УДК 527.925

©2011 р. О.В. Матвій, Л.А. Піддубна, І.М. Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ СИСТЕМИ РІЗНИЦЕВИХ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Для системи різницевих та диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями побудовано апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь. Досліджено точність апроксимації при виконанні класичних припущень існування розв'язку вихідної системи рівнянь.

The approximating system of ordinary differential equations for a system of difference and differential-difference equations with many delays was built. The accuracy of approximations for the performance of classical assumptions of the existence of solution of the original system of equations was investigated.

Вступ. Розглянемо систему диференціально-різницевого та різницевого рівняння

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p), y(t-\tau_1), \ldots, y(t-\tau_p)), \quad (1)$$

$$y(t) = g(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p), y(t-\tau_1), \ldots, y(t-\tau_p)), \quad (2)$$

$$t \in [t_0, T], \quad p \geq 1, q \geq 1,$$

з початковими умовами

$$x(t) = \varphi_1(t), y(t) = \varphi_2(t), t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (3)$$

де $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p = \tau$; $f(t, u_0, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_p)$, $g(t, u_0, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_p)$ – неперервні по t функції, що задовольняють глобальну умову Ліпшица по $u_0, \ldots, u_p$, $w_0, \ldots, w_q$; $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – задані неперервні при $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ функції.

Якщо функція g не залежить від y, то система (1)-(2) зводиться до диференціального рівняння із запізненням. Якщо перше рівняння системи (1)-(2) можна розв'язати відносно y, тоді дістаємо диференціальне рівняння нейтрального типу.

Частинний випадок системи (1)-(2), коли змінна $x(t)$ не містить відхилення аргументу, досліджувався в працях [1, 2].

Якщо справджується умова "склейки"

$$\varphi_2(t_0) = g(t_0, \varphi_1(t_0), \varphi_1(t_0 - \tau_1), \ldots, \varphi_1(t_0 - \tau_p), \varphi_2(t_0 - \tau_1), \ldots, \varphi_2(t_0 - \tau_p)). \quad (4)$$

система (1)-(2) досліджувалась в роботі [3].

У даній роботі вивчається схема апроксимації розв'язків початкової задачі (1)-(3) в припущенні, що умова (4) не виконується.

Наближена заміна різницевих та диференціально-різницевих рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь вивчалась в роботах [1, 4, 5, 6, 7].

1. Схема апроксимації. Визначимо функції $z_j(t)$, $j = \overline{0,m}$, $w_j(t), j = \overline{1,m}$ як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$z_0'(t) = f(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \ldots, z_{l_p}(t), w_{l_1}(t), \ldots, w_{l_p}(t)),$$

$$z_j'(t) = \mu(z_{j-1}(t) - z_j(t)),\ j = \overline{1,m}, \quad (5)$$

$$w_1'(t) = \mu[g(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \ldots, z_{l_p}(t), w_{l_1}(t), \ldots, w_{l_p}(t)) - w_1],$$

$$w_j'(t) = \mu(w_{j-1}(t) - w_j(t)),\ j = \overline{2,m} \quad (6)$$

з початковими умовами

$$z_j(t_0) = \varphi_1(t_0 - \frac{\tau j}{m}),\ j = \overline{0,m},$$

$$w_j(t_0) = \varphi_2(t_0 - \frac{\tau j}{m}),\ j = \overline{1,m}, \quad (7)$$

де $m \in N$, $\mu = \dfrac{m}{\tau}$, а індекси l_j однозначно визначаються нерівностями

$$\frac{\tau l_j}{m} \leq \tau_j < \frac{\tau(l_j + 1)}{m}. \quad (8)$$

Якщо умова "склейки" (4) не виконується, то будемо говорити, що розв'язки $z_j(t),\ j=\overline{0,m},\ w_j(t),\ j=\overline{1,m}$ задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (5)-(7) апроксимують розв'язок $x(t), y(t)$ початкової задачі (1)-(3), якщо будуть виконуватись співвідношення

$$|x(t-\frac{\tau j}{m})-z_j(t)|\to 0,\ j=\overline{0,m},\ t\in[t_0,T],$$

$$\int\limits_{t_0}^{T}|y(t-\frac{\tau j}{m})-w_j(t)|dt\to 0,\ j=\overline{1,m} \quad (9)$$

при $m\to\infty$, де $x(t)\in C[t_0-\tau,T]$, $y(t)$ – кусково-неперервна функція на $[t_0,T]$.

