УДК 517.956

©2011 р. Г.М. Перун

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯМ З НЕПЕРЕРВНИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Встановлено існування з імовірністю 1 функції Гріна двоточкової задачі для лінійного стохастичного параболічного рівняння з коефіцієнтами, які залежать від t, та випадковими збуреннями неперервного типу.

The existence with the probability 1 of a Green's function for the two-point problem for a linear stochastic parabolic equation with coefficients that depend on t, and perturbations of continuous type is established.

Нелокальні багатоточкові параболічні сингулярні крайові задачі для детермінованих рівнянь глибоко вивчені у праці М.І. Матійчука [1]. Крайові задачі для рівнянь другого порядку параболічного типу з неперервними збуреннями типу білого шуму різними методами досліджувалися у працях Й.І. Гіхмана та І.Й. Гіхмана [2], [3]. Дослідженню властивостей розв'язку задачі Коші для лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння з частинними похідними і марковськими параметрами присвячена праця В.К. Ясинського, Н.П. Бодрик [4], коректність задачі Коші для лінійного стохастичного рівняння параболічного типу з неперервними збуреннями, розв'язки якої в фіксовані моменти часу зазнають імпульсних збурень, вивчалася у статті [5].

Нехай визначено ймовірнісний простір (Ω, F, P) з неспадним потоком σ-алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, $F_{t_1} \subset F_{t_2}$ для $t_1 < t_2$.

Випадкова функція $u(t,x,\omega)$ визначена на $[0,T] \times E_n \times \Omega \equiv \Pi \times \Omega$, вимірна відносно σ-алгебри F_t з ймовірністю 1 є розв'язком двоточкової задачі

$$d_t u(t,x,\omega) = \Big[\sum_{|k|\leq 2b} A_k(t) D_x^k u(t,x,\omega)\Big] dt + \\ + \Big[\sum_{|k|\leq b} C_k(t) D_x^k u(t,x,\omega)\Big] dw(t,\omega), \qquad (1)$$

$$x \in E_n, t > 0, \omega \in \Omega,$$

$$u(t,x,\omega)|_{t=0} - \mu u(t,x,\omega)|_{t=T} = \varphi(x,\omega), \\ x \in E_n, \omega \in \Omega. \qquad (2)$$

Тут $\sum\limits_{|k|\leq 2b} A_k(t) D_x^k$ та $\sum\limits_{|k|\leq b} C_k(t) D_x^k$ – диференціальні комплексно значні многочлени зі змінними за t та неперервними коефіцієнтами; $\varphi(x)$ з імовірністю 1 допускає перетворення Фур'є, $w(t,\omega)$ – скалярний вінерівський процес; μ – параметр.

Теорема. *Нехай коефіцієнти $A_k(t)$, $C_k(t)$ рівняння (1) – неперервні функції на $[0,T]$; виконується умова параболічності*

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=2b} A_k(t)(i\sigma)^k + \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Im} \sum_{|k|=b} C_k(t)(i\sigma)^k\Big)^2 \leq \\ \leq -\delta_1 |\sigma|^{2b} + \delta_2, \delta_1, \delta_2 > 0, \sigma \in E_n, \qquad (3)$$

при кожному $\sigma \in E_n$, $\omega \in \Omega$ справджується нерівність

$$|\mu \exp\{S(0,T,\sigma,\omega)\}| < 1, \qquad (4)$$

$$S(0,T,\sigma,\omega) \equiv \int_0^T \Big(\sum_{|k|\leq 2b} A_k(s)(i\sigma)^k - \\ -\frac{1}{2}\sum_{|k|\leq b} C_k(s)(i\sigma)^k\Big) ds + \\ + \int_0^T \sum_{|k|\leq b} C_k(s)(i\sigma)^k dw.$$

Тоді існує з імовірністю 1 функція Гріна $G(t,\tau,T,x,\omega)$ двоточкової задачі (1), (2). З її допомогою розв'язок задачі (1), (2) визначається формулою

$$u(t,x,\omega)=\int_{E_n}G(t,0,T,x-\xi,\omega)\varphi(\xi,\omega)d\xi \quad (5)$$

і його норма допускає оцінку

$$|MD_x^k u(t,x,\omega)|\le Ct^{-\frac{k}{2b}}|\varphi|_{C(E_n)}, \qquad (6)$$

де M – оператор математичного сподівання (МС).

