УДК 517.983

©2011 р. Ю.С. Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

УЗАГАЛЬНЕНЕ РІВНЯННЯ РУБЕЛА

Описано всі пари лінійних функціоналів, які задовольняють узагальнене рівняння Рубела.

All pairs linear functionals which satisfy generalized Rubel equation are described.

Нехай G – довільна область комплексної площини і $\mathcal{H}(G)$ – простір усіх аналітичних функцій на G, що наділений топологією компактної збіжності. В [1] В.А. Рубел, узагальнюючи формулу для диференціювання добутку двох функцій, поставив і розв'язав задачу, про знаходження всіх пар лінійних неперервних функціоналів L та M на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення

$$L(fg) = L(f)M(g) + L(g)M(f)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$. Пізніше в [2] Н.Р. Нандакумар розв'язав задачу Рубела в класі лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$. Подальші дослідження стосовно опису пар лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють подібні співвідношення, розглянуті Н.Р. Нандакумаром та П. Каннапаном в [3], [4].

Розглянемо природне узагальнення рівняння Рубела:

$$L(fg) = aL(f)M(g) + bL(g)M(f), \qquad (1)$$

де a, b – фіксовані комплексні числа. Для його розв'язання наведемо спочатку допоміжне твердження стосовно опису мультиплікативних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$(див., наприклад, [5]). Лінійний функціонал L на просторі $\mathcal{H}(G)$ називається мультиплікативним, якщо для довільних функцій f, g з $\mathcal{H}(G)$ виконується рівність $L(fg) = L(f)L(g)$. Для того, щоб L був лінійним мультиплікативним функціоналом на $\mathcal{H}(G)$, необхідно і достатньо, щоб $L = 0$, або $L(f) = f(z_0)$ для $f \in \mathcal{H}(G)$, де z_0 – деяка точка з області G.

Перейдемо тепер до розв'язання рівняння (1). Припустимо, що для деяких комплексних чисел a та b пара лінійних функціоналів L та M на $\mathcal{H}(G)$ задовольняє співвідношення (1) для довільних функцій f та g з $\mathcal{H}(G)$. Зауважимо, що у випадку $a = b = 0$ функціонал $L = 0$, а M – довільний лінійний функціонал на $\mathcal{H}(G)$. Крім того для довільних $a, b \in \mathbb{C}$ пара функціоналів $L = 0$, M – довільний лінійний функціонал на $\mathcal{H}(G)$ задовольняє (1). Надалі вважатимемо, що $L \neq 0$.

Розглянемо далі випадок $a \neq 0$, $b = 0$. Підставимо в (1) $f = 1$. Тоді для довільної функції $g \in \mathcal{H}(G)$ виконується рівність $L(g) = aL(1)M(g)$. Тому рівність (1) набуде вигляду $L(1)(M(fg) - aM(f)M(g)) = 0$. Якщо $L(1) = 0$, то $L = 0$, що не так. Тому $L(1) \neq 0$ і використовуючи опис мультиплікативних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$ ми отримуємо, що $M = 0$, або $M(f) = \frac{1}{a}f(z_0)$ для $f \in \mathcal{H}(G)$, де z_0 деяка точка з G. Оскільки $L \neq 0$, то ми одержуємо, що $L(f) = Cf(z_0)$ і $M(f) = \frac{1}{a}f(z_0)$, де $C = L(1)$.

У випадку $b \neq 0$, $a = 0$ цілком аналогічно до попереднього отримуємо, що $L(f) = Cf(z_0)$, $M(f) = \frac{1}{b}f(z_0)$, де $z_0 \in G$, $C \in \mathbb{C}$.

Нехай тепер жодне з чисел a, b не дорівнює нулеві. Підставляючи в (1) $f = g = 1$, отримуємо, що

$$L(1)(1 - (a+b)M(1)) = 0. \qquad (2)$$

Розглянемо далі можливі випадки.

А) $L(1) \neq 0$. Тоді з (2) випливає, що $a + b \neq 0$ і $M(1) = \frac{1}{a+b}$. Підставляючи у (1) $g = 1$, одержимо, що

$$L(f) = (a+b)L(1)M(f), \qquad (3)$$

де $f \in \mathcal{H}(G)$. Тоді співвідношення (1) набуде вигляду:

$$M(fg) = (a+b)M(f)M(g), \ f,g \in \mathcal{H}(G).$$

Тому функціонал $(a+b)M$ є лінійним мультиплікативним на $\mathcal{H}(G)$ і значить $M(f) = \frac{1}{a+b}f(z_0)$, де $z_0 \in G$. З (3) отримуємо, що $L(p) = Cf(z_0)$, де $C = L(1)$.

