УДК 517.51

©2011 р. В.К. Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ З АДИТИВНОЮ ТОПОЛОГІЄЮ І НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИМ МНОЖЕННЯМ НА СКАЛЯР

Введено поняття N-простору, тобто векторного простору з топологією, відносно якої додавання сукупно неперервне, а множення на скаляр нарізно неперервне, і поняття обмеженої множини в такому просторі. Встановлено таке узагальнення теореми Мазура-Орлича про сукупну неперервність множення на скаляр у F-просторах: якщо X – N-простір, у якому кожна збіжна послідовність обмежена, то множення на скаляр у цьому просторі секвенціально неперервне за сукупністю змінних.

The notion of N-space is introduced, ie N-space is a vector space with a topology, in which the addition operation is jointly continuous and multiplication on scalar is separately continuous. The notion of bounded set is also introduced in such a space. We obtain the following generalization of Mazur-Orlicz theorem about joint continuity of scalar multiplication in F-spaces: If X is N-space in which every convergent sequence is bounded, then scalar multiplication in this space is jointly sequentially continuous.

1. У наш час стало загальноприйнятим при означенні топологічного векторного простору (скорочено: ТВП) вимагати, щоб топологія на векторному просторі узгоджувалася з його обома операціями, додаванням і множенням на скаляр, у тому сенсі, що ці операції мають бути неперервними за сукупністю змінних (див., наприклад, [8] і вказану там літературу). Але так було не завжди. Наприклад, С.Банах [1, с.30], вводячи клас просторів типу (F) (тепер їх називають F-просторами), означає F-простір як повний метричний векторний простір з інваріантною відносно зсувів метрикою і нарізно неперервним множенням на скаляр. Втім, невдовзі по цьому С.Мазур і В.Орлич [2], встановивши для F-просторів принцип рівномірної обмеженості, як наслідок з нього отримали, що множення на скаляр у F-просторі насправді неперервне за сукупністю змінних.

У зв'язку з цим результатом Мазура-Орлича природно виникає загальна задача про сукупну неперервність нарізно неперервної операції множення на скаляр у векторному просторі з адитивною топологією, тобто такою, що операція додавання сукупно неперервна. Вона є спеціальним випадком загальної задачі про сукупну неперервність нарізно неперервних білінійних відображень $f : X \times Y \to Z$, яка досі розглядалася лише у випадку, коли X, Y і Z – це ТВП. Ця загальна задача бере свій початок з класичного результату Е.Геллінґера і О.Тепліца [3] про неперервність білінійної форми на арифметичному гільбертовому просторі ℓ_2. У відомих монографіях з функціонального аналізу (див. наприклад, праці [4-6]) їй присвячено спеціальні підрозділи, але наведені там результати ще далекі від свого завершення. Це або приклади розривних нарізно неперервних білінійних функцій (як-от скалярний добуток $\langle x, y\rangle$ на нескінченновимірному гільбертовому просторі з слабкою топологією), або теореми про сукупну неперервність таких функцій, отримані з допомогою принципу рівномірної обмеженості. Але нерозв'язаною залишається загальна проблема: які необхідні і достатні умови мають задовольняти ТВП X, Y і Z, щоб кожне нарізно неперервне білінійне відображення $f : X \times Y \to Z$ було сукупно неперервним?

Векторні простори з адитивною топологією і нарізно неперервним множенням на скаляр ми будемо коротко називати *N-просторами.* Як і для ТВП, топологічну структуру N-просторів можна задати з допомогою спеціальних базисів околів нуля (теорема 1). Як це не дивно, але автор не знає відповіді на

Питання 1. *Чи існує N-простір, який не є ТВП?*

В N-просторах, як і в ТВП, можна ввести поняття обмеженої множини, як такої, що поглинається кожним околом нуля, і з допомогою нього перенести на N-простори класичний принцип рівномірної обмеженості (теорема 2).

Добре відомо, що в ТВП кожна збіжна послідовність точок утворює обмежену множину. Доведення цього факту спирається на наявність у довільному ТВП бази, що складається з заокруглених околів нуля, а це в свою чергу випливає з сукупної неперервності множення на скаляр у точці $(0,0)$. Не видно як нарізна неперервність множення на скаляр може забезпечити таку властивість і тому виникає

Питання 2. *Чи існує N-простір, у якому є збіжна, але не обмежена послідовність точок?*

Зрозуміло, що з позитивної відповіді на питання 2 випливає позитивна відповідь і на питання 1.