Доведення. Шукатимемо розв'язок задачі (1), (2) у вигляді оберненого перетворення Фур'є від деякої функції $v(t,\sigma,\omega)$:

$$u(t,x,\omega)=F^{-1}_{\sigma\to x}v(t,\sigma,\omega)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{E_n}e^{i\sigma x}v(t,\sigma,\omega)dx, \sigma\in E_n. \qquad (7)$$

Тоді отримаємо двоточкову стохастичну задачу в образах Фур'є

$$d_t v(t,\sigma,\omega)=\Big[\sum_{|k|\le 2b}A_k(i\sigma)^k v(t,\sigma,\omega)\Big]dt+$$

$$+\Big[\sum_{|k|\le b}C_k(t)(i\sigma)^k v(t,\sigma,\omega)\Big]dw, \qquad (8)$$

$$v|_{t=0}-\mu v|_{t=T}=\tilde\varphi(\sigma),\ \ \sigma\in E_n,\omega\in\Omega. \qquad (9)$$

Загальний розв'язок рівняння (8) визначається формулою [6] і має вигляд

$$v(t,\sigma,\omega)=C\exp\Bigg\{\int_0^t\Big(\sum_{|k|\le 2b}A_k(s)(i\sigma)^k-$$

$$-\frac{1}{2}\Big(\sum_{|k|\le b}C_k(s)(i\sigma)^k\Big)^2\Big)ds+$$

$$+\int_0^t\sum_{|k|\le b}C_k(s)(i\sigma)^k dw\Bigg\}.$$

Задовольнивши крайові умови (9) , отримаємо розв'язок задачі (8), (9)

$$v(t,\sigma,\omega)=\Big(1-\mu\exp\Big\{S(0,T,\sigma,\omega)\Big\}\Big)^{-1}\times$$

$$\times\exp\Big\{S(0,t,\sigma,\omega)\Big\}\tilde\varphi(\sigma).$$

Довизначимо $S(\tau,T,\sigma,\omega)$ формулою

$$S(\tau,T,\sigma,\omega)=\int_\tau^T\Big(\sum_{|k|\le 2b}A_k(s)(i\sigma)^k-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{|k|\le b}C_k(s)(i\sigma)^k\Big)ds+$$

$$+\int_\tau^T\sum_{|k|\le b}C_s(s)(i\sigma)^k dw.$$

Позначимо через

$$Q_1(t,\tau,T,\sigma,\omega)=$$

$$=\Big(1-\mu\exp\{S(0,T,\sigma,\omega)\}\Big)^{-1}\times$$

$$\times\exp\{S(\tau,t,\sigma,\omega)\}$$

нормальний фундаментальний розв'язок (НФР) двоточкової задачі. З імовірністю 1 $Q_1(\tau,\tau,T,\sigma,\omega)=1$. Отже, розв'язок задачі (8), (9) запишемо у вигляді

$$v(t,\tau;T,\sigma,\omega)=Q_1(t,\tau,T,\sigma,\omega)\tilde\varphi(\sigma). \qquad (10)$$

Нехай $G(t,\tau,T,x,\omega)$ – функція Гріна, яка є оберненим перетворенням Фур'є функції Q_1 і

$$G(t,\tau,T,x,\omega)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{E_n}Q_1(t,\tau,\sigma,\omega)e^{i\sigma x}d\sigma. \qquad (11)$$

Обґрунтуємо формулу (11). Перепишемо її по-іншому. При виконанні умови (4) теореми величину $(1-\mu\exp\{S(0,T,\sigma,\omega)\})^{-1}$ можна розкласти у збіжний ряд за степенями параметра μ [1]. Можемо записати

$$Q_1(t,\tau,T,\sigma,\omega)=\sum_{p=0}^\infty\mu^p\exp\{p\cdot S(0,T,\sigma,\omega,t)+$$

$$+S(\tau,t,\sigma,\omega)\}$$

і відповідно

$$G(t,T,\omega,\omega)=\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{p=0}^\infty\mu^p G_0(pT+t,x,\omega), \qquad (12)$$

де $G_0(t,x,\omega)$ – функція Гріна стохастичного рівняння (1).

Перепишемо останню формулу у розгорнутому вигляді. Маємо

$$G(t,\tau,T,x,\omega) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E_n} e^{i\sigma x}\sum_{p=0}^{\infty}\mu^p \exp\{p\cdot S(\tau,T,\sigma,\omega)+$$
$$+S(\tau,t,\sigma,\omega)\}d\sigma.$$

Поміняємо місцями суму та інтеграл, тоді

$$G(t,\tau,T,x,\omega) =$$
$$= \sum_{p=0}^{\infty}\mu^p\int\limits_{E_n} e^{i\sigma x}\exp\{pS(\tau,T,\sigma,\omega)+$$
$$+S(\tau,t,\sigma,\omega)\}d\sigma \equiv$$
$$\equiv \sum_{p=0}^{\infty}\mu^p\int\limits_{E_n} e^{i\sigma x}\psi_p(\tau,t,T,\sigma,\omega)d\sigma. \qquad (13)$$

Розглянемо МС від $|\psi_p(\tau,t,T,\sigma,\omega)|$. Згідно з властивістю інтеграла Вінера-Іто [6] та модуля комплексно значної функції, можемо знайти

$$M\{|\psi_p(\tau,t,T,\sigma,\omega)|\} =$$
$$= \exp\Big\{p\int\limits_{\tau}^{T}\Big(\mathrm{Re}\sum_{|k|\le 2b}A_k(s)(i\sigma)^k+$$
$$+\frac{1}{2}(C^{**}(s,\sigma))^2\Big)ds+$$
$$+\int\limits_{\tau}^{t}\Big(\mathrm{Re}\sum_{|k|\le 2b}A_k(s)(i\sigma)^k+$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\mathrm{Im}\sum_{|k|\le b}C_k(s)(i\sigma)^k\Big)^2\Big)ds\Big\}.$$

