномірно збіжною.

Встановимо спочатку, що при $x_0\in D_\beta$ всі функції $x_m(t,x_0)$ містяться в D. На підставі (8), враховуючи (2) та лему 2.1[1], маємо:
$$|x_1(t,x_0)-x_0|\leq 2t\left(1-\frac{t}{T}\right)M+$$
$$+2|Hd(x_0)|+2|HC|M\int\limits_0^T 2t\left(1-\frac{t}{T}\right)dt\leq$$
$$\leq\frac{T}{2}M+2|Hd(x_0)|+2|HC|M\cdot\frac{1}{3}T^2=$$
$$=\frac{T}{2}(E+\frac{4}{3}T|HC|)M+2|Hd(x_0)|=$$

$$= \frac{T}{2} SM + 2|Hd(x_0)| = \beta. \qquad (12)$$

Тому $x_1(t, x_0) \in D$, як тільки $x_0 \in D_\beta$. Індукцією легко показати, що для всіх $m = 1, 2, \ldots,\ t \in [0, T]$ і будь-якого $x_0 \in D_\beta$ функції $x_m(t, x_0)$ вигляду (8) не виходять за межі області D.

Покладаючи

$$r_{m+1}(t, x_0) = |x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)|,$$

на підставі (8) із врахуванням (3) маємо:

$$r_{m+1}(t, x_0) \leq K \left[(1 - \frac{t}{T}) \int\limits_0^t \omega_m(s, x_0) ds + \right.$$

$$\left. + \frac{t}{T} \int\limits_t^T \omega_m(s, x_0) ds \right] +$$

$$+ 2|HC|K \int\limits_0^T \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int\limits_0^t \omega_m(s, x_0) ds + \right.$$

$$\left. + \frac{t}{T} \int\limits_t^T \omega_m(s, x_0) ds \right] dt, \qquad (13)$$

де $\omega_m(s, x_0) = r_m(s, x_0) + r_m(\lambda(s), x_0)$.

Згідно з (12),

$$r_1(t, x_0) = |x_1(t, x_0) - x_0| \leq \beta,$$

тому із (13) при $m = 1$ знаходимо:

$$r_2(t, x_0) \leq 2K\beta \cdot 2t \left(1 - \frac{t}{T}\right) +$$

$$+ 4|HC|K\beta \int\limits_0^T 2t \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt \leq$$

$$\leq K\beta T + 4|HC|K\beta \cdot \frac{1}{3} T^2 =$$

$$= T(E + \frac{4}{3} T|HC|)K\beta = TSK\beta = Q\beta.$$

Індукцією можна довести, що для всіх $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$

$$r_{m+1}(t, x_0) \leq Q^m \beta, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Тому для $j \geq 1$ маємо нерівність:

$$|x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{j} r_{m+i}(t, x_0) \leq \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i} \right) \beta =$$

$$= Q^m \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \right) \beta. \qquad (14)$$

Умова (7) гарантує виконання співвідношень

$$\lim_{m \to \infty} Q^m = 0, \quad \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (E - Q)^{-1}. \qquad (15)$$

Тоді із (14) та (15) на підставі критерію Коші випливає, що послідовність $x_m(t, x_0)$ вигляду (8) рівномірно збігається при $m \to \infty$ в області $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ і

$$\lim_{m \to \infty} x_m(t, x_0) = x^*(t, x_0). \qquad (16)$$

Оскільки всі послідовні наближення $x_m(t, x_0)$ задовольняють крайові умови (4), то й гранична функція $x^*(t, x_0)$ також їх задовольняє. При $j \to \infty$ із (14), враховуючи (16) та (15), для всіх $m = 1, 2, \ldots,\ (t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ отримуємо оцінку (11). Крім цього, переходячи із врахуванням (16) у (8) до границі при $m \to \infty$, бачимо, що функція $x^*(t, x_0)$ є розв'язком інтегрального рівняння (9), який при $t = 0$ проходить через точку $x^*(0, x_0) = x_0$. Отже, гранична функція $x^*(t, x_0)$ справді є розв'язком крайової задачі (10). Теорему доведено.

На підставі теореми 1, використовуючи стандартну методику [2], нескладно отримати наведені далі твердження.

Необхідні і достатні умови для того, щоб гранична функція $x^*(t, x_0)$ послідовності (8) була розв'язком крайової задачі (1), (4), дає наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб розв'язок $x^*(t)$ початкової задачі*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda(t))), \;\; x(0) = x_0,$$

був одночасно розв'язком крайової задачі (1), (4), необхідно і досить, щоб x_0 було розв'язком визначального рівняння

$$\Delta(x_0) = 0,$$

де

$$\Delta(x_0) = \frac{2}{T}H\times$$

$$\times\left(d(x_0) - C\int_0^T Lf(t, x^*(t, x_0), x^*(\lambda(t), x_0))dt\right) -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(t, x^*(t, x_0), x^*(\lambda(t), x_0))dt. \qquad (17)$$

При цьому $x^*(t) = x^*(t, x_0)$ і для всіх $m = 1, 2, \ldots,$ $t \in [0, T]$ щодо відхилення точного розв'язку $x^*(t) = x^*(t, x_0)$ крайової задачі (1), (4) від її наближеного розв'язку $x_m(t, x_0)$ вигляду (8) вірна оцінка (11).