З допомогою узагальненого принципу рівномірної обмеженості ми встановлюємо такий результат (теорема 3): якщо X – берівський N-простір, Y – топологічний простір, Z – N-простір, у якому кожна збіжна послідовність обмежена, і $f : X \times Y \to Z$ – нарізно неперервне відображення, яке лінійне відносно першої змінної, то f секвенціально неперервне за сукупністю змінних. Звідси, як наслідок, отримуємо таке узагальнення теореми Мазура-Орлича (теорема 4): якщо X – це N-простір, у якому кожна збіжна послідовність обмежена, то множення на скаляр в X секвенціально неперервне за сукупністю змінних У зв'язку з цим можна поставити ще

Питання 3. *Чи існує метризовний N-простір, який би не був ТВП?*

Попередня інформація на цю тему є в тезах [7, 13], причому в [7] поспішно було заявлено, що відповідь на питання 3 негативна, бо автор тоді за інерцією вважав, що в N-просторах збіжні послідовності будуть обмеженими, і ніхто зі слухачів його доповіді на конференції не спитав: а як це довести?

2. Перейдемо до детального викладу оголошених результатів. Символом $\mathbb{K}$ ми позначаємо, як прийнято, поле $\mathbb{R}$ дійсних чисел або поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Топологію $\mathcal{T}$ на векторному просторі X над полем $\mathbb{K}$ ми називаємо *адитивною*, якщо відносно неї операція додавання $s : X^2 \to X$, $s(x,y) = x+y$, неперервна за сукупністю змінних. Векторний простір X з адитивною топологією $\mathcal{T}$ ми називаємо *N-простором*, якщо операція множення на скаляр $m : \mathbb{K} \times X \to X$, $m(\lambda, x) = \lambda x$, нарізно неперервна, тобто для кожного $x \in X$ відображення $m_x : \mathbb{K} \to X$, $m_x(\lambda) = \lambda x$, неперервне і для кожного $\lambda \in \mathbb{K}$ відображення $m^\lambda : X \to X$, $m^\lambda(x) = \lambda x$, теж неперервне. Таким чином, N-простір – це такий топологічний і векторний простір X, у якому додавання $s : X^2 \to X$ сукупно неперервне, а множення на скаляр $m : \mathbb{K} \times X \to X$ лише нарізно неперервне.

Зараз ми покажемо як задавати топологічну структуру на N-просторі з допомогою певних баз околів нуля, подібно до того як це робиться для ТВП (щодо термінології див. праці [8-12]).

Теорема 1. *У кожному N-просторі X існує база $\mathcal{V}$ околів нуля, яка має такі властивості:*

B1. Кожний елемент V з $\mathcal{V}$ є радіальною і симетричною множиною;

B2. Для довільного скаляра $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ і довільного $V \in \mathcal{V}$ множина λV теж входить у $\mathcal{V}$;

B3. Для довільних двох елементів V_1 і V_2 з системи $\mathcal{V}$ існує третій $V_3 \in \mathcal{V}$, такий, що $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$;

B4. Для довільного $V \in \mathcal{V}$ існує $W \in \mathcal{V}$, таке, що $W + W \subseteq V$.

Навпаки, для кожної непорожньої системи $\mathcal{V}$ підмножин векторного простору X, яка задовольняє умови $B1 - B4$, відпо-

відність

$$x \mapsto \mathcal{U}_x = \{U_x \in 2^X : (\exists V \in \mathcal{V})(x+V) \subseteq U_x\}$$

задає топологічну структуру на X, відносно якої X буде N-простором, а $\mathcal{V}$ – базою околів нуля у цьому просторі.

Доведення. Нехай X – N-простір і U – окіл нуля в X. Тоді з неперервності відображення $m_x(\lambda) = \lambda x$ в нулі випливає радіальність околу U, яка означає, що існує таке $\delta > 0$, що $\lambda x \in U$, як тільки $|\lambda| \leq \delta$. Якщо число $\lambda \neq 0$, то і λU це окіл нуля в X. Це випливає з неперервності відображень $m^{\lambda^{-1}}(x) = \lambda^{-1}x$ в нулі, адже тоді існує такий окіл нуля V, що $\lambda^{-1}V \subseteq U$, а значить, $V \subseteq \lambda U$, а це і дає нам, що λU – окіл нуля в X. Зокрема, при $\lambda = -1$ отримаємо, що множина $-U = (-1)U$ – це теж окіл нуля в X.

Нехай $\mathcal{V}$ – система всіх симетричних околів нуля в X. Всі елементи $V \in \mathcal{V}$ будуть радіальними множинами і вона буде базисом околів нуля в X, бо в кожному околі нуля U міститься симетричний окіл нуля $V = U \cap (-U)$. Властивості В2 і В3 для $\mathcal{V}$ легко перевіряються. Властивість В4 негайно випливає з неперервності додавання в точці $(0,0)$.

