УДК 519.4

©2011 р. М.І. Сумарюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

СИСТЕМИ РІВНЯНЬ У ВІЛЬНИХ ГРУПАХ, ЩО АПРОКСИМУЮТЬСЯ У КЛАСІ СКІНЧЕННИХ АБЕЛЕВИХ ГРУП s-ПЕРІОДИЧНИХ ПІДСТАНОВОК НАТУРАЛЬНОГО РЯДУ

У роботі встановлено достатні умови, при виконанні яких неособлива система рівнянь над вільною групою скінченного або зліченного рангу апроксимується у класі скінченних абелевих груп s-періодичних підстановок натурального ряду.

The sufficient conditions of approximating of the non-singular equations system over a free group of finite or countable rank in the class of finite abelian groups of s-periodic permutations of natural numbers are considered in the article.

1. Вступ. Одним із способів вивчення властивостей груп є їх апроксимування у деякому класі епіморфних образів цих груп, які дозволяють встановити наявність (або відсутність) у групі тієї чи іншої властивості. Апроксимування груп тісно пов'язане із розв'язанням багатьох проблем алгоритмічної теорії груп, наприклад, проблемою рівності та проблемою спряженості, які поставлені Деном, проблемою входження в скінченно породжені підгрупи, проблемами розв'язності систем рівнянь у групах, тощо (див. [1-5]). Поштовхом для таких досліджень була робота Мальцева [4], в якій вперше знайдено зв'язок між фінітною апроксимовністю скінченно породжених груп і розв'язністю в них алгоритмічних проблем, використовуючи при цьому гомоморфні образи груп на скінченні групи.

Рівняння у групах, а особливо, у вільній групі, вивчаються давно (огляд основних результатів див. у [2]). Наприклад, розв'язність згаданої проблеми спряженості у деякій групі G, пов'язана із розв'язанням найпростіших квадратичних рівнянь виду $x^{-1}fx = g$ у цій групі. Серед усіх задач теорії апроксимування груп виділяють задачі про апроксимування систем рівнянь у вільних групах. Отже, нехай F_r – деяка вільна група рангу $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (якщо $r = \infty$, то F_∞ – вільна група зліченного рангу), над якою розглядається система рівнянь

$$v_i(\overline{g}, \overline{x}) = 1, i \in \mathbb{I}, \tag{1}$$

де $v_i(\overline{g}, \overline{x}) = v_i(g_1, g_2, ..., g_n, x_1, x_2, ..., x_m)$ – сукупність групових слів, індексованих множиною $\mathbb{I}$ від елементів $g_1, g_2, ..., g_n$ (коефіцієнтів) даної групи F_r і невідомих $x_1, x_2, ..., x_m$. Нехай $\varphi : F_r \to H$ – довільний епіморфізм групи F_r на групу H із деякого класу груп $\mathcal{K}$. Системі рівнянь (1) поставимо у відповідність систему рівнянь

$$v_i(\overline{h}, \overline{x}) = 1, i \in \mathbb{I}, \tag{2}$$

відносно коефіцієнтів-образів $\overline{h} = \varphi(\overline{g})$ із групи H. Із розв'язності системи (1) в F_r випливає розв'язність системи (2) в H. Кажуть, що система рівнянь (1) апроксимується у класі груп $\mathcal{K}$, якщо із її нерозв'язності в F_r випливає нерозв'язність системи рівнянь (2) для деякого епіморфного образу $H \in \mathcal{K}$ групи F_r.

Що стосується рівнянь відносно коефіцієнтів із вільної групи F_r, то відомі наступні факти [1]. 1) Рівняння виду $xgx^{-1} = f$, $f, g \in F_r$, апроксимується класом всіх скінченних p-груп. 2) Рівняння виду $x^k = f$, $f \in F_r$, апроксимується класом всіх скінченних p-груп за умови, що k не ділиться націло на p. 3) Рівняння виду $x_1^2 x_2^2 x_3^2 = f$, $f \in F_r$, не завжди апроксимується класом скінченних простих груп. 4) Рівняння виду $[x_1, x_2] = f^k$, $1 \neq f \in F_r$, $k \geq 2$, не апроксимується класом скінченних простих груп.

