УДК 517.982

©2011р. О.В. Маслюченко

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

НЕСКІНЧЕННІ ІГРИ ТА ЇХ ДОБУТКИ

Ми вводимо поняття абстрактних нескінченних ігор та їх ізоморфізмів і показуємо, що кожна нескінченна гра ізоморфна до деякого аналогу гри Банаха-Мазура. Крім того, ми вводимо поняття добутку нескінченних ігор і показуємо, що добуток α-сприятливих ігор буде α-сприятливим, а добуток α-сприятливої і β-несприятливої ігор є β-несприятливою грою.

We introduce the notion of infinity games and and its isomorphisms and we show that each infinity game isomorphic to some analogue of the Banach-Mazur game. Besides, we introduce the notion of the product of infinity games and we prove that the product of α-favorable games is α-favorable and the product of an α-favorable game and β-unfavorable game is β-unfavorable.

1. Вступ. Топологічні ігри, вивчення яких бере свій початок від робіт [1, 2], на даний час є важливим інструментом при вивченні різного роду задач (див. наприклад [3, 4, 5]). Останнім часом з'явилось дуже багато різновидів відомих ігор. Проте метою цієї статті є зовсім не класифікація ігор, які застосовуються при розв'язуванні тих чи інших задач. Ми хочемо поглянути на гру, як на абстрактний об'єкт. Проте, як виявиться, що незважаючи на дуже загальний підхід до поняття гри, кожна нескінченна гра буде в певному розумінні ізоморфною до одного аналогу класичної гри Банаха-Мазура [1].

Крім того, ми водимо поняття добутку ігор і доводимо мультиплікативну теорему для загальних ігор: добуток α-сприятливих ігор буде α-сприятливим, а добуток α-сприятливої і β-несприятливої ігор є β-несприятливою грою.

2. Дерева. Для множини X і ординалу ν покладемо

$$X^{\nu} = \{(x_\iota)_{\iota<\nu} : x_\iota \in X \text{ для } \iota < \nu\},$$

$$X^{<\nu} = \Cup_{\varkappa<\nu} X^{\varkappa}, \quad X^{\leq\nu} = X^{<\nu+1}.$$

Для ординалів $\varkappa \leq \nu$ і $x = (x_\iota)_{\iota<\nu} \in X^{\nu}$ покладемо $l(x) = \nu$, $x|_\varkappa = (x_\iota)_{\iota<\varkappa}$ (зокрема, $|\varnothing| = 0$ і $x|_0 = \varnothing$). Крім того, для довільних $x, y \in X^{\leq\nu}$ запис $x \preceq y$ означає, що $l(x) \leq l(y)$ і $y|_{l(x)} = x$. Далі, для довільної множини ординалів N і ординалу ν виберемо ту єдину зростаючу трансфінітну послідовність ординалів $(\mu_\iota)_{\iota<\varkappa}$, для якої $N \cap \nu = \{\mu_\iota : \iota < \varkappa\}$. Тепер, для довільного $x = (x_\iota)_{\iota<\nu} \in X^{\nu}$ покладемо $x|_N = (x_{\mu_\iota})_{\iota<\varkappa} \in X^{\varkappa}$.

Частково впорядковану множину $(T, \leq)$ називатимемо *деревом*, якщо існує $\min T$ і для для кожного $x \in T$ множина $S_x = \{t \in T : t < x\}$ цілком впорядкована. Ординал $l(x)$, який є порядковим типом множини S_x, називатимемо *довжиною елемента* $x \in T$. Через $h(T)$ позначимо найменший з ординарів, який строго більший за усі $l(x)$, $x \in T$ і називатимемо його *висотою дерева* T. Дерево T називатимемо *нескінченним*, якщо T не має максимальних елементів, тобто, якщо для довільного $x \in T$ існує $Y \in T$, для якого $x < y$.

Нехай X – деяка множина і ν – ординал. Підмножину T частково впорядкованої множини $(X^{<\nu}, \preceq)$ називатимемо *ν-деревом*, якщо для довільного $x \in T$ і $\varkappa < l(x)$ виконується, що $x|_\varkappa \in T$. Ясно, що кожне ν-дерево T буде деревом з висотою $h(T) \leq \nu$, причому $\varnothing = \min T \in T$, якщо $T \neq \varnothing$ і $l(x) = l(x)$ для кожного $x \in T$.

Твердження 1. *Нехай T – деяке дерево і $\nu = h(T)$. Тоді існує деяке ν-дерево $\tilde{T}$ і зростаюча бієкція $\tau : T \to \tilde{T}$.*

Доведення. Зафіксуємо деяке $x \in T$. Оскільки множина $S_x = \{t \in T : t < x\}$ цілком впорядкована, і має порядковий тип $l(x) < \nu$, то існує єдина строго зростаюча трансфінітна послідовність $\tau(x) = (\tau_\iota(x))_{\iota<l(x)} \in T^{<\nu}$, для якої $S_x = \{\tau_\iota(x) : \iota < l(t)\}$. Візьмемо тепер два елементи $x, y \in T$ з $x < y$. Тоді $x \in S_y$. Отже, існує $\varkappa < l(y)$ таке, що $x = \tau_\varkappa(y)$. Тоді $S_x = \{\tau_\iota(y) : \iota < \varkappa\}$. Таким чином, за рахунок єдиності зображення цілком впорядкованої множини у вигляді трансфінітної послідовності, матимемо, що $\tau_\iota(x) = \tau_\iota(y)$ при $\iota < \nu$, тобто $\tau(x) \preceq \tau(y)$. Покладемо $\tilde{T} = \tau(T) \subseteq T^{<\nu}$. Перевіримо, що $\tilde{T}$ є ν-деревом. Справді, якщо $\tilde{x} = \tau(x) \in \tilde{T}$, то $l(\tilde{x}) = l(x)$. Тому для довільного $\varkappa < l(x)$, матимемо, що $y = \tau_\varkappa(x) < x$, а значить, $\tau(y) \preceq \tau(x)$. Звідки матимемо, що $\tilde{x}|_\varkappa = (\tau_\iota(x))_{\iota<\varkappa} = (\tau_\iota(y))_{\iota<l(y)} = \tau(y) \in \tilde{T}$.