2. Обгрунтування схеми апроксимації

Теорема. *Нехай $z_j(t),\ j=\overline{0,m}$; $w_j(t)$, $j=\overline{1,m}$ – розв'язок задачі Коші (5)-(7), а $x(t), y(t)$ – розв'язок початкової задачі (1)-(3). Припустимо, що справджуються нерівності*

$$|f(t,u_0,\ldots,u_{2p})-f(t,v_0,\ldots,v_{2p})|\le$$
$$\le R\sum_{i=0}^{2p}|u_i-v_i|,$$
$$|g(t,u_0,\ldots,u_{2p})-g(t,v_0,\ldots,v_{2p})|\le$$
$$\le L\sum_{i=0}^{2p}|u_i-v_i|,$$
$$L>0,\ R>0,\ pL<1.$$

Тоді мають місце співвідношення

$$|x(t)-z_0(t)|\le\beta_1(\frac{\tau}{m}),$$

$$|x(t-\frac{\tau j}{m})-z_j(t)|\le\beta_2(\frac{\tau}{m}),\ j=\overline{1,m}, \quad (10)$$

$$\int\limits_{t_0}^{T}|y(t-\frac{\tau j}{m})-w_j(t)|dt\le\beta_3(\frac{\tau}{m}),\ j=\overline{1,m}.$$

Функції $\beta_i(r),\ i=\overline{1,3}$ монотонно неспадні і $\lim\limits_{r\to0}\beta_i(r)=0$.

Доведення. Перепишемо систему (5)-(7) у вигляді

$$z_0'(t)=f(t,z_0(t),z_{l_1}(t),\ldots,z_{l_p}(t),$$
$$w_{l_1}(t),\ldots,w_{l_p}(t)),$$
$$z_j'(t)=\mu(z_{j-1}(t)-z_j(t)),\ j=\overline{1,m},$$

$$w_1'(t)=\mu(y(t)+g(t,z_0(t),z_{l_1}(t),\ldots,z_{l_p}(t),$$
$$w_{l_1}(t),\ldots,w_{l_p}(t))-g(t,x(t),x(t-\tau_1),\ldots,$$
$$x(t-\tau_p),y(t-\tau_1),\ldots,y(t-\tau_p)-w_1(t)),$$

$$w_j'(t)=\mu(w_{j-1}-w_j),\ j=\overline{2,m},$$

$$z_j(t_0)=\varphi_1(t_0-\frac{\tau j}{m}),\ j=\overline{0,m},$$

$$w_j(t_0)=\varphi_2(t_0-\frac{\tau j}{m}),\ j=\overline{1,m}.$$

Визначимо функції $u_j(t),\ j=\overline{1,m}$ як розв'язки такої системи диференціальних рівнянь

$$u_1'(t)=\mu(y(t)-u_1),$$

$$u_j'(t)=\mu(u_{j-1}-u_j),\ j=\overline{2,m}, \quad (11)$$

$$u_j(t_0)=y_j(t_0)=\varphi_2(t_0-\frac{\tau j}{m}),\ j=\overline{1,m}. \quad (12)$$

Нехай

$$N_j(t)=\max_{t_0\le s\le t}|x(s-\frac{\tau j}{m})-z_j(s)|,\ j=\overline{0,m}. \quad (13)$$

Аналогічно, як в [8], нескладно показати, що справджуються оцінки

$$N_j(t)\le N_0(t)+\beta_4(\frac{\tau}{m}), j=\overline{1,m},\ t\in[t_0,T], \quad (14)$$

$$|x(t-\tau_j)-z_{l_j}(t)|\le N_{l_j}(t)+\omega(x,\frac{\tau}{m})\le$$
$$\le N_0(t)+\beta_4(\frac{\tau}{m})+\omega(x,\frac{\tau}{m})=N_0(t)+\gamma_1(\frac{\tau}{m}),$$

де $\gamma_1(\frac{\tau}{m})=\beta_4(\frac{\tau}{m})+\omega(x,\frac{\tau}{m})$, $\beta_4(\frac{\tau}{m})$ – монотонно неспадна функція і $\lim\limits_{r\to0}\beta_4(r)=0.$.