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (4) дає наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1, а також умови:*

1) існує опукла замкнена область $D_1 \subset D_\beta$, в якій наближене визначальне рівняння

$$\Delta_m(x_0) = 0,$$

де

$$\Delta_m(x_0) = \frac{2}{T}H\times$$

$$\times\left(d(x_0) - C\int_0^T Lf(t, x_m(t, x_0), x_m(\lambda(t), x_0))dt\right) -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(t, x_m(t, x_0), x_m(\lambda(t), x_0))dt, \qquad (18)$$

має для деякого фіксованого $m \geq 1$ єдиний розв'язок $x_0 = x_{0m}$ ненульового індексу;

2) на межі S_1 області D_1 виконується нерівність

$$\inf_{x_0 \in S_1} |\Delta_m(x_0)| > (E + S)KW_m(x_0).$$

Тоді крайова задача (1), (4) має розв'язок $x^*(t)$, початкове значення

$$x^*(0) = x_0^* \qquad (19)$$

якого визначається таким x_0^*, яке належить області D_1.

Оцінку близькості граничних функцій $x^*(t, x_0')$ і $x^*(t, x_0'')$ для точок $x_0', x_0'' \in D_\beta$ дає наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для будь-яких точок $x_0', x_0'' \in D_\beta$ щодо відхилення граничних функцій $x^*(t, x_0')$ і $x^*(t, x_0'')$ послідовностей $x_m(t, x_0')$ і $x_m(t, x_0'')$ вигляду (8) відповідно вірна оцінка*

$$|x^*(t, x_0') - x^*(t, x_0'')| \leq$$

$$\leq (E - Q)^{-1}(E + 2P)|x_0' - x_0''|,$$

де

$$P = |H(A + B + TC)|.$$

Неперервну залежність визначальної функції $\Delta(x_0)$ вигляду (17) від x_0 дає наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді функція $\Delta(x_0)$ вигляду (17) визначена, неперервна в області D_β і для всіх $x_0', x_0'' \in D_\beta$ задовольняє оцінку*

$$|\Delta(x_0') - \Delta(x_0'')| \leq$$

$$\leq \left[(E + S)K(E - Q)^{-1}(E + 2P) + \frac{2}{T}P\right]\times$$

$$\times|x_0' - x_0''|.$$

Необхідні умови розв'язності крайової задачі (1), (4) дає наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб деяка область $D_2 \subset D_\beta$ містила точку x_0^*, яка визначає при $t = 0$ початкове значення (19) розв'язку $x^*(t)$ крайової задачі (1), (4), необхідно, щоб для всіх m і довільного $\overline{x}_0 \in D_2$ виконувалась нерівність*

$$|\Delta_m(\overline{x}_0)| \leq$$

$$\leq \sup_{x_0 \in D_2}\left[(E + S)K(E - Q)^{-1}(E + 2P) + \frac{2}{T}P\right]\times$$

$$\times|x_0 - \overline{x}_0| + (E + S)KW_m(\overline{x}_0).$$

Розглянемо часткові випадки крайових умов (4).

1. Нехай $C = 0$, тобто маємо лінійні двоточкові крайові умови вигляду

$$Ax(0) + Bx(T) = d.$$

В цьому випадку

$$H = \frac{1}{2}B^{-1},\ d(x_0) = d - (A+B)x_0,\ S = E,$$

$$\beta = \frac{T}{2}M + \left|B^{-1}d - B^{-1}(A+B)x_0\right|,\ Q = TK,$$

$$P = \frac{1}{2}\left|B^{-1}(A+B)\right|$$

і отримуємо результати, раніше наведені в працях [7, 9].

2. Нехай $A = 0$, $B = 0$, $C = E$, тобто маємо інтегральні крайові умови вигляду

$$\int\limits_0^T x(t)dt = d.$$

В цьому випадку

$$H = \frac{1}{T}E,\ d(x_0) = d - Tx_0,\ S = \frac{7}{3}E,$$

$$\beta = \frac{7}{6}TM + 2\left|\frac{1}{T}d - x_0\right|,\ Q = \frac{7}{3}TK,$$

$$P = E$$

і отримуємо результати, раніше наведені в працях [9, 10].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — К.: Наук. думка, 1985. — 224 с.

2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1992. — 280 с.

3. *Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, N 7. — С. 960-979.

4. *Янчук С.В.* Дослідження неавтономних диференціальних рівнянь та системи Чуа: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Київ, 1997. — 111 с.

5. *Augustynowicz A., Kwapisz M.* On a numerical-analytic method of solving of boundary value problem for functional differential equation of neutral type // Math. Nachr. — 1990. — **145**. — P. 255-269.

6. *Мартынюк С.В.* Исследование решений краевых задач для систем нелинейных дифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1992.

7. *Філіпчук М.П.* Чисельно-аналітичний метод дослідження двоточкових крайових задач для нелінійних систем диференціальних рівнянь із змінним запізненням // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. — К.: Ін-т математики НАН України, 1997. — Вип. 15. — С. 238-251.

8. *Філіпчук М.П., Бігун Я.Й.* Чисельно-аналітичний метод дослідження багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, N 11. — С. 1581-1585.

9. *Філіпчук М.П.* Метод усереднення в крайових задачах для диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Чернівці, 1999. — 142 с.

10. *Філіпчук М.П.* Задача з інтегральними крайовими умовами для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Чернівці: Прут, 2001. — Вип. 7. — С. 243-250.