Надалі ми розглядатимемо тільки ω-дерева і $(\omega+1)$-дерева.

3. Рекурентні правила і ω-множини. Казатимемо, що F є *многозначним відображенням*, якщо існують такі множини X та Y, що $F \subseteq XY$. Для многозначного відображення F, елемента x і множини A ми, як звичайно, записуватимемо $F(x) = \{y : (x,y) \in F\}$ і $F(A) = \Cup_{x\in A} F(x)$. Множину $\mathrm{dom}F = \{x : F(x) \neq \varnothing\}$ називатимемо *областю визначення многозначного відображення* F, а множину $\mathrm{im}F = F(\mathrm{dom}F)$ – його *областю значень*. Запис $F : X \Rightarrow Y$ означає, що F є многозначним відображенням, для якого $\mathrm{dom}F = X$ і $\mathrm{im}F \subseteq Y$.

Розглянемо деяку множину X і многозначне відображення $\varGamma \subseteq X^{<\omega} X$. Для довільного $n \le \omega$ покладемо

$$\overset{n}{\Pi}_\varGamma = \Big\{ x{=}(x_k)_{k<n} {\in} X^n : \forall k{<}n \,|\, x_k {\in} \varGamma(x|_k) \Big\},$$

$$\overset{<\omega}{\Pi}_\varGamma = \Cup_{n<\omega} \overset{n}{\Pi}_\varGamma \quad \text{і} \quad \overset{\le\omega}{\Pi}_\varGamma = \Cup_{n\le\omega} \overset{n}{\Pi}_\varGamma.$$

Многозначне відображення $\varGamma$ називатимемо *рекурентним правилом*, якщо $\mathrm{dom}\varGamma = \overset{<\omega}{\Pi}_\varGamma$. Для рекурентного правила $\varGamma$ елементи $x \in \overset{n}{\Pi}_\varGamma$ називаються *частковими $\varGamma$-партіями*, якщо $n < \omega$, і просто *$\varGamma$-партіями*, якщо $n = \omega$. Має місце наступний простий факт.

Твердження 2. *Для довільного рекурентного правила $\varGamma$ множина $\overset{<\omega}{\Pi}_\varGamma$ є нескінченним ω-деревом. Навпаки, для довільного нескінченного ω-дерева T формулою*

$$\varGamma^T\big((x_k)_{k<n}\big) = \big\{x_n : (x_k)_{k\le n} \in T\big\},\ x \in X^{<\omega},$$

задається деяке рекурентне правило для якого виконується, що $\overset{<\omega}{\Pi}_{\varGamma^T} = T$.

Зауважимо, що з рекурентним правилом $\varGamma$ пов'язане також $(\omega+1)$-дерево $\overset{\le\omega}{\Pi}_\varGamma$. Але для нас в подальшому значно важливішу роль відіграватимуть множини $\overset{\omega}{\Pi}_\varGamma$.

Множину E будемо називати *ω-множиною*, якщо існує така множина X, для якої $E \subseteq X^\omega$. Для довільних $x = (x_n)_{n<\omega}$ і $m \in \omega$ покладемо $\pi_m(x) = x_m$. На множині X^ω, можна природнім чином ввести метрику, покладаючи $d(x,y) = 2^{-n}$, якщо $x \neq y$ і $n = \max\{k \in \omega : x|_k = y|_k\}$. При цьому (X^ω, d) буде повним метричним простором. Крім того, топологія, що породжена метрикою d збігається зі звичайною тиховською топологією добутку, якщо на X розглядати дискретну топологію. Розглянемо на ω-множині E метрику d_E, яка є звуженням метрики d. Казатимемо, що F є *замкненою ω-множиною*, якщо F є ω-множиною і метрика d_F повна. Таким чином, ω-множини – це, в точності, замкнені підпростори X^ω. Має місце наступний нескладний факт.

Твердження 3. *Для довільного рекурентного правила $\varGamma$ множина $\overset{\omega}{\Pi}_\varGamma$ є замкненою ω-множиною. Навпаки, для довільної замкненої ω-множини F формулою*

$$\varGamma_F(x) = \big\{\pi_{l(x)}(y) : x \le y \in F\big\},\ x \in X^{<\omega},$$

задається деяке рекурентне правило, для якого $\overset{\omega}{\Pi}_{\varGamma_F} = F$.

Зауважимо, що в попередньому твердженні замкненість ω-множини F використовується тільки при доведенні рівності $\overset{\omega}{\Pi}_{\varGamma_F} = F$.

4. Нескінченні ігри. Зафіксуємо два різні елементи α та β, які ми будемо називати *гравцями* (скажімо $\alpha = 0$ і $\beta = 1$). *Нескінченною грою двох гравців α та β* (або просто *грою*) ми називатимемо пару $\Gamma = (\varGamma, \gamma)$, де

$\varGamma$ – деяке рекурентне правило, яке ми називатимемо *правилом гри* Γ і $\gamma : \Pi_\varGamma^{\leq\omega} \to \{\alpha, \beta\}$ – функція, яку ми називатимемо *функцію гравців*, причому для довільного $x \in \Pi_\varGamma^{<\omega}$ існує $y \in \Pi_\varGamma^{<\omega}$, для якого $x \preceq y$ і $\gamma(x) \neq \gamma(y)$. /Часткові/ $\varGamma$-партії ми будемо називати */частковими/ партіями у грі* Γ.