Визначимо функції $v_j(t)=u_j(t)-w_j(t)$, $j=\overline{1,m}$ як розв'язки системи рівнянь

$$v_1'(t)=\mu(g(t,x(t),x(t-\tau_1),\ldots,x(t-\tau_p),$$
$$y(t-\tau_1),\ldots,y(t-\tau_p))-g(t,z_0(t),z_{l_1}(t),$$

$$\ldots,z_{l_p}(t),w_{l_1}(t),\ldots,w_{l_p}(t))-v_1(t)), \quad (15)$$

$$v_j'(t)=\mu(v_{j-1}(t)-v_j(t)),\ j=\overline{2,m},$$

$$v_j(t_0)=0,\ j=\overline{1,m}. \quad (16)$$

Використовуючи властивості функції $g(t, u_0, u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_p)$ та лему [8], маємо в цьому випадку

$$|v_j(t)| \le \mu \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(j-1)!}[\mu(t-s)]^{j-1}e^{-\mu(t-s)}\times$$
$$|g(s, x(s), x(s-\tau_1), \ldots, x(s-\tau_p), y(t-\tau_1),$$
$$\ldots, y(t-\tau_p)) - g(s, z_0(s), z_{l_1}(s), \ldots, z_{l_p}(s),$$
$$w_{l_1}(s), \ldots, w_{l_p}(t))|ds \le$$
$$\le \mu L \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(j-1)!}[\mu(t-s)]^{j-1}e^{-\mu(t-s)}$$
$$(\sum_{k=0}^{p} |x(s-\tau_k) - z_{l_k}(s)| +$$
$$\sum_{k=1}^{p} |y(s-\tau_k) - w_{l_k}(s)|)ds \le$$
$$\le \mu L \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(j-1)!}[\mu(t-s)]^{j-1}e^{-\mu(t-s)}$$
$$(\sum_{k=0}^{p} |x(s-\tau_k) - z_{l_k}(s)| +$$
$$\sum_{k=1}^{p}(|y(s-\tau_k) - u_{l_k}(s)| + |v_{l_k}(s)|))ds.$$

Інтегруючи в межах від t_0 до t, змінюючи порядок інтегрування та використовуючи оцінку

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\mu}{(j-1)!}[\mu(t-s)]^{j-1}e^{-\mu(t-s)}ds \le 1,$$

одержимо

$$\int\limits_{t_0}^{t} |v_j(s)|ds \le L(\sum_{k=0}^{p} \int\limits_{t_0}^{t} |x(s-\tau_k) - z_{l_k}(s)|ds +$$
$$+\sum_{k=1}^{p} \int\limits_{t_0}^{t} (|y(s-\tau_k) - u_{l_k}(s)| + |v_{l_k}(s)|))ds \le$$

$$\le L(\int\limits_{t_0}^{t} ((p+1)N_0(s) + p\gamma_1(\frac{\tau}{m}))ds +$$
$$+\sum_{k=1}^{p} \int\limits_{t_0}^{t} (|y(s-\tau_k) - u_{l_k}(s)| + |v_{l_k}(s)|)ds).$$

Позначивши $v = \max\limits_{j=\overline{1,m}} \int\limits_{t_0}^{t} |v_j(s)|ds$, одержимо нерівність

$$v \le L \int\limits_{t_0}^{t} ((p+1)N_0(s) + p\gamma_1(\frac{\tau}{m}))ds +$$
$$+L \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{t_0}^{t} |y(s-\tau_k) - u_{l_k}(s)|ds + pLv,$$

яку, враховуючи, що $pL < 1$, можна переписати у вигляді

$$v \le \frac{L}{1-pL}(\int\limits_{t_0}^{t} ((p+1)N_0(s) + p\gamma_1(\frac{\tau}{m}))ds +$$
$$+\sum_{k=1}^{p} \int\limits_{t_0}^{t} |y(s-\tau_k) - u_{l_k}(s)|ds). \quad (17)$$

Оцінимо другий доданок у правій частині (17), маємо

$$\int\limits_{t_0}^{t} |y(s-\tau_k) - u_{l_k}(s)|ds \le$$
$$\int\limits_{t_0}^{T} |y(s-\tau_k) - u_{l_k}(s)|ds =$$
$$\int\limits_{t_0}^{T} |y(s-\tau_k) - y(s-\tau_{l_k}) +$$
$$y(s-\tau_{l_k}) - u_{l_k}(s)|ds \le$$
$$\int\limits_{t_0}^{T} |y(s-\tau_k) - y(s-\tau_{l_k})|ds +$$
$$\int\limits_{t_0}^{T} |y(s-\tau_{l_k}) - u_{l_k}(s)|ds,$$