Функція ψ_p є цілою функцією відносно σ і для комплексних $\sigma=\sigma+i\gamma$ допускає оцінку [5], [7]

$$|M\{\psi_p(t,T,\sigma+i\gamma,\omega)\}| \le c\exp\{-\delta_1|\sigma|^{2b}\times$$
$$\times((T-\tau)p+(t-\tau))+\delta_2|\gamma|^{2b}((T-\tau)p+(t-\tau))\},$$
$$\delta_1>0.$$

За лемою 1.1 [7] про існування перетворення Фур'є від цілих функцій для аргумента $x+iy$ можемо записати

$$|F_{\sigma\to x}M\{\psi_p(t,T,\sigma+i\gamma,\omega)\}| \le$$
$$\le B\exp\{-c_1|x|^q((T-\tau)p+$$
$$+(t-\tau))+c_2|y|^q((T-\tau)p+(t-\tau))\}, \quad (14)$$
$$c_1>0, q=\frac{2b}{2b-1}.$$

Використовуючи вже згадану властивість інтеграла Вінера-Іто маємо

$$M\{Q_1(t,\tau,T,\sigma,\omega)\} = \sum_{p=0}^{\infty}\mu^p\times$$
$$\times\exp\Big\{p\int\limits_{\tau}^{T}\sum_{|k|\le 2b}A_k(s)(i\sigma)^k ds+$$
$$+\int\limits_{\tau}^{t}\sum_{k\le 2b}A_k(s)(i\sigma)^k ds\Big\} = \sum_{p=0}^{\infty}\mu^p Q_p(t,\tau,T,\sigma),$$

де $Q_p(t,\tau,T,\sigma)$ – НФР відповідної детермінованої задачі. А для функції Гріна $G(t,\tau,T,x,\omega)$ справджується

$$M\{G(t,\tau,T,x,\omega)\} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{p=0}^{\infty}\mu^p G_0(pT+t,x). \qquad (15)$$

Тут $G_0(pT+t,x)$ – функція Гріна детермінованої задачі.

Враховуючи останнє, на основі теореми 1.1 [7] про опис функції Гріна та можливість диференціювання ряду (13), дістанемо оцінки похідних

$$|M\{D_x^k G(t,\tau,x,\omega)\}| \le$$
$$\le c_k(t-\tau)^{-\frac{n+|k|}{2b}}\exp\Big\{-c\sum_{k=1}^{n}|x_k|^q(t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\Big\},$$
$$c_k>0, c>0.$$

За допомогою функції Гріна розв'язок задачі визначається формулою (5) і для його спеціально введеної норми виконується нерівність (6).

Зауваження. Функція Гріна дозволяє записати розв'язок двоточкової задачі для неоднорідного рівняння вигляду

$$d_t u(t,x,\omega) = \left[\sum_{|k|\le 2b} A_k(t) D_x^k u + f(t,x) \right] dt +$$

$$+ \left[\sum_{|k|\le b} C_k(t) D_x^k u + g(t,x) \right] dw(t,\omega). \quad (16)$$

Її розв'язок, згідно з [6], має вигляд

$$u(t,x,\omega) = \int\limits_{E_n} G(t,0,x-\xi,\omega)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{E_n} G(t,s,x-\xi,\omega)[f(s,\xi) -$$

$$- \sum_{|k|\le b} C_k(s) D_x^k g(s,\xi)] dx ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{E_n} G(t,s,x-\xi,\omega) g(s,\xi) dw(s,\omega), \quad (17)$$

і за умови, що $f \in C_x^\alpha(\Pi)$ та $\sum\limits_{|k|\le b} C_k(t) D_x^k g \in C_x^\alpha(\Pi)$, $0 < \alpha < 1$ похідні до порядку $2b$ допускають оцінку

$$\sup_{\Pi} |M\{D_x^k u(t,x,\omega)\}| \le t^{-\frac{k}{2b}} \Big(M\{|\varphi|\} + |f|_\alpha +$$

$$+ \Big| \sum_{|k|\le b} C_k(t) D_x g \Big|_\alpha \Big).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – К.: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

2. *Гихман И.И.* Граничная задача для стохастического уравнения параболического типа // Укр. мат. журн. – 1979. – 31, № 5. – С. 483-489.

3. *Гихман Ил.И.* О смешанной задаче для стохастического дифференциального уравнения параболического типа // Укр. мат. журн. – 1980. – 32, № 3. – С. 367-372.

4. *Ясинський В.К., Бодрик Н.П.* Дослідження властивостей сильного розв'язку задачі Коші для лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння з частинними похідними і марковськими параметрами // Наук. вісник Чернівецького національного університету ім. Ю. Федьковича. Серія: матем.: Зб. наук. пр. – Том 1, № 1-2, 2011.

5. *Перун Г.М.* Задача з імпульсною дією для лінійного стохастичного параболічного рівняння вищого порядку // Укр. мат. журн., 2008, т. 60, № 10.

6. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 567 с.

7. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.