Нехай $\xi \in \{\alpha, \beta\}$ – один наших із гравців. Казатимемо, що в партії x у грі Γ *виграє гравець* ξ, якщо $\gamma(x){=}\xi$. Для $x{=}(x_n){\in}\Pi_\varGamma^{\leq\omega}$ елемент x_n, $n < l(x)$, називатимемо *ходом гравця* ξ *у /частковій/ партії*, якщо $\gamma(x|_n) = \xi$. Якщо крім того кількість таких $m < n$, що x_m є ходом гравця ξ у /частковій/ партії x, рівна k, то казатимемо, що x_n – *k-ий хід гравця* ξ *у /частковій/ партії* x. Символом $[a_k, b_k]_{k<\omega}$ позначатимемо таку партію $x = (x_n) \in \Pi_\varGamma^\omega$, для якої a_k та b_k – це k-ті ходи відповідно гравців α та β. Позначимо множину усіх можливих ходів гравця α через M_α, а гравця β через M_β і також покладемо $M{=}M_\alpha{\cup}M_\beta$. Тоді $M_\alpha = \Cup_{\gamma(x)=\alpha}\varGamma(x)$, $M_\beta = \Cup_{\gamma(x)=\beta}\varGamma(x)$ і $M = \Cup_x \varGamma(x) = \mathrm{im}\varGamma$, де об'єднання беруться по всіх часткових партіях $x \in \mathrm{dom}\varGamma = \Pi_\varGamma^{<\omega}$ з відповідними властивостями.

Стратегією для гравця ξ *у грі* Γ називається таке рекурентне правило $S \subseteq \varGamma$, що $S(x) = \varGamma(x)$ для довільного $x \in \Pi_S^{<\omega}$ з $\gamma(x) \neq \xi$. Іншими словами, для партії $x \in \Pi_S^\omega$ гравець ξ вибирає свої ходи підпорядковуючись певному правилу S, взагалі кажучи, відмінному від $\varGamma$; при цьому його суперник може вибирати свої ходи довільним чином, тільки би не порушувати правила $\varGamma$ нашої гри. Казатимемо, що у /частковій/ партії $x \in \Pi_\varGamma^{\leq\omega}$ *гравець* ξ *грає за стратегією* S, якщо $x \in \Pi_S^{\leq\omega}$. Стратегія S називається *виграшною для гравця* ξ, якщо $\gamma\big(\Pi_S^\omega\big) \subseteq \{\xi\}$. Іншими словами, стратегія S буде виграшною, якщо в довільній партії x у грі Γ гравець ξ, граючи за стратегією S, обов'язково виграє. Гру Γ називатимемо *ξ-сприятливою*, якщо гравець ξ має деяку виграшну стратегію S. Якщо ж гравець ξ не має виграшної стратегії у грі Γ, то цю гру називатимемо *ξ-несприятливою*.

Користуючись аксіомою вибору, для довільної стратегії S для гравця ξ можна вибрати таку стратегію $\varSigma{\subseteq}S$ що $|\varSigma(x)|{=}1$, якщо $x \in \Pi_\varSigma^{<\omega}$ і $\gamma(x) = \xi$. Таку стратегію $\varSigma$ ми називатимемо *однозначною стратегією*. Ясно, що якщо стратегія S виграшна для гравця ξ, то такою ж буде і кожна (однозначна) стратегія $\varSigma \subseteq S$.

Дві гри $\Gamma = (\varGamma, \gamma)$ та $\Delta = (\varDelta, \delta)$ називатимемо *тотожними* (при цьому пишемо $\Gamma \equiv \Delta$), якщо існує бієкція $f : \Pi_\varGamma^{\leq\omega} \to \Pi_\varDelta^{\leq\omega}$, яка зберігає порядок $\preceq$, причому $l(f(x)) = l(x)$ і $\delta(f(x)) = \gamma(x)$ для довільного $x \in \Pi_\varGamma^{\leq\omega}$. Таким чином, тотожні ігри – це такі ігри, які отримуються одна з одної шляхом заміни "фігур" зі збереженням правил.

Поняття тотожності ігор є насправді дуже жорстким, адже якщо, наприклад, в партії $x = (x_n)_{n<\omega}$ ходи x_{4k} та x_{4k+1} є ходами α, а ходи x_{4k+2} та x_{4k+3} є ходами β, то таку партію природно ототожнити з партією $\tilde{x} = (\tilde{x}_k)_{k<\omega}$, де $\tilde{x}_{2k} = (x_{4k}, x_{4k+1})$ – це ходи α, а $\tilde{x}_{2k} = (x_{4k+2}, x_{4k+3})$ – це ходи β, але введене нами поняття тотожності ігор не дає можливості цього зробити. Для цього нам знадобиться поняття ізоморфності ігор, до введення якого ми зараз і приступимо.

Нехай $\Gamma{=}(\varGamma{,}\gamma)$ – деяка гра і $\xi{\in}\{\alpha{,}\beta\}$. Множину $S \subseteq \Pi_\varGamma^\omega$ називатимемо *ξ-стратегічною для* Γ, якщо рекурентне правило $\varSigma = \varGamma_S$ є стратегією для гравця ξ у грі Γ. Сукупність усіх ξ-стратегічних для Γ множин позначимо $\mathcal{S}_\Gamma^\xi$.