тут $|\tau_k - \tau_{l_k}| \le \frac{\tau}{m}$. Введемо до розгляду функцію

$$\gamma_0(r) = \sup_{|t_1-t_2|\le r} \int\limits_{t_0}^{T} |y(t-t_1) - y(t-t_2)|dt, \quad (18)$$

де $y(t)$ – розв'язок задачі (1)-(3), який в загальному випадку має скінчене число точок розриву на $[t_0, T]$. Без обмежень загальності покладемо, що $t_1 < t_2$ і $t_1{}^*, t_2{}^*, \ldots, t_k{}^*$ – точки розриву $y(t)$. Тоді підінтегральна функція $|y(t-t_1) - y(t-t_2)|$ має розриви першого роду в точках $t_i{}^* + t_1, t_i{}^* + t_2$, $i = \overline{1,k}$, $0 < t_1, t_2 \leq \tau$.

Одержимо оцінку для функції $\gamma_0(r)$.

$$\gamma_0(r) = \sup_{|t_1-t_2|\leq r} \int\limits_{t_0}^{T} |y(t-t_1) - y(t-t_2)|dt \leq$$
$$\leq \sup_{|t_1-t_2|\leq r} \int\limits_{t_0}^{t_0+t_1} |y(t-t_1) - y(t-t_2)|dt +$$
$$+ \sup_{|t_1-t_2|\leq r} \int\limits_{t_0+t_1}^{t_0+t_2} |y(t-t_1) - y(t-t_2)|dt +$$
$$+ \sup_{|t_1-t_2|\leq r} \int\limits_{t_0+t_2}^{T} |y(t-t_1) - y(t-t_2)|dt =$$
$$= \sup_{|t_1-t_2|\leq r} \int\limits_{t_0}^{t_0+t_1} |\varphi(t-t_1) - \varphi(t-t_2)|dt +$$
$$+ \sup_{|t_1-t_2|\leq r} \int\limits_{t_0+t_1}^{t_0+t2} (|y(t-t_1)| + |\varphi(t-t_2)|)dt +$$
$$+ \sup_{|t_1-t_2|\leq r} \int\limits_{t_0+t_2}^{T} |y(t-t_1) - y(t-t_2)|dt \leq$$
$$\leq \omega(\varphi, r)t_1 + 2Mr +$$
$$+ \sup_{|t_1-t_2|\leq r} \int\limits_{t_0+t_2}^{T} |y(t-t_1) - y(t-t_2)|dt, \quad (19)$$

де $M = \max\{\sup\limits_{t\in[t_0-\tau,t_0]} \varphi(t), \sup\limits_{t\in[t_0,T]} y(t)\}$, $\omega(\varphi, r)$ – модуль неперервності функції $\varphi(t)$.

Оцінимо тепер останній доданок у правій частині нерівності (19). Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_{2k}$ – впорядковані за зростанням точки розриву підінтегральної функції. Позначимо $p(t) = |y(t-t_1) - y(t-t_2)|$. Тоді, локалізуючи точки розриву та вибираючи r таким чином, щоб інтервали $(\xi_i - \frac{r}{2}, \xi_i + \frac{r}{2})$ не містили інших точок розриву за винятком ξ_i, маємо

$$\int\limits_{t_0+t_2}^{T} p(t)dt = \int\limits_{t_0+t_2}^{\xi_1-\frac{r}{2}} p(t)dt + \sum_{i=1}^{2k} \int\limits_{\xi_i-\frac{r}{2}}^{\xi_i+\frac{r}{2}} p(t)dt +$$
$$\sum_{i=1}^{2k-1} \int\limits_{\xi_i+\frac{r}{2}}^{\xi_{i+1}-\frac{r}{2}} p(t)dt + \int\limits_{\xi_{2k}+\frac{r}{2}}^{T} p(t)dt \leq$$
$$\leq (\xi_1 - \frac{r}{2} - t_2 - t_0)\omega_0(y, r) + 2Mr2k +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2k-1} (\xi_{i+1} - \frac{r}{2} - \xi_i - \frac{r}{2})\omega_i(y, r) +$$
$$+ (T - \xi_{2k} - \frac{r}{2})\omega_{2k}(y, r) \leq$$
$$\leq (T - t_0)\omega(y, r) + 4kMr,$$