Навпаки, нехай $\mathcal{V}$ – непорожня система множин в X, яка має властивості В1-В4 і $x \mapsto \mathcal{U}_x$ – визначене у формулюванні теореми відображеня. Оскільки всі множини $V \in \mathcal{V}$ радіальні, то $0 \in V$ для кожного $V \in \mathcal{V}$, а значить, $x \in U_x$ для кожного $U_x \in \mathcal{U}_x$. Інші властивості околів перевіряються так само як у [8, с.17]. Таким чином, $x \mapsto \mathcal{U}_x$ – це топологічна структура на X, а $\mathcal{V}$, як легко бачити, – базис околів нуля в цьому топологічному просторі X. Неперервність операції додавання у векторному просторі X, наділеному цією топлогічною структурою, легко виводиться з властивості В4, неперервність відображень $m_x : \mathbb{K} \to X$ – з радіальності множин $V \in \mathcal{V}$, а неперервність відображень $m^\lambda : X \to X$ з властивості В2. Таким чином векторний простір X з уведеною топологічною структурою – це N-простір.

3. Як і в топологічних векторних просторах, множину A в N-просторі X називають *обмеженою*, якщо вона поглинається будь-яким околом нуля в X, тобто для кожного околу нуля U в X існує такий скаляр $\gamma > 0$, що $A \subseteq \lambda U$ для всіх скалярів λ, таких, що $|\lambda| \geq \gamma$.

Нехай X і Y – N-простори над одним і тим же полем і $(f_i)_{i \in I}$ – сім'я лінійних неперервних відображень $f_i : X \to Y$. Вона називається *поточково обмеженою*, якщо для кожного x *орбіта* $\{f_i(x) : i \in I\}$ – це обмежена множина у просторі Y. Кажуть, що сім'я $(f_i)_{i \in I}$ *одностайно неперервна*, якщо для кожного околу нуля V в Y існує такий окіл нуля U в X, що $f_i(U) \subseteq V$ для кожного $i \in I$.

Відомий принцип рівномірної обмеженості для топологічних векторних просторів [9, с.64, теорема 3] можна перенести на N-простори.

Теорема 2. *Нехай X – берівський N-простір, Y – довільний N-простір і $(f_i)_{i \in I}$ – поточково обмежена сім'я лінійних неперервних відображень $f_i : X \to Y$. Тоді сім'я $(f_i)_{i \in I}$ одностайно неперервна.* **Доведення.** Нехай V – окіл нуля в Y. Існує такий замкнений симетричний окіл нуля V_0 в Y, що $V_0 + V_0 \subseteq V$. Це справджується і в довільній топологічній групі, якою є кожний N-простір. Розглянемо множину

$$U_0 = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(V_0),$$

яка, очевидно, замкнена і симетрична в X.

Доведемо, що множина U_0 радіальна. Нехай $x \in X$. За умовою множина $B = \{f_i(x) : i \in I\}$ обмежена в Y. Тому існує таке число $\gamma_x > 0$, що $B \subseteq \lambda V_0$, як тільки $|\lambda| \geq \gamma_x$. Звідси випливає, що $x \in \lambda f_i^{-1}(V_0)$ при $|\lambda| \geq \gamma_x$ для кожного $i \in I$, а значить, $x \in \lambda U_0$ при $|\lambda| \geq \gamma_x$, що і дає нам радіальність U_0.

З радіальності U_0 випливає, що

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} nU_0 = X.$$

Оскільки X – берівський простір, то існує такий номер m, що множина mU_0 десь щільна. Але відображення $x \mapsto mx$ – це гомеоморфізм простору X, тому і множина U_0 десь щільна в X, а значить, має внутрішню точку x_0, бо вона замкнена.

Існує такий симетричний окіл нуля U в X, що $x_0 + U \subseteq U_0$. Оскільки U_0 і U – симетричні множини то і $-x_0 + U \subseteq U_0$. Тоді

$$U \subseteq U + U = x_0 + U - x_0 + U \subseteq U_0 + U_0,$$

отже,

$$f_i(U) \subseteq f_i(U_0 + U_0) \subseteq f_i(U_0) + f_i(U_0) \subseteq$$
$$\subseteq V_0 + V_0 \subseteq V$$

для кожного $i \in I$, а це і означає, що сім'я $(f_i)_{i\in I}$ одностайно неперервна.

4. Використаємо тепер теорему 2 для доведення наступного узагальнення теореми про сукупну неперервність нарізно неперервних білінійних відображень [6, с.63].