Нехай $\Gamma = (\varGamma, \gamma)$ та $\Delta = (\varDelta, \delta)$ – деякі ігри. Неперервне відображення $f : \Pi_\varGamma^\omega \to \Pi_\varDelta^\omega$ називатимемо *ξ-стратегічним*, якщо для довільного $S \in \mathcal{S}_\Delta^\xi$ виконується, що $f^{-1}(S) \in \mathcal{S}_\Gamma^\xi$, і для довільного $x \in \Pi_\varGamma^\omega$ з того, що $\delta\big(f(x)\big) = \xi$ випливає, що $\gamma(x) = \xi$. Казатимемо, що f є *стратегічним*, якщо воно є α-стратегічними і β-стратегічними. Бієкцію $f : \Pi_\varGamma^\omega \to \Pi_\varDelta^\omega$ називатимемо *ізоморфізмом ігор* Γ *та* Δ, якщо відображення f та f^{-1} є стратегічними. Ігри Γ та Δ називаються *ізоморфними*, якщо існує ізоморфізм $f : \Pi_\varGamma^\omega \to \Pi_\varDelta^\omega$. Ясно, що тотожні ігри завжди будуть ізоморфними.

Твердження 4. *Нехай* $\Gamma = (\Gamma, \gamma)$ *та* $\Delta = (\Delta, \delta)$ *– деякі ігри,* $\xi \in \{\alpha, \beta\}$ *і* $f : \Pi_{\Gamma}^{\omega} \to \Pi_{\Delta}^{\omega}$ *– ξ-стратегічне відображення. Тоді, якщо гра* Δ *є ξ-сприятливою, то гра* Γ *також є ξ-сприятливою.*

Доведення. Нехай $\tilde{\Sigma}$ – виграшна стратегія для ξ у грі Δ. Тоді множина $\tilde{S} = \Pi_{\tilde{\Sigma}}^{\omega}$ є ξ-стратегічною для Δ, причому $\delta(\tilde{S}) \subseteq \{\xi\}$. Але відображення f є ξ-стратегічним. Тому множина $S = f^{-1}(\tilde{S})$ є ξ-стратегічною для Γ, причому $\gamma(S) \subseteq \{\xi\}$. Тоді рекурентне правило $\Sigma = \Gamma_S$ є виграшною стратегією для ξ.

Наслідок 1. *Ізоморфні ігри* Γ *та* Δ *будуть α-сприятливими /β-сприятливими, α-несприятливими, β-несприятливими/ одночасно.*

5. Почергові ігри. Гру Γ називатимемо *почерговою грою гравців* α *і* β */гравців* β *і* α/, якщо $\gamma(\varnothing) = \alpha$ /чи, відповідно, $\gamma(\varnothing) = \beta$/ і $\gamma(x|_n) \neq \gamma(x|_{n+1})$ для довільних $n \in \omega$ і $x \in \Pi_{\Gamma}^{\omega}$. Насправді в тих конкретних іграх, які нам будуть потрібні в подальшому завжди починатиме гравець β. Отож, нехай Γ деяка почергова гра гравців β і α. Зауважимо, що кожна однозначна стратегія Σ скажімо для гравця β для почергової гри Γ цілком визначається деякою функцією $\sigma : M_{\alpha}^{<\omega} \to M_{\beta}$ за допомогою формули $\Sigma(x) = \{\sigma(x\restriction_A)\}$ для $x \in \Pi_{\Sigma}^{<\omega}$ з $\gamma(x) = \alpha$, де $A = \{2k : k \in \omega\}$. Тобто, якщо в партії $x = [a_k, b_k]_{k<\omega}$ гравець β грає за цією стратегією, то $b_0 = \sigma(\varnothing)$ і $b_k = \sigma(a_1, \ldots, a_{k-1})$ при $k > 0$. Аналогічним чином, що кожна однозначна стратегія Σ для гравця α для почергової гри Γ цілком визначається деякою функцією $\sigma : M_{\beta}^{<\omega} \to M_{\alpha}$ за допомогою формули $\Sigma(x) = \{\sigma(x\restriction_B)\}$ для $x \in \Pi_{\Sigma}^{<\omega}$ з $\gamma(x) = \alpha$, де $B = \{2k+1 : k \in \omega\}$. Тобто, якщо в партії $x = [a_k, b_k]_{k<\omega}$ гравець α грає за цією стратегією, то $b_k = \sigma(a_1, \ldots, a_k)$ для кожного $k < \omega$. Насправді, функція σ визначена на дещо вужчій множині, але для тих наборів, які не зустрічаються в нашій грі ми можемо довизначити функцію σ довільним чином. Функцію σ ми називатимемо *функціональною стратегією* для гравця α чи β, або, якщо це не викликатиме плутанини, просто *стратегією.* Як правило в почергових іграх ми розглядатимемо лише функціональні стратегії.