де $\omega_0(y, r)$ – модуль неперервності функції $y(t)$ на інтервалі $[t_0 + t_2, \xi_1 - \frac{r}{2}]$, $\omega_i(y, r)$, $i = \overline{1, 2k-1}$ – модуль неперервності функції $y(t)$ на інтервалі $[\xi_i + \frac{r}{2}, \xi_{i+1} - \frac{r}{2}]$, $\omega_{2k}(y, r)$ – модуль неперервності функції $y(t)$ на інтервалі $[\xi_{2k} + \frac{r}{2}, T]$, $\omega(y, r) = \max\limits_{i=\overline{0,2k}} \omega_i$.

Отже,

$$\gamma_0(r) \leq t_1\omega(\varphi, r) + 2Mr(2k+1) + (T - t_0)\omega(y, r).$$

З останньої нерівності одержуємо, що $\gamma_0(r)$ монотонно зростаюча функція і $\lim\limits_{r\to 0} \gamma_0(r) = 0$.

Використовуючи точність апроксимації елемента запізнення для кусково неперервних вхідних функцій [2]

$$\int\limits_{t_0}^{T} |y(s - \tau_{l_k}) - u_{l_k}(s)|ds \leq \beta_5(\frac{\tau}{\sqrt{m}}),$$

одержуємо нерівності

$$\int\limits_{t_0}^{T} |y(s - \tau_k) - u_{l_k}(s)|ds \leq$$
$$\leq \gamma_0(\frac{\tau}{m}) + \beta_5(\frac{\tau}{m}) = \beta_6(\frac{\tau}{m}),$$

де функції $\beta_i(r)$, $i = 5, 6$ монотонно неспадні і $\lim\limits_{r\to 0} \beta_i(r) = 0$,

$$v \leq \frac{L}{1 - pL}(\int\limits_{t_0}^{t} ((p+1)N_0(s) + p\gamma_1(\frac{\tau}{m}))ds +$$

$$+p\beta_6(\frac{\tau}{m})). \tag{20}$$

Враховуючи тепер оцінку (17) та умови, наведені в теоремі, одержуємо оцінки

$$\int\limits_{t_0}^{t} |y(s-\frac{\tau j}{m}) - w_j(s)|ds \le$$

$$\le \int\limits_{t_0}^{t} |y(s-\frac{\tau j}{m}) - u_j(s)|ds + \int\limits_{t_0}^{t} |v_j(s)|ds \le$$

$$+ \le \beta_5(\frac{\tau}{m}) + \frac{L}{1-pL}(\int\limits_{t_0}^{T}((p+1)N_0(s)p\gamma_1(\frac{\tau}{m}))ds+$$

$$+p\beta_6(\frac{\tau}{m})) = \frac{L(p+1)}{1-pL}\int\limits_{t_0}^{t} N_0(s)ds + \gamma_2(\frac{\tau}{m}), \tag{21}$$

де $\gamma_2(\frac{\tau}{m}) = \beta_5(\frac{\tau}{m}) + \frac{L}{1-pL}((T-t_0)p\gamma_1(\frac{\tau}{m}) + p\beta_6(\frac{\tau}{m}))$;

$$\int\limits_{t_0}^{t} |y(s-\tau_k) - w_{l_k}(s)|dt \le$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} |y(s-\tau_k) - y(s-\tau_{l_k}) +$$

$$y(s-\tau_{l_k}) - w_{l_k}(s)|ds \le$$

$$\le \int\limits_{t_0}^{t} |y(s-\tau_k) - y(s-\tau_{l_k})|ds +$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} |y(s-\tau_{l_k}) - w_{l_k}(s)|ds \le \gamma_0(\frac{\tau}{m}) +$$

$$+\frac{L(p+1)}{1-pL}\int\limits_{t_0}^{t} N_0(s)ds + \gamma_2(\frac{\tau}{m}) =$$

$$= \frac{L(p+1)}{1-pL}\int\limits_{t_0}^{t} N_0(s)ds + \gamma_3(\frac{\tau}{m}),$$

де $\gamma_3(\frac{\tau}{m}) = \gamma_0(\frac{\tau}{m}) + \gamma_2(\frac{\tau}{m})$.

