УДК 517.91:532.26

©2011 р. **М.П. Ленюк, О.М. Ленюк**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА-(КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА)-ЛЕЖАНДРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$

Методом дельта-подібної послідовності на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження запроваджено інтегральне перетворення, породжене гібридним диференціальним оператором Ейлера-(Конторовича-Лєбєдєва)-Лежандра. Отримана основна тотожність. Логічна схема застосування показана на задачі теплопровідності.

The method of delta - like sequence in the polar axis with the two conjugate points we introduce the integral transformation generated by hybrid differential operator of Euler-(Kontorovich-Lebedev)-Legendre. The basic identity. The logic circuit is shown in the application of heat conduction problem.

Метод відокремлення зміних й породжені ним інтегральні перетворення Фур'є, Фур'є - Бесселя, Вебера, Ганкеля, Меліна і т.д. дали можливість одержати інтегральні зображення аналітичного розв'язку достатньо широкого класу задач математичної фізики однорідного середовища.

У зв'язку з широким застосуванням на сучасному етапі науково-технічного прогресу композитних матеріалів виникає гостра потреба в розв'язанні задач математичної фізики неоднорідних структур. Останнє вимагає, з одного боку, удосконалення й модифікації існуючого математичного апарату, а з другого боку, створення нових методів. У частковому випадку, виникла необхідність в побудові таких інтегральних перетворень, які б давали можливість алгебраїзувати лінійні диференціальні рівняння з кусково-неперервними коефіцієнтами.

Вперше такі інтегральні перетворення з'явились в математичній літературі в 70-их роках 20-го століття в роботах Уфлянда та його учнів [1-3] і були пізніше названі гібридними. Подальший розвиток гібридні інтегральні перетворення одержали в роботах Проценка В.С. та його учнів [4-6]. Основи теорії гібридних інтегральних перетворень подано в роботі [7].

Основні результати

Запровадимо інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 > 0\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{(\alpha)}^{(\mu)} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)B_{\alpha_1}^* +$$

$$+\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)B_{\alpha_2} + \theta(r - R_2)\Lambda_{(\mu)}, \quad (1)$$

У рівності (1) $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда, $B_{\alpha_1}^* = r^2\dfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_1 + 1)r\dfrac{d}{dr} + \alpha_1^2$ – диференціальний оператор Ейлера [8], $B_{\alpha_2} = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2 + 1)r\frac{d}{dr} + \alpha_2^2 - \lambda^2 r^2$ – диференціальний оператор (Конторовича-Лєбєдева) [9], $\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-\operatorname{ch} r} + \frac{\mu_2^2}{1+\operatorname{ch} r}\right)$ – узагальнений диференціальний оператор Лежандра [10]; $2\alpha_j + 1 > 0$, $\mu_1 1 \geq \mu_2 \geq 0$, $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$.

Означення. За область задання ГДО $M_{(\alpha)}^{(\mu)}$ приймемо множину G вектор - функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r) = \left\{B_{\alpha_1}^*[g_1(r)]; B_{\alpha_2}[g_2(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\right\}$ неперервна на множині I_2^+;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$(\alpha_{11}^0 d/dr + \beta_{11}^0)g_1(r)|_{r=R_0} = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty}[r^\gamma g_3(r)] = 0, \quad (2)$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) g_k(r) - \right. \tag{3}$$

$$\left.\left(\alpha_{j2}^k - \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = 0, j, k = 1, 2.$$

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{11}^0 \le 0$, $\beta_{11}^0 \ge 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \ne 0$; $\alpha_{jm}^k \ge 0$, $\beta_{jm}^k \ge 0$, $c_{1k}c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $j, k = 1, 2$.