І насамкінець цього пункту давайте зрозуміємо, що при потребі кожну гру можна вважати почерговою. Справді, для довільної гри $\Gamma = (\Gamma, \gamma)$ можна розглянути таку почергову гру $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\Gamma}, \tilde{\gamma})$, що гра Γ відрізняється від гри $\tilde{\Gamma}$ тільки тим, що у неї ті ходи одного гравця, що ідуть підряд, згруповані в один набір. Точніше, через $\tilde{\Gamma}$ позначимо множину усіх пар $\big((\tilde{x}_j)_{j<k}, \tilde{x}_k\big)$, для яких існують номери $0 = m_0 < m_1 < \cdots < m_{k+1} < \omega$ і часткова партія $x = (x_n)_{n<m_{k+1}} \in \Pi_{\Gamma}^{<\omega}$, такі, що $\tilde{x}_j = (x_{m_j+\ell})_{\ell<m_{j+1}-m_j}$ для $j \le k$, $\gamma(x|_{m_j+\ell}) = \gamma(x|_{m_j})$ для $j \le k$ і $\ell < m_{j+1} - m_j$, а також $\gamma(x|_{m_j}) \neq \gamma(x|_{m_j-1})$ для $0 < j \le k$. Тоді для довільної /часткової/ партії $\tilde{x} = (\tilde{x}_j)_{j<k} \in \Pi_{\tilde{\Gamma}}^{\le\omega}$, $k \le \omega$, через $x = \varphi(\tilde{x})$ позначимо відповідну /часткову/ партію $x = (x_n)_{n<m_k} \in \Pi_{\Gamma}^{\le\omega}$ (тут $m_k = \omega$, якщо $k = \omega$), для якої $\tilde{x}_j = (x_{m_j+\ell})_{\ell<m_{j+1}-m_j}$ для $j < k$. Тепер покладаємо $\tilde{\gamma}(\tilde{x}) = \gamma(\varphi(x))$ для довільного $x \in \Pi_{\Gamma}^{\le\omega}$. Так побудовану гру $\tilde{\Gamma}$ будемо називати *відповідною почерговою грою до гри* Γ. Ігри Γ та $\tilde{\Gamma}$, очевидним чином, ізоморфні, адже звуження φ на $\Pi_{\tilde{\Gamma}}^{\omega}$ є ізоморфізмом.

Твердження 5. *Кожна гра* Γ *буде ізоморфною до деякої почергової гри* Δ *гравців* β *та* α.

Доведення. Не буде обмеженням вважати, що Γ почергова, адже, якщо це не так, то можна замінити Γ на $\tilde{\Gamma}$. Якщо у грі G починає β (тобто, якщо $\gamma(\varnothing) = \beta$), то слід взяти $\Delta = \Gamma$. Припустимо, що $g(\varnothing) = \varnothing$. Розглянемо деякий елемент $a \notin \mathrm{im}\Gamma$. Визначимо рекурентне правило Δ покладаючи $\Delta(\varnothing) = \{a\}$ і $\Delta\big((y_k)_{k<n}\big) = \Gamma\big((y_{k+1})_{k<n-1}\big)$. Для довільного $y \in \Pi_{\Delta}^{\le\omega}$ покладемо $\delta(y) = \beta$, якщо $l(y) = 2n < \omega$; $\delta(y) = \alpha$, якщо $l(y) = 2n+1 < \omega$; $\delta(y) = \gamma\big((y_{k+1})_{k<\omega}\big)$, якщо $l(y) = \omega$. Ясно, що гра Γ буде еквівалентною до гри $\Delta = (\Delta, \delta)$, адже відображення $\Pi_{\Delta}^{\omega} \ni (y_n)_{n<\omega} \mapsto (y_{n+1})_{n<\omega} \in \Pi_{\Gamma}^{\omega}$ є ізоморфізмом ігор Δ та Γ.

6. u-гра Банаха-Мазура. Розглянемо деякий топологічний простір X. Послідовність $\mathbf{u} = (\mathcal{U}_n)_{n<\omega}$ відкритих систем $\mathcal{U}_n$ простору X називатимемо *допустимою*, якщо для довільних $n < \omega$ і $U \in \mathcal{U}_n$ існує $V \in \mathcal{U}_{n+1}$ з $V \subseteq U$. Нехай $A < X$, $B = X \setminus A$ і $\mathbf{u} = (\mathcal{U}_n)_{n<\omega}$ – деяк допустиму послідовність. Покладемо $\mathit{\Gamma}(\varnothing) = \mathcal{U}_0$ і для довільної спадної послідовності $u = (U_k)_{k<n}$, $n > 0$, такої, що $U_k \in \mathcal{U}_k$ для довільного k, покладемо $\mathit{\Gamma}(u) = \{U_n \in \mathcal{U}_n : U_n \subseteq U_{n-1}\}$. Ясно, що $\mathit{\Gamma}$ є рекурентним правилом. Для довільної партії $u = (U_k)_{k<\omega} \in \overset{\omega}{\Pi}_{\mathit{\Gamma}}$ покладаємо $\gamma(u) = \alpha$, якщо $\Cap_{n<\omega} U_n \cap A \neq \varnothing$ і $\gamma(u) = \beta$, якщо $\Cap_{n<\omega} U_n \subseteq B$. Почергову гру $\Gamma = (\mathit{\Gamma}, \gamma)$ гравців β і α, називатимемо **u**-*грою Банаха-Мазура* і позначатимемо її $\mathrm{BM}_{\mathbf{u}}(X, A)$.

У класичній грі Банаха-Мазура $\mathrm{BM}(X, A)$ покриття $\mathcal{U}_n$ – це система всіх відкритих непорожніх підмножин X. Більш розповсюдженою є частковий випадок гри Банаха-Мазура – *гра Шоке* $\mathrm{Ch}(X) = \mathrm{BM}(X, X)$. Наступна теорема доводиться в точності так само, як і для випадку класичної гри Банаха-Мазура.

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір, $A \subseteq X$ і $\mathbf{u} = (\mathcal{U}_n)_{n<\omega}$ – така послідовність, що для довільного $n < \omega$ система $\mathcal{U}_n$ є псевдобазою X. Тоді гра $\mathrm{BM}_{\mathbf{u}}(X, A)$ є β-несприятливою тоді і тільки тоді, коли A є берівським підпростором X.*

Виявляється, що кожна нескінченна гра ізоморфна до деякої **u**-гри Банаха-Мазура [1].