Теорема 3. *Нехай X – берівський N-простір, Y – топологічний простір, Z – N-простір, у якому кожна збіжна послідовність обмежена, і $f : X \times Y \to Z$ – нарізно неперервне відображення, таке, що відображення $f_y = f(\cdot, y) : X \to Z$ лінійні для кожного $y \in Y$. Тоді відображення f – секвенціально неперервне за сукупністю змінних.*

Доведення. Нехай $x_n \in X$, $y_n \in Y$ для кожного $n = 0, 1, ...$ і $x_n \to x_0$ в X, а $y_n \to y_0$ в Y. Доведемо, що

$$f(x_n, y_n) \to f(x_0, y_0).$$

Всі відображення $f_{y_n} = f(\cdot, y_n) : X \to Z$ – це лінійні неперервні відображення і для кожного $x \in X$

$$f_{y_n}(x) = f(x, y_n) = f^x(y_n) \to f^x(y_0) = f_{y_0}(x),$$

бо відображення $f^x = f(x, \cdot) : Y \to Z$ неперервне в точці y_0. Оскільки у просторі Z кожна збіжна послідовність обмежена, то послідовність $(f_{y_n})_{n=1}^{\infty}$ поточково обмежена. Тоді за теоремою 2 ця послідовність одностайно неперервна.

Нехай W – окіл нуля у просторі Z. За теоремою 1 існує такий окіл нуля W_0 в Z, що $W_0 + W_0 \subseteq W$. З одностайної неперервності послідовності $(f_{y_n})_{n=1}^{\infty}$ випливає, що існує такий окіл нуля U у просторі X, що $f_{y_n}(U) \subseteq W_0$ для кожного n. За умовою відображення $f^{x_0} = f(x_0, \cdot) : Y \to Z$ неперервне в точці y_0. Тому існує такий окіл V точки y_0, що $f^{x_0}(V) \subseteq f(x_0, y_0) + W_0$. Оскільки $x_n \to x_0$ в X і $y_n \to y_0$ в Y, то існує такий номер N, що $x_n - x_0 \in U$ і $y_n \in V$ для всіх $n \geq N$. Тоді при $n \geq N$ будемо мати:

$$f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0) = f(x_n, y_n) -$$
$$- f(x_0, y_n) + f(x_0, y_n) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f_{y_n}(x_n - x_0) + f^{x_0}(y_n) - f(x_0, y_0) \in f_{y_n}(U) +$$
$$+ f^{x_0}(V) - f(x_0, y_0) \subseteq W_0 + W_0 \subseteq W,$$

що й треба було довести.

Теорему 3 можна застосувати для отримання такого узагальнення результату Мазура-Орлича з [2].

Теорема 4. *Нехай X – N-простір, у якому кожна збіжна послідовність обмежена. Тоді множення на скаляр $m : \mathbb{K} \times X \to X$, $m(\lambda, x) = \lambda x$, є секвенціально неперервною за сукупністю змінних операцією.*

Доведення. Операція множення на скаляр $m : \mathbb{K} \times X \to X$ – це нарізно неперервне білінійне відображення, адже X – це N-простір, крім того, поле скалярів $\mathbb{K}$ зі своєю природною топологією є берівським ТВП. Тому твердження теореми негайно випливає з теореми 3, бо простір значень X задовольняє її умови.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Банах С.С.* Курс функціонального аналізу. – К.: Радянська школа, 1948. – 216 с.

2. *Mazur S., Orlicz W.* Über Folgen linearer operationen // Stud. Math. 1933. – **4**. – S. 152-157.

3. *Hellinger E., Teeplitz O.* Grunndlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen // Math. Ann. – 1910. **69.** – S. 289-330.

4. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. – М.: ИЛ, 1959. – 410с.

5. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1072с.

6. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 445с.

7. *Маслюченко В.К.* Алгебраїчні аспекти науки про зв'язки між нарізними і сукупними властивостями функцій // Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та мат. аналізу". Тези доповідей. 23-28 лютого 2011, Ворохта. - Ів.-Франківськ: ПНУ, 2011. – С.2-4.

8. *Маслюченко В.К.* Перші типи топологічних векторних просторів. – Чернівці : Рута, 2002. – 72 с.

9. *Маслюченко В.К.* Лінійні неперервні оператори. – Чернівці: Рута, 2002. – 72с.

10. *Маслюченко В.К.* Елементи теорії двоїстості. – Чернівці: Рута, 2005. – 160с.

11. *Маслюченко В.К.* Лекції з функціонального аналізу. Ч.1. Метричні і нормовані простори. – Чернівці: ЧНУ, 2010. – 184 с.

12. *Маслюченко В.К.* Лекції з функціонального аналізу. Ч.2. Лінійні оператори і функціонали. – Чернівці: ЧНУ, 2010. – 192 с.

13. *Maslyuchenko V.K.* Vector spaces with additive topology and separately continuous product // "Complex analysis and its appl." Intern. Conf. ded. 70-th ann. A.F.Grishin. Book of Abstract. Kharkiv, August 15-18, 2011. – Kharkiv: KhNU, 2011. – P.31.