Визначимо числа

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}}{c_{21}} \frac{c_{12}}{c_{22}} \frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{shR_2}{R_2^{2\alpha_2+1}},$$

$$\sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} \frac{shR_2}{R_2^{2\alpha_2+1}}, \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} +$$
$$+\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 r^{2\alpha_2 - 1} +$$
$$+\theta(r - R_2)\sigma_3 shr \tag{4}$$

і скалярний добуток

$$J \equiv (u(r), v(r)) = \int_{R_0}^{\infty} u(r)v(r)\sigma(r)dr =$$

$$= \int_{R_0}^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} dr +$$

$$+ \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2 - 1} dr + \tag{5}$$

$$+ \int_{R_2}^{\infty} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 shrdr;\ u(r) \in G,\ v(r) \in G.$$

Із умов спряження (3), записаних для $u \in G$ та $v \in G$, випливає базова тотожність

$$\left(u_k(r)v_k^{'}(r) - u_k^{'}(r)v_k(r)\right)\Big|_{r=R_k} = \tag{6}$$
$$= \frac{c_{2k}}{c_{1k}}(u_{k+1}(r)v_{k+1}^{'}(r) - u_{k+1}^{'}(r)v_{k+1}(r))\Big|_{r=R_k},$$
$$k = 1, 2.$$

Методом інтегрування частинами два рази під знаком інтегралів з використанням крайових умов (2) та базової тотожності (6) встановлюється рівність

$$(M_{(\alpha)}^{(\mu)}[u], v(r)) = (u(r), M_{(\alpha)}^{(\mu)}[v]). \tag{7}$$

Рівність (7) показує, що ГДО $M_{(\alpha)}^{(\mu)}$ самоспряжений диференціальний оператор. Отже, його спектр дійсний. Оскільки ГДО $M_{(\alpha)}^{(\mu)}$ має на множині I_2^+ одну особливу точку $r = \infty$ [7], то його спектр неперервний.

Висновок. Спектр ГДО $M_{(\alpha)}^{(\mu)}$ дійсний та неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна векторна функція

$$\begin{aligned} V_{(\alpha)}^{(\mu)}(r, \beta) = \sum_{k=1}^{2} \theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r) \times \\ \times V_{(\alpha);k}^{(\mu)}(r, \beta) + \theta(r - R_2)V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(r, \beta) \end{aligned} \tag{8}$$

Функції $V_{(\alpha);j}^{(\mu)}(r, \beta)$ знайдемо як ненульовий розв'язок сингулярної спектральної задачі Штурма-Ліувілля: побудувати на множині I_2^+ ненульовий розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Ейлера, (Конторовича-Лєбєдєва) та Лежандра

$$\begin{aligned} (B_{\alpha_1}^* + b_1^2)V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r, \beta) = 0, \quad r \in (R_0, R_1), \\ (B_{\alpha_2} + b_2^2)V_{(\alpha);2}^{(\mu)}(r, \beta) = 0, \quad r \in (R_1, R_2), \\ (\Lambda_{(\mu)} + b_3^2)V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(r, \beta) = 0, \quad r \in (R_2, \infty), \end{aligned} \tag{9}$$

за крайовими умовами (2) та умовами спряження (3); $b_j^2 = \beta^2 + k_j^2$, $k_j^2 \ge 0, j = \overline{1, 3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha_1}^* + b_1^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_1}\cos(b_1 \ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r)$ [8]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння $(B_{\alpha_2} + b_2^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = C_{\alpha_2}(\lambda r, b_2)$ та $v_2 = D_{\alpha_2}(\lambda r, b_2)$ [9]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} + b_3^2)v = 0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра $A_{\nu_3^*}^{(\mu)}(chr)$ та $B_{\nu_3^*}^{(\mu)}(chr)$, $\nu_3^* = -1/2 + ib_3$ [10].

Якщо покласти

$$V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)=A_1r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r)+ +B_1r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r), r\in(R_0,R_1),$$

$$V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta)=A_2C_{\alpha_2}(\lambda r,b_2)+B_2D_{\alpha_2}(\lambda r,b_2), \