Таким чином, виникає питання про апроксимування довільних рівнянь чи їх систем із коефіцієнтами вільної групи F_r у класі всіх скінченних груп.

У даній роботі встановлено достатні умови апроксимування певного типу систем рівнянь над вільною групою скінченного або зліченного рангу у класі скінченних s-періодичних абелевих груп підстановок натурального ряду, які ілюструються на конкретних прикладах систем рівнянь над вільними групами, що дозволяє зовсім просто досліджувати їх апроксимовність у даному класі скінченних груп.

2. Апроксимування рівнянь над вільними групами скінченного рангу. Над вільною групою F_r рангу $r \in \mathbb{N}$ розглянемо рівняння $v(\overline{g}, \overline{x}) = 1$. При цьому вважатимемо, що його коефіцієнти $g_1, g_2, ..., g_n$ є елементами бази вільної групи F_r, бо у іншому випадку можемо виразити відповідні коефіцієнти через елементи цієї бази (тоді $n \leq r$).

Нехай β_i – сума показників, з якими коефіцієнт g_i, входить у запис слова v ($i = \overline{1,n}$). Аналогічно, нехай α_j – сума показників, з якими невідома x_j, $j = \overline{1,m}$, входить у запис цього ж слова v. Надалі потрібні будуть такі числа

$$\beta = \sum_{k=1}^{n} \beta_k, d = \text{НСД}(|\alpha_1|,\ |\alpha_2|, ..., |\alpha_m|).$$

Якщо набір чисел $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ не є нульовим, то рівняння $v(\overline{g}, \overline{x}) = 1$ називатимемо неособливим.

Число λ називатимемо показником деякого елемента g скінченно породженої групи G, якщо елемент g можна подати будь-яким чином у вигляді добутку твірних елементів цієї групи так, щоб сума всіх відповідних їхніх показників дорівнювала λ.

Зазначимо, що одному і тому ж елементу деякої скінченно породженої групи можуть відповідати різні його показники. Наприклад, для циклічної групи другого порядку $< g \,|\, g^2 = 1 >$ маємо: всі числа $2\lambda - 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, є показниками елемента g, бо $g = g^{2\lambda-1}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, і всі числа 2λ, $\lambda \in \mathbb{Z}$, є показниками одиничного елемента, бо $1 = g^{2\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Правильним є наступне твердження, яке також має окремий інтерес.

Лема 1. *Якщо неособливе рівняння $v(\overline{g}, \overline{x}) = 1$ є розв'язним у вільній групі F_r рангу $r \in \mathbb{N}$ і визначені числа β та d, то виконується подільність $\beta \vdots d$.*

Доведення. Нехай $Y = \{y_1, y_2, ..., y_r\}$ – база вільної групи F_r. Визначимо відображення φ, яке кожному елементу y_l, $l = \overline{1,r}$, із множини Y ставить у відповідність транспозицію симетричної групи підстановок натурального ряду $S(\mathbb{N})$, яка за допомогою циклу записується так: $\tau_l \equiv (2l-1, 2l)$, $l = \overline{1,r}$. Тоді, так визначене відображення φ продовжується до епіморфізму груп $\psi : F_r \to H$, де $H \equiv < \tau_l \,|\, l = \overline{1,r} >$. При цьому помічаємо, що H – скінченна абелева 2-періодична група підстановок натурального ряду.