Теорема 2. *Нехай $\Gamma = (\mathit{\Gamma}, \gamma)$ – деяка гра. Тоді існує повний метричний простір X, для якого системи $\mathcal{U}_n = \{B(x, 2^{1-n}) : x \in X\}$ диз'юнктні і гра Γ ізоморфна до гри $\mathrm{BM}_{\mathbf{u}}(X, A)$ для $\mathbf{u} = (\mathcal{U}_n)_{n<\omega}$ і деякої множини $A \subseteq X$.*

Доведення. За твердженням 5 можна вважати, що Γ є почерговою грою гравців β та α. Покладемо $X = \overset{\omega}{\Pi}_{\mathit{\Gamma}}$ і і $U_t = \{x \in X : t \preceq x\}$ для довільного $t \in \overset{<\omega}{\Pi}_{\mathit{\Gamma}}$. Нехай $d = d_X$ – стандартна метрика на X (див. п.2). Тоді для довільних $t \in \overset{n}{\Pi}_{\mathit{\Gamma}}$ і $x \in U_t$ матимемо, що $U_t = B[x, 2^{-n}] = B(x, 2^{1-n})$. Тоді $\mathcal{U}_n = \{U_t : t \in \overset{n}{\Pi}_{\mathit{\Gamma}}\}$ для довільного $n < \omega$. Нехай $A = X \cap \gamma^{-1}(\alpha)$ і $\Delta = \mathrm{BM}_{\mathbf{u}}(X, A)$. Тоді відображення $\overset{\leq\omega}{\Pi}_{\mathit{\Gamma}} \ni x \mapsto f(x) = \big(U_{x|_n}\big)_{n<\omega} \in \overset{\leq\omega}{\Pi}_{\mathit{\Delta}}$ зберігає порядок $\preceq$ і $\delta \circ f = g$. Отже, ігри Γ та Δ є тотожними, а значить, ізоморфними.

Зауваження. Ми не можемо застосувати теорему 1 до гри, що виникає в теоремі 2, адже $\mathcal{U}_n$ не є псевдобазою X.

7. Добутки ігор. Розглянемо набір $\iota = (\iota_n) \in \{1, 2\}^\omega$, для якого множини $N_i = \iota^{-1}(i) = \{n \in \omega : \iota_n = i\}$, $i = 1, 2$, нескінченні. Насправді нас в подальшому будуть цікавити лише періодичні набори ι. Набір $\iota = (\iota_n)_{n\in\omega} \in \{1, 2\}^\omega$, для якого існує таке $p \in \mathbb{N}$, що $\iota_{n+p} = \iota_n$ для кожного $n \in \omega$, називатимемо *p-періодичним* і позначатимемо його $\iota = (\iota_0 \iota_1 \ldots \iota_{p-1})$.

Рекрентне правило $\mathit{\Gamma}$ називатимемо *ι-добутком рекурентних правил* $\mathit{\Gamma}_1$ та $\mathit{\Gamma}_2$ (при цьому пишемо, $\mathit{\Gamma} = \mathit{\Gamma}_1 \iota \mathit{\Gamma}_2$), якщо для довільних $i = 1, 2$, $n \in N_i$ та $x \in \overset{n}{M}$, де $M = \mathrm{im}\mathit{\Gamma}_1 \cup \mathrm{im}\mathit{\Gamma}_2$, виконується, що $\mathit{\Gamma}(x) = \mathit{\Gamma}_i(x|_{N_i})$. Зокрема, ми будемо мати, що для довільного $i = 1, 2$, $n \leq \omega$ та $x \in \overset{n}{\Pi}_{\mathit{\Gamma}}$ виконується, що $x|_{N_i} \in \overset{n}{\Pi}_{\mathit{\Gamma}_i}$. Фактично, правило $\mathit{\Gamma}$ по номерах з множини N_i діє як правило $\mathit{\Gamma}_i$, $i = 1, 2$. Для функцій $\gamma_i : \overset{\leq\omega}{\Pi}_{\mathit{\Gamma}_i} \to \{\alpha, \beta\}$ визначаємо функцію $\gamma = \gamma_1 \iota \gamma_2 : \overset{\leq\omega}{\Pi}_{\mathit{\Gamma}} \to \{\alpha, \beta\}$ наступним чином: для довільного $x \in \overset{\leq\omega}{\Pi}_{\mathit{\Gamma}}$ у випадку, коли $l(x) < \infty$, то покладаємо $\gamma(x) = \gamma_i(x|_{N_i})$, якщо $l(x) \in N_i$ для деякого $i = 1, 2$; для випадку $l(x) = \omega$ покладаємо, $\gamma(x) = \alpha$ якщо $\gamma_i(x|_{N_i}) = \alpha$ для довільного $i = 1, 2$ і $\gamma(x) = \beta$, якщо $\gamma_i(x|_{N_i}) = \beta$, для деякого $i = 1, 2$.

Гру $\Gamma = (\mathit{\Gamma}, \gamma)$ для гравців α та β називатимемо *ι-добутком ігор* $\Gamma_i = (\mathit{\Gamma}_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2$, і при цьому записуватимемо $\Gamma = \Gamma_1 \iota \Gamma_2$, якщо $\mathit{\Gamma} = \mathit{\Gamma}_1 \iota \mathit{\Gamma}_2$ і $\gamma = \gamma_1 \iota \gamma_2$. Гру $\tilde{\Gamma} = \Gamma_1 \tilde{\iota} \Gamma_2$ ми називатимемо *почерговим ι-добутком*, якщо $\tilde{\Gamma}$ – відповідна почергова гра до гри $\Gamma = \Gamma_1 \iota \Gamma_2$.

