УДК 517.911

©2011 р. В.Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

ЗАДАЧІ КОШІ З НЕЄДИНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

Доведено наступну теорему. Нехай G – область в просторі $\mathbb{R}^2$ і $f : G \to \mathbb{R}$ – довільна неперервна функція. Для довільних точки $(t_0, x_0) \in G$ і числа $\varepsilon > 0$ існує така неперервна функція $g : G \to \mathbb{R}$, що $\sup\limits_{(t,x)\in G} |g(t,x) - f(t,x)| \leqslant \varepsilon$ і задача Коші $\dfrac{dz(t)}{dt} = g(t, z(t)),\ z(t_0) = x_0$ має більше, ніж один розв'язок.

We prove the following theorem. Let G be a domain in the space $\mathbb{R}^2$ and $f : G \to \mathbb{R}$ be an arbitrary continuous map. For an arbitrary point $(t_0, x_0) \in G$ and a number $\varepsilon > 0$ there exists a continuous map $g : G \to \mathbb{R}$ such that $\sup\limits_{(t,x)\in G} |g(t,x) - f(t,x)| \leqslant \varepsilon$ and the Cauchy problem $\dfrac{dz(t)}{dt} = g(t, z(t)),\ z(t_0) = x_0$ has more than one solution.

Важливою в теорії звичайних диференціальних рівнянь є

Теорема 1 (Пеано, [1]). *Нехай G – область простору $\mathbb{R}^2$ і $g : G \to \mathbb{R}$ – довільна неперервна функція. Для довільної точки $(t_0, x_0) \in G$ задача Коші*

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = g(t, z(t)), \\ z(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

має хоча б один розв'язок.

У випадку виконання умов цієї теореми задача (1) може мати неєдиний розв'язок, що підтверджується наступним прикладом диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{|x|}$$

з нескінченним числом розв'язків, для кожного з яких $x(0) = 0$.

Задачі Коші з неєдиними розв'язками не є рідкістю. *Такі задачі утворюють множину, що є щільною у множині всіх задач Коші.* Це ми покажемо далі.

Метою статті є доведення наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай G – область простору $\mathbb{R}^2$ і $f : G \to \mathbb{R}$ – довільна неперервна функція. Для довільних точки $(t_0, x_0) \in G$ і числа $\varepsilon > 0$ існує така неперервна функція $g : G \to \mathbb{R}$, що*

$$\sup_{(t,x)\in G} |g(t,x) - f(t,x)| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

і задача (1) *має більше, ніж один розв'язок.*

Доведення. Використаємо приклад неєдиності Ф. Хартмана [2]. Ф. Хартманом побудовано неперервну функцію $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, таку, що для кожної точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ задача Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = U(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

має більше, ніж один розв'язок на кожному відрізку $[t_0, t_0 + \gamma]$ і $[t_0 - \gamma, t_0]$, $\gamma > 0$.

Очевидно, що аналогічну властивість має і задача Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = U(t + \alpha, x(t) + \beta), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

для довільних дійсних чисел α і β.

Нехай δ_1, δ_2 і δ_3 – такі дійсні числа, що

$$|\delta_1| < \varepsilon, \tag{3}$$

$$f(t_0, x_0) + \delta_1 \neq 0$$

і

$$U(t_0 + \delta_2, x_0 + \delta_3) \neq 0.$$

Визначимо неперервну функцію $g : G \to \mathbb{R}$ за допомогою рівності

$$g(t,x) = \\ = q_r(t,x)kU(t_0+\delta_2+k(t-t_0), x+\delta_3)+ \\ +(1-q_r(t,x))f(t,x),$$

де $r \in (0,+\infty)$, $k = \dfrac{f(t_0,x_0)+\delta_1}{U(t_0+\delta_2, x_0+\delta_3)}$,

$$q_r(t,x) = \\ = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \mu(t,x) \leqslant r, \\ 2-\dfrac{\mu(t,x)}{r}, & \text{якщо } r < \mu(t,x) < 2r, \\ 0, & \text{якщо } \mu(t,x) \geqslant 2r, \end{cases}$$

і $\mu(t,x) = \sqrt{(t-t_0)^2+(x-x_0)^2}$. Очевидно, що

$$|g(t,x)-f(t,x)| = \\ = q_r(t,x)|kU(t_0+\delta_2+k(t-t_0), x+\delta_3)- \\ -f(t,x)| = \\ = q_r(t,x)|kU(t_0+\delta_2+k(t-t_0), x+\delta_3)- \\ -(f(t_0,x_0)+\delta_1)+(f(t_0,x_0)-f(t,x))+\delta_1| \leqslant \\ \leqslant q_r(t,x)(|f(t_0,x_0)+\delta_1|\omega(t,x)+ \\ +|f(t_0,x_0)-f(t,x)|+|\delta_1|.$$

де

$$\omega(t,x) = \left|\frac{U(t_0+\delta_2+k(t-t_0), x+\delta_3)}{U(t_0+\delta_2, x_0+\delta_3)} - 1\right|.$$

Звідси, визначення $q_r(t,x)$, нерівності (3) та неперервності f і U випливає виконання співвідношення (2) для всіх $r \in (0, r^*]$, де r^* – достатньо мале додатне число.

Припустимо, що відкритий круг

$$B_{r^*}(t_0,x_0) = \\ = \left\{(t,x) : \sqrt{(t-t_0)^2+(x-x_0)^2} < r^*\right\}$$

є підмножиною області G.

Далі для побудованої функції $g(t,x)$ при $r = r^*$ розглянемо задачу Коші (1). Ця задача в крузі $B_{r^*}(t_0,x_0)$ має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = kU(t_0+\delta_2+k(t-t_0), z(t)+\delta_3), \\ z(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{4}$$

Використаємо нову змінну

$$\tau = t_0 + k(t-t_0).$$

Ураховуючи, що

$$t = t_0 + k^{-1}(\tau - t_0),$$

отримаємо, що задача Коші (4) по відношенню до нової функції

$$w(\tau) = z(t_0 + k^{-1}(\tau - t_0)) \tag{5}$$

має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dw(\tau)}{d\tau} = U(\tau+\delta_2, w(\tau)+\delta_3), \\ w(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Ця задача для кожного досить малого числа $\gamma > 0$ має на кожному відрізку $[t_0, t_0+\gamma]$ і $[t_0-\gamma, t_0]$ більше, ніж один розв'язок. Тому в силу (5) задача Коші (4) має аналогічну властивість.

Отже, задача Коші (1) має більше, ніж один розв'язок.

Теорему 2 доведено.

Зазначимо, що для диференціальних рівнянь у нескінченновимірному банаховому просторі *множина розв'язків задачі Коші може бути порожньою* (див. [3]) і *множина задач Коші з порожньою множиною розв'язків є щільною у множині всіх задач Коші* (це показано автором у [4]).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
3. *Годунов А. Н.* О теореме Пеано в банаховых пространствах // Функциональный анализ и его приложения. – 1975. – Т. 9, вып. 1. – С. 59–60.
4. *Слюсарчук В. Е.* Плотность множества неразрешимых задач Коши во множестве всех задач Коши в случае бесконечномерного банахова пространства // Нелінійні коливання. – 2002. – **5**, № 1. – С. 86–89.