Нехай $\overline{h} \equiv \psi(\overline{g})$. Із розв'язності рівняння $v(\overline{g}, \overline{x}) = 1$ у вільній групі F_r випливає, що рівняння $v(\overline{h}, \overline{x}) = 1$ є розв'язним у абелевій групі H. При цьому рівняння $v(\overline{h}, \overline{x}) = 1$ можемо записати у такому вигляді:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_m^{\alpha_m} h_1^{\beta_1} h_2^{\beta_2} ... h_n^{\beta_n} = 1. \qquad (3)$$

Нехай $\overline{x} = (r_1, r_2, ..., r_m)$ – розв'язок рівняння (3) у групі H. Тоді

$$r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} ... r_m^{\alpha_m} h_1^{\beta_1} h_2^{\beta_2} ... h_n^{\beta_n} = 1. \qquad (4)$$

Зазначимо, що $\{h_1, h_2, ..., h_n\} \subset \{\tau_l \,|\, l = \overline{1,r}\}$ і $r_k = r_k(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_r), k = \overline{1,m}$. Отже, ліва частина рівності (4) подається у вигляді добутку твірних елементів $\{\tau_l \,|\, l = \overline{1,r}\}$ групи H. Відмітимо також, що сума всіх показників, з якими входить довільна транспозиція τ_l у запис лівої частини рівності (4), дорівнює 0.

Позначимо через λ_k показник елемента r_k із групи H для кожного $k = \overline{1,m}$. Тоді приходимо до рівності

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda_k + \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0$$

або

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda_k + \beta = 0, \qquad (5)$$

де ліва частина цієї рівності – це сума всіх показників для кожного твірного елемента τ_l, $l = \overline{1,r}$, що входить у ліву частину рівності (4). Рівняння (4) є лінійним діофантовим рівнянням відносно невідомих $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Тоді, як відомо, для існування цілочисельного розв'язку цього рівняння необхідно, щоб число β ділилося націло на $d = $ НСД$(|\alpha_1|, \ |\alpha_2|, ..., |\alpha_m|)$. Отже, отримали те, що й потрібно було довести. □

Один із основних результатів даної роботи сформулюємо у такому вигляді.

Теорема 1. *Якщо для неособливого рівняння $v(\overline{g}, \overline{x}) = 1$ над вільною групою F_r рангу $r \in \mathbb{N}$ визначені числа β та d такі, що β не ділиться націло на d, причому існує таке натуральне число s, що $d \vdots s$, але β не ділиться націло на s, то дане рівняння апроксимується у деякому класі $\mathcal{K}_s$ скінченних s-періодичних абелевих груп підстановок натурального ряду.*

Доведення. Нехай $Y = \{y_1, y_2, ..., y_r\}$ – база вільної групи F_r. Визначимо відображення $\varphi : Y \to S(\mathbb{N})$ за таким правилом: $\varphi(y_l) = \tau_{s,l}$, де

$$\tau_{s,l} \equiv (s(l-1)+1, s(l-1)+2, ..., sl), l = \overline{1,r},$$

– цикли довжини s. Відображення φ продовжується до епіморфізму груп $\psi : F_r \to H_s$, де символом H_s позначено групу, породжену всіма циклами $\tau_{s,l}$, $l = \overline{1,r}$. Зазначимо, що група H_s є скінченною s-періодичною абелевою групою підстановок натурального ряду.

Нехай $\overline{h} = \psi(\overline{g})$. Тоді розглянемо рівняння $v(\overline{h}, \overline{x}) = 1$ відносно кофіцієнтів-образів при епіморфізмі ψ. Припустимо, що воно є розв'язним у групі H_s. Оскільки група H_s є абелевою, то рівняння $v(\overline{h}, \overline{x}) = 1$ можемо записати у вигляді

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_m^{\alpha_m} h_1^{\beta_1} h_2^{\beta_2} ... h_n^{\beta_n} = 1.$$

Якщо $\overline{x} = (r_1, r_2, ..., r_m)$ – розв'язок цього рівняння у групі H_s, то позначивши через λ_k показник елемента $r_k \in H_s$ для кожного $k = \overline{1,m}$, аналогічно як і при доведенні леми 1, прийдемо до рівності