Теорема 3. Нехай $\Gamma_i = (\mathit{\Gamma}_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2$, – ігри для гравців α та β, набір $\iota \in \{1, 2\}^\omega$, такий, що множини $N_i = \iota^{-1}(i)$, $i = 1, 2$, нескінченні, і $\Gamma = (\mathit{\Gamma}, \gamma) = \Gamma_1 \iota \Gamma_2$. Тоді

(i) якщо ігри Γ_1 та Γ_2 α-сприятливі, то гра Γ також є α-сприятливою;

(ii) якщо одна з ігор Γ_1 та Γ_2 є α-сприятливою, а інша β-несприятливою, то Γ є β-несприятливою.

(iii) якщо гра Γ є β-несприятливою, то обидві гри Γ_1 та Γ_2 також є β-несприятливими.

Доведення. Під час доведення цієї теореми ми будемо користуватися позначеннями, що введені при означенні ι-добутку. Ми детально розглянемо тільки найцікавіший для нас випадок (ii). Що стосується інших випадків, то доведення їх набагато простіше і тому ми обмежимось тільки короткими вказівками.

(ii) Нехай для певності Γ_1 – α-сприятлива а Γ_2 – β-несприятлива. Доведемо, що Γ є β-несприятливою. Нехай це не так і існує виграшна стратегія Σ для гравця β у грі Γ. Розглянемо також виграшну стратегію Σ_1 для гравця α в грі Γ_1. Причому, як ми зауважували в попередньому пункті, не буде обмеження вважати, що стратегії Σ та Σ_1 однозначні, тобто для довільних $x \in \overset{<\omega}{\Pi}_{\Sigma}$ і $y \in \overset{<\omega}{\Pi}_{\Sigma_1}$ будемо мати, що

$$\Sigma(x) = \begin{cases} \{\sigma(x)\} & , \ \gamma(x) = \beta; \\ \Gamma(x) & , \ \gamma(x) = \alpha; \end{cases}$$

$$\Sigma_1(y) = \begin{cases} \{\sigma_1(y)\} & , \ \gamma_1(y) = \alpha; \\ \Gamma_1(y) & , \ \gamma_1(y) = \beta; \end{cases}$$

причому $\sigma(x) \in \Gamma(x)$ і $\sigma_1(y) \in \Gamma_1(y)$ для відповідних x та y.

Покладемо $\Sigma' = \Sigma \cap (\Sigma_1 \iota \Gamma_2)$ і зафіксуємо деяке $x \in \overset{<\omega}{\Pi}_{\Sigma'}$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $l(x) \in N_1$. Врахувавши означення ι-добутку правил, одержимо, що

$$\Sigma'(x) = \Sigma(x) \cap (\Sigma_1 \iota \Gamma_2)(x) = \Sigma(x) \cap \Sigma_1(x|_{N_1})$$

Якщо $\gamma(x) = \beta$, то, за означенням функції γ, одержимо, що $\gamma_1(x|_{N_1}) = \beta$. В такому разі, врахувавши, що $\Gamma = \Gamma_1 \iota \Gamma_2$, будемо мати таке:

$$\Sigma'(x) = \Sigma(x) \cap \Sigma_1(x|_{N_1}) = \{\sigma(x)\} \cap \Gamma_1(x|_{N_1}) =$$

$$= \{\sigma(x)\} \cap \Gamma(x) = \{\sigma(x)\}.$$

Якщо ж $\gamma(x) = \alpha$, то знову матимемо, що $\gamma_1(x|_{N_1}) = \alpha$. Отже,

$$\Sigma'(x) = \Sigma(x) \cap \Sigma_1(x|_{N_1}) =$$

$$= \Gamma(x) \cap \{\sigma_1(x|_{N_1})\} = \{\sigma_1(x|_{N_1})\},$$

адже $\sigma_1(x|_{N_1}) \in \Sigma_1(x|_{N_1}) \subseteq \Gamma_1(x|_{N_1}) = \Gamma(x)$.

Нехай тепер $l(x) \in N_2$. Тоді,

$$\Sigma'(x) = \Sigma(x) \cap (\Sigma_1 \iota \Gamma_2)(x) = \Sigma(x) \cap \Gamma_2(x|_{N_2}).$$

Якщо $\gamma(x) = \beta$, то $\gamma_2(x|_{N_2}) = \beta$, а значить,

$$\Sigma'(x) = \Sigma(x) \cap \Gamma_2(x|_{N_2}) = \{\sigma(x)\} \cap \Gamma_2(x|_{N_2}) =$$

$$= \{\sigma(x)\} \cap \Gamma(x) = \{\sigma(x)\}.$$

Якщо ж $\gamma(x) = \alpha$, то $\gamma_2(x|_{N_2}) = \alpha$. Але $\Gamma(x) = \Gamma_2(x|_{N_2})$. Тому

$$\Sigma'(x) = \Sigma(x) \cap \Gamma_2(x|_{N_2}) =$$

$$= \Gamma(x) \cap \Gamma_2(x|_{N_2}) = \Gamma_2(x|_{N_2}).$$

Таким чином, підсумовуючи вищесказане, одержимо, що існує така функція $\sigma' : M^{<\omega} \to M$, що для довільного $x \in \overset{<\omega}{\Pi}_{\Sigma'}$ виконується, що

$$\Sigma'(x) = \begin{cases} \Gamma_2(x|_{N_2}), & |x| \in N_2 \cap \gamma^{-1}(\alpha); \\ \{\sigma'(x)\}, & \text{інакше}; \end{cases} \qquad (*)$$