Оцінимо тепер різницю $|x(t) - z_0(t)|$. Переходячи у рівняннях (1) і (5) до інтегральної форми, знаходимо

$$|x(t) - z_0(t)| \le \int\limits_{t_0}^{t} |f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots,$$
$$x(t-\tau_p), y(t-\tau_1), \ldots, y(t-\tau_p)) -$$
$$-f(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \ldots, z_{l_p}(t),$$
$$w_{l_1}(t), \ldots, w_{l_p}(t)))|ds \le$$
$$\le R\int\limits_{t_0}^{t} |x(t) - z_0(t)|ds +$$
$$+R\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{t_0}^{t} |x(t-\tau_k) - z_{l_k}(t)|ds +$$
$$+R\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{t_0}^{t} |y(t-\tau_k) - w_{l_k}(t)|ds \le$$
$$\le R\int\limits_{t_0}^{t} N_0(s)ds + R\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{t_0}^{t}(N_0(s) + \gamma_1(\frac{\tau}{m}))ds +$$
$$+R\sum_{k=1}^{p}(\frac{L(p+1)}{1-pL}\int\limits_{t_0}^{t} N_0(s)ds + \gamma_3(\frac{\tau}{m})) =$$

$$= A\int\limits_{t_0}^{t} N_0(s)ds + \gamma_4(\frac{\tau}{m}). \tag{22}$$

де $A = R(p+1)(1+\frac{pL}{1-pL})$, $\gamma_4(\frac{\tau}{m}) = Rp((T-t_0)(\gamma_1(\frac{\tau}{m}) + \gamma_3(\frac{\tau}{m}))$. Нерівність (22) справедлива для всіх $t \in [t_0, T]$, тому, враховуючи позначення (13), маємо

$$N_0(t) \le A\int\limits_{t_0}^{t} N_0(s)ds + \gamma_4(\frac{\tau}{m}). \tag{23}$$

Застосовуючи нерівність Гронуолла-Беллмана, дістаємо

$$N_0(t) \le \gamma_4(\frac{\tau}{m})e^{A(T-t_0)}. \tag{24}$$

Із нерівностей (14), (21) та (24) маємо

$$N_j(t) \le \gamma_4(\frac{\tau}{m})e^{A(T-t_0)} + \overline{\beta}_4(\frac{\tau}{\sqrt{m}}),$$
$$t \in [t_0, T],\ j = \overline{1, m}, \tag{25}$$

$$\int_{t_0}^{t} |y(s - \frac{\tau j}{m}) - w_j(s)| ds \leq$$

$$\frac{L(p+1)}{1-pL}(T-t_0)\gamma_4(\frac{\tau}{m})e^{A(T-t_0)} + \gamma_2(\frac{\tau}{m}). \quad (26)$$

Враховуючи вигляд $\gamma_i(\frac{\tau}{m})$, $i = \overline{1,4}$, та оцінки (24)–(26) одержуємо оцінки (10).

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Піддубна Л. А., Черевко І. М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 1999. – № 1. – С.42–50.

2. *Черевко І. М.* Про наближену заміну різницевих і диференціально-різницевих рівнянь звичайними диференціальними рівняннями // Наук. вісник Чернівецького ун-ту : зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2002. – Вип. 134. Математика. – С. 107–111.

3. *Матвій О. В., Черевко І. М.* Апроксимація системи диференціально-різницевих та різницевих рівнянь із багатьма запізненнями // Наук. вісник Чернівецького ун-ту : зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2002. – Вип. 150. Математика. – С. 50–54.

4. *Красовский Н. Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // ПММ. – 1964. – Т. 28, № 4. – С. 716–725.

5. *Репин Ю. М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // ПММ. – 1965. – Т. 29, № 2. – С. 226-235.

6. *Опарин Н. П.* Аппроксимация систем линейных нестационарных уравнений запаздывающего типа системами обыкновенных уравнений // Дифференциальные уравнения и функциональный анализ. – М. : Наука, 1984. – С. 66–75.

7. *Черевко І. М., Матвій О. В.* Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. – 2004. – Т. 7, № 2. – С. 208–216.

8. *Черевко І. М., Матвій О. В., Стельмащук Л. В.* Про апроксимацію системи різницевих рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту : зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2007. – Вип. 349. Математика. – С. 88–94.