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda_k + \beta = 0.$$

Звідси отримуємо порівняння

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda_k \equiv -\beta (mod\, s). \qquad (6)$$

Але, згідно із властивостями числа s маємо, що $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda_k \vdots s$, а $\beta \not\equiv 0 (mod\, s)$. Отримали суперечність щодо виконання порівняння (6). Тоді рівняння $v(\overline{h}, \overline{x}) = 1$ нерозв'язне у групі H_s і, у деякому класі $\mathcal{K}_s$ скінченних s-періодичних абелевих підгруп групи підстановок $S(\mathbb{N})$ такому, що $H_s \in \mathcal{K}_s$, апроксимує рівняння $v(\overline{g}, \overline{x}) = 1$ над F_r. □

3. Апроксимування систем рівнянь над вільними групами скінченного рангу. Нехай над вільною групою F_r рангу $r \in \mathbb{N}$ розглядається система рівнянь $v_i(\overline{g}, \overline{x}) = 1$, $i \in \mathbb{I}$, причому коефіцієнти $g_1, g_2, ..., g_n$ належать до бази групи F_r (тоді $n \leq r$).

Нехай β_{ik} означає суму всіх показників, з якими коефіцієнт g_k входить у запис слова v_i; аналогічно символ α_{ij} означає суму показників, з якими входить невідома x_j у запис цього ж слова v_i. Визначимо числа $\overline{\beta}_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}$, $d_i = $ НСД$(|\alpha_{i1}|, |\alpha_{i2}|, ..., |\alpha_{im}|)$ для кожного $i \in \mathbb{I}$. Тоді застосувавши лему 1 та теорему 1 до кожного із рівнянь системи $v_i(\overline{g}, \overline{x}) = 1$, $i \in \mathbb{I}$, прийдемо до таких результатів.

Лема 2. *Якщо система неособливих рівнянь $v_i(\overline{g}, \overline{x}) = 1$, $i \in \mathbb{I}$, є розв'язною у вільній групі F_r рангу $r \in \mathbb{N}$ і визначені числа $\overline{\beta}_i$, d_i, $i \in \mathbb{I}$, то для кожного $i \in \mathbb{I}$ виконується подільність $\overline{\beta}_i \vdots d_i$.*

Теорема 2. *Якщо для системи неособливих рівнянь $v_i(\overline{g}, \overline{x}) = 1$, $i \in \mathbb{I}$, над вільною групою F_r рангу $r \in \mathbb{N}$ визначені числа $\overline{\beta}_i$, d_i, $i \in \mathbb{I}$, такі, що для деякого індексу $i_0 \in \mathbb{I}$ число $\overline{\beta}_{i_0}$ не ділиться націло на d_{i_0}, причому існує таке натуральне число s, що $d_{i_0} \vdots s$, але $\overline{\beta}_{i_0}$ не ділиться націло на s, то ця система апроксимується у деякому класі $\mathcal{K}_s$ скінченних s-періодичних абелевих груп підстановок натурального ряду.*

4. Апроксимування систем рівнянь над вільними групами зліченного ран-

гу. Нехай над вільною групою F_∞ зліченного рангу розглядається система рівнянь $v_i(\overline{g},\overline{x}) = 1$, $i \in \mathbb{I}$, причому коефіцієнти $g_1, g_2, ..., g_n$ належать до бази групи F_∞. Базу групи F_∞ подамо так: $Y = \{y_1, y_2, ...\}$, де $y_l = g_l$, $l = \overline{1,n}$. Нехай $Y_n = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Визначимо відображення $\varphi : Y \to Y_n$ за правилом: $\varphi(y_l) = \begin{cases} y_l, & \text{якщо } l \le n, \\ 1, & \text{якщо } l > n. \end{cases}$ Тоді відображення φ продовжується до епіморфізму груп $\psi : F_\infty \to F_n$, де F_n – вільна група рангу n з базою Y_n. Зазначимо, що $\overline{g} = \psi(\overline{g})$. Тоді відносно коефіцієнтів-образів при епіморфізмі ψ система рівнянь $v_i(\overline{g},\overline{x}) = 1$, $i \in \mathbb{I}$, не зміниться.

Має місце наступне твердження.

Теорема 3. *Якщо система рівнянь $v_i(\overline{g},\overline{x}) = 1$, $i \in \mathbb{I}$, є нерозв'язною у групі F_∞, то ця система рівнянь є також нерозв'язною у групі F_n.*

Доведення. Припустимо, що система рівнянь $v_i(\overline{g},\overline{x}) = 1$, $i \in \mathbb{I}$, є нерозв'язною у групі F_∞ і нехай $\overline{r}$ – розв'язок цієї системи рівнянь у групі F_n. Оскільки $F_n \subset F_\infty$, то набір елементів $\overline{r}$ буде розв'язком даної системи рівнянь у групі F_∞. Отримали суперечність. $\square$

Таким чином, дослідження апроксимовності систем рівнянь над вільною групою зліченного рангу зводиться до дослідження апроксимовності систем рівнянь над вільними групами скінченного рангу.

5. Приклади. 1) Рівняння $x_1^2 x_2^2 x_3^2 = f$, де f є елементом бази вільної групи F_r апроксимується у деякому класі скінченних 2-періодичних абелевих груп підстановок натурального ряду. Справді, у даному випадку $\beta = 1$, $d = 2$, $s = 2$ і всі умови теореми 1 виконуються. При цьому, згідно із лемою 1, дане рівняння є нерозв'язним у групі F_r, оскільки не виконується подільність $\beta \vdots d$.

2) Система рівнянь

$$\begin{cases} x_1^6 x_2^6 x_3^{-6} f = 1, \\ x_1^{-3} x_2^3 g = 1, \\ x_3^{-15} x_2^{15} x_1^{15} f^2 = 1, \end{cases}$$

над вільною групою F_2 з вільною базою $\{f, g\}$, є нерозв'язною у даній групі і апроксимується, наприклад, у класах скінченних груп підстановок натурального ряду $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_5$ та $\mathcal{K}_{15}$. Справді, у даному випадку можна визначити числа

$$\overline{\beta}_1 = \overline{\beta}_2 = 1, \overline{\beta}_3 = 2, d_1 = 6, d_2 = 3, d_3 = 15,$$

$$i_0 = 3, s \in \{3, 5, 15\}$$

таким чином, що виконуються умови теореми 2, але не виконуються умови леми 2.

3) Безкоефіцієнтне рівняння $x^k = f$ над вільною групою F_r апроксимується у деякому класі $\mathcal{K}_k$ скінченних k-періодичних абелевих підгруп в $S(\mathbb{N})$ за умови, що довжина елемента f у групі F_r не ділиться націло на k.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мельников О.В.* Общая алгебра /*Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А. и др. под общ. ред. Скорнякова Л.А.*// М.: Наука, Т.1. – 1990. – 592с.

2. *Григорчук Р.И.* Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией /*Григорчук Р.И., Курчанов П.Ф.* // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. – 1990. – **58**. – С. 191-256.

3. *Адян С.И.* Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп /*Адян С.И., Дурнев В.Г.*// Успехи мат. наук. – 2000. – Т. 55, вып. 2(332). – С. 3-94.

4. *Мальцев А.И.* О гомоморфизмах на конечные группы /*Мальцев А.И.* // Уч. зап. Ивановского гос. пед. ин-та. – 1958. – Т.118, №5. – С. 49-60.

5. *Носков Г.А.* Бесконечные группы /*Носков Г.А., Ремесленников В.Н., Романьков В.А.*// Алгебра, топология, геометрия. – М.: ВИНИТИ. – 1979. – Т. 17. – С. 65-157.