(для тих наборів, для яких функція σ' не визначається правилом Σ', її значення можна вибрати довільним чином). В такому разі, оскільки $\Sigma' \subseteq \Sigma$ і Σ виграшна для β, то для довільної партії $x \in \overset{\omega}{\Pi}_{\Sigma'}$ матимемо, що $\gamma(x) = \beta$. Крім того, оскільки $\Sigma' \subseteq \Sigma_1 \iota \Gamma_2$, то для довільної партії $x \in \overset{\omega}{\Pi}_{\Sigma'}$ матимемо, що $x|_{N_1} \in \overset{\omega}{\Pi}_{\Sigma_1}$. Тоді, за означенням функції γ матимемо, що для довільної партії $x \in \overset{\omega}{\Pi}_{\Sigma'}$ виконується одна із рівностій $\gamma_2(x|_{N_2}) = \beta$ або $\gamma_2(x|_{N_2}) = \beta$ Але стратегія Σ_1 виграшна для α. Тому $\gamma_1(x|_{N_1}) = \alpha$ при $x \in \overset{\omega}{\Pi}_{\Sigma'}$. Таким чином, $\gamma_2(x|_{N_2}) = \beta$ для довільної партії $x \in \overset{\omega}{\Pi}_{\Sigma'}$.

Занумеруємо множину $N_2 = \{m_k : k \in \omega\}$ так, що $m_k \uparrow$. Візьмемо $k \in \omega$ і $y = (y_j)_{j<k} \in \overset{k}{\Pi}_{\Gamma_2}$. Зараз за індукцією ми визначимо такий набір $x = (x_n)_{n<m_k} \in \overset{m_k}{\Pi}_{\Sigma'}$, що $x_{m_j} = y_j$ для довільного $j < k$. Припустимо, що для деякого $n < m_k$ уже побудований набір $(x_\ell)_{\ell<n} \in \overset{n}{\Pi}_{\Sigma'}$, для якого $x_{m_i} = y_i$ якщо $m_i < n$. Побудуємо x_n зі збереженням відповідних властивостей. Якщо $n = m_j$ для деякого $j < k$, то покладаємо $x_n = y_j$. Якщо ж $n \in N_1$, то визначаємо $x_n = \sigma'\big((x_\ell)_{\ell<n}\big)$. Врахувавши $(*)$, матимемо, що $(x_\ell)_{\ell\le n} \in \overset{n+1}{\Pi}_{\Sigma'}$. Зауважимо, що за рахунок формули $(*)$, такий набір x єдиний. Таким чином, для довільних $k \in \omega$ і $y \in \overset{k}{\Pi}_{\Gamma_2}$ існує єдиний набір $\varphi(y) = x \in \overset{m_k}{\Pi}_{\Sigma'}$, для якого $\varphi(y)\upharpoonright_{N_2} = y$.

Покладемо тепер $\Sigma_2(y) = \Sigma'(\varphi(y))$, для довільного $y \in \overset{<\omega}{\Pi}_{\Gamma_2}$. Доведемо, що Σ_2 — виграшна для β стратегія у грі Γ_2. По-перше, за рахунок $(*)$, правило Σ_2 справді є стратегією для β у грі Γ_2. Далі, візьмемо деяку партію $y \in \overset{\omega}{\Pi}_{\Sigma_2}$. Тоді за рахунок єдиності матимемо, що $\varphi(y|_k)|_{m_j} = \varphi(y|_j)$ для довільних $j < k$. Тому існує такий набір $x \in M^{\omega}$, для якого $x|_{m_k} = \varphi(y|_k)$ для довільного $k < \omega$. В такому разі $x \in \overset{\omega}{\Pi}_{\Sigma'}$ і $y = x\upharpoonright_{N_2}$. Тому, як ми зауважували вище, $\gamma_2(y) = \beta$. Таким чином, β виграє у партії x. Отже, стратегія Σ_2 виграшна для β. А це не можливо, адже гра Γ_2 за умовою є β-несприятливою.

(i) Нехай S_i – виграшні стратегії у грі Γ_i, $i = 1, 2$. Покладемо $S = S_1\iota S_2$. Ясно, що тоді S буде виграшною для α стратегією.

(iii). Нехай це не так і одна із ігор Γ_1 та Γ_2 є β-сприятливою. Скажімо, гра Γ_1 – β-сприятлива. Тоді існує виграшна стратегії S_1 у грі Γ_1 для гравця β. Покладемо $S = S_1\iota\Gamma_2$. Ясно, що тоді S буде виграшною для β стратегією, адже умова виграшу гравця β у грі Γ полягає в тому, що хоча би в одній із відповідних партій в іграх Γ_1 та Γ_2 виграє β. Таким чином, ми прийшли до суперечності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Oxtoby J.C.* The Banach-Mazur game and Banach category theorem / Oxtoby J.C. // Contributions to the theory of games, vol. III. Ann. of Math. Studies, N39. - Prinston, 1957. - P.159-163.

2. *Choquet G.* Lectures on analusis. Vol. I / Choquet G. - New York-Amsterdam: Benjamin, 1969.

3. *Christensen J. P.* R Joint continuity of separateli cntinuous functions / J. P. R. Christensen // Proc. Amer. Math. Soc. - 1981. - **82**, N3. - P.455-461.

4. *Saint-Raymond J.* Jeux topologiques et espaces de Namioka / J. Saint-Raymond // Proc. Amer. Math. Soc. - 1984. - **87,** N4. - P.409-504.

5. *Talagrand M.* Espaces de Baire et espaces de Namioka //Math. Ann. - 1985. - **270,** N2. - P.159-164.