Б) Нехай $L(1) = 0$. Підставляючи у (3) $g = 1$, одержимо, що $L(f)(1 - aM(1)) = 0$ для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$. Оскільки $L \neq 0$, то звідси отримуємо, що $M(1) = \frac{1}{a}$.

Для чисел $c = -(a+b)M(z)$, $d = a(a+b)(M(z))^2 - aM(z^2)$ многочлен $p(z) = z^2 + cz + d$ є спільним нулем функціоналів L та M. Далі розглянемо два можливі випадки.

І) Нехай многочлен $p(z)$ має два різні корені z_1, z_2. Тоді

$$L((z-z_1)(z-z_2)) = 0, \qquad (4)$$

$$M((z-z_1)(z-z_2)) = 0. \qquad (5)$$

Покажемо, що $z_1 \in G$ і $z_2 \in G$. Дійсно, якщо це не так, то або а) $z_1 \notin G, z_2 \notin G$, або б) одна з точок z_1, z_2 належить G, а інша ні.

У випадку а) для довільної функції $f(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$ функція $\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}$ належить до простору $\mathcal{H}(G)$ і, використовуючи (1), одержимо, що для довільної функції $f(z)$ з $\mathcal{H}(G)$ виконується рівність $L(f) = L\left((z-z_1)(z-z_2)\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\right) = 0$. Це суперечить тому, що функціонал L є ненульовим.

У випадку б) для визначеності вважатимемо, що $z_1 \in G$, а $z_2 \notin G$. Візьмемо довільну функцію f з простору $\mathcal{H}(G)$.

Довільну функцію $f(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$ можна зобразити у вигляді

$$f(z) = (z-z_1)q(z) + f(z_1), \qquad (6)$$

де $q(z)$ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(G)$, причому

$$q(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} \text{ при } z \neq z_1, \\ f'(z_1) \text{ при } z = z_1. \end{cases}$$

Використовуючи формулу (3) зобразимо $f(z)$ у вигляді

$$f(z) = (z-z_1)(z-z_2)\frac{q(z)}{z-z_2} + f(z_1).$$

Використовуючи (1), (4), (5) та рівність $L(1) = 0$ звідси випливає, що $L(f) = 0$, а це не так.

Таким чином, дійсно, точки z_1 та z_2 належать області G. Візьмемо довільну функцію $f(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$. і зобразимо її у вигляді (6), де $q(z) \in \mathcal{H}(G)$.

Аналогічно

$$q(z) = (z-z_2)q_1(z) + \frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}, \qquad (7)$$

де $q_1(z)$ – деяка функція з простору $\mathcal{H}(G)$. З (6) і (7) випливає, що

$$f(z) = (z-z_1)(z-z_2)q_1(z) +$$

$$+\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}z + \frac{z_1f(z_2)-z_2f(z_1)}{z_1-z_2}. \qquad (8)$$

Користуючись співвідношенням (1) і рівностями (7) та (8), одержимо, що

$$L(f) = C(f(z_1) - f(z_2)) \qquad (9)$$

де $C = \frac{L(z)}{z_1-z_2}$. Оскільки $L \neq 0$, то $a+b \neq 0$. Дійсно, якби $a+b = 0$, то помінявши місцями f та g, з (1) одержали б, що для довільних функцій f та g з $\mathcal{H}(G)$ виконується рівність $L(f)M(g) = L(g)M(f)$. Тому $L(fg) = 0$ для довільних функцій f та g з $\mathcal{H}(G)$ і, таким чином, $L = 0$. А це не так. З (1) випливає, що $L(f^2) = (a+b)L(f)M(f)$ для довільного довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$. Якщо $f \in \mathcal{H}(G)$ така, що $f(z_1) \neq f(z_2)$, то з цієї рівності одержуємо, що

$$M(f) = \frac{1}{a+b}(f(z_1) + f(z_2)). \qquad (10)$$

Доведемо правильність формули (10) для довільної функції $f(z)$, яка задовольняє умову $f(z_1) = f(z_2)$. Розглянемо довільну функцію $h(z)$ для якої $h(z_1) \neq h(z_2)$ (наприклад, можна взяти $h(z) = z$). Тоді $(f+h)(z_1) \neq (f+h)(z_2)$ і за формулою (11) $M(f+h) = \frac{1}{a+b}(f(z_1)+h(z_1)+f(z_2)+h(z_2))$. З іншого боку $M(f+h) = M(f) + M(h) = M(f) + \frac{1}{a+b}(h(z_1)+h(z_2))$. Прирівнюючи одержані різними способами значення для $M(f+h)$, знаходимо, що $M(f) = \frac{1}{a+b}(f(z_1) + f(z_2))$. Таким чином, формула (10) є правильною і для вибраної функції f. Підставляючи в (1) $f(z)=z$, $g(z)=1$, ми отримаємо, що a=b.

II) Нехай многочлен $p(z)$ має єдиний корінь $z_1 \in \mathbb{C}$. Тоді

$$L((z-z_1)^2) = M((z-z_1)^2) = 0. \qquad (11)$$

Аналогічно, як і в попередньому випадку переконуємося в тому, що точка z_1 належить області G. Візьмемо довільну функцію $f \in \mathcal{H}(G)$. Використовуючи двічі формулу (6) зобразимо її у вигляді

$$f(z) = (z-z_1)^2 q_2(z) + f'(z_1)z + f(z_1) - z_1 f'(z_1).$$

Користуючись співвідношеннями (1) та (11) звідси одержимо, що

$$L(f) = Cf'(z_1), \qquad (12)$$

де $C = L(z)$. Оскільки $L \neq 0$, то так само як і в попередньому випадку ми отримуємо, що $a+b \neq 0$.

Якщо функція $f \in \mathcal{H}(G)$ така, що $f'(z_1) \neq 0$, то, використовуючи (17) і співвідношення $L(f^2) = (a+b)L(f)M(f)$, одержимо, що

$$M(f) = \frac{2}{a+b} f(z_1). \qquad (13)$$

Якщо ж $f'(z_1) = 0$, то розглядаючи таку функцію $h(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$, для якої $h'(z_1) \neq 0$ і проводячи аналогічні міркування як і у випадку I), переконуємося в тому, що формула (13) є правильною і для таких функцій f. Отже, у випадку II) ми отримали, що функціонали L та M визначаються формулами (12) і (13). Підставляючи в (1), $f = 1$ та $g(z) = z$ отримуємо, що $a = b$.

Резюмуючи тепер всі розглянуті випадки, отримуємо, що є правильними необхідні умови наступної теореми.

Теорема. *Для того, щоб лінійні на просторі $\mathcal{H}(G)$ функціонали L та M задовольняли співвідношення* (1), *необхідно і достатньо, щоб пара цих функціоналів визначалася однією з наступних умов:*

1) *Якщо $a = b \neq 0$, то*

1° *$L = 0$, M – довільний лінійний функціонал на S;*

2° *$L(f) = Cf(z_0)$, $M(f) = \frac{1}{a+b} f(z_0)$, $z_0 \in G$, $C \in \mathbb{C}$;*

3° *$L(f) = C(f(z_1) - f(z_2))$, $M(f) = \frac{1}{2a}(f(z_1) + f(z_2))$, де $z_1, z_2 \in G$, $C \in \mathbb{C}$;*

4° *$L(f) = Cf'(z_1)$, $M(f) = \frac{1}{a} f(z_1)$, де $z_1 \in G$, $C \in \mathbb{C}$.*

2) *Якщо $a \neq b$, $a \neq -b$ то*

1° *$L = 0$, M – довільний лінійний функціонал на $\mathcal{H}(G)$;*

2° *$L(f) = Cf(z_0)$, $M(f) = \frac{1}{a+b} f(z_0)$, $z_0 \in G$, $C \in \mathbb{C}$;*

3) *Якщо $a = -b$ то $L = 0$, M – довільний лінійний функціонал на $\mathcal{H}(G)$;*

Достатність умов теореми встановлюється безпосередньою перевіркою.

Зауваження. *При $a = b = 1$ з доведеної теореми одержуємо опис розв'язків класичного рівняння Рубела в класі лінійних функціоналів на просторі $\mathcal{H}(G)$. Зазначимо, що цей опис узгоджується з результатами робіт* [1],[2], *а запропонований метод розв'язання узагальненого рівняння Рубела відмінний від наведених авторами в цих працях способів розв'язання класичного рівняння Рубела.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *L. A. Rubel* Derivation pairs on the holomorphic functions // Funkcial. Ekvac. – 1967. – №10. – P. 225-227.

2. *N. R. Nandakumar* A Note on Derivation Pairs // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – №21. – P. 535–539.

3. *N. R. Nandakumar* A note on the functional equation $M(fg) = M(f)M(g) + L(f)L(g)$ on $H(G)$ // Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari. – 1998. – **68**. – P. 13–17.

4. *Pl. Kannappan, N. R. Nandakumar* On a cosine functional equation for operators on the algebra of analytic functions in a domain // Aequationes Mathematicae – 2001.– **61.** – №3. – P. 233-238.

5. *John B. Garnett* Bounded analytic functions. – Academic Press, New York, 1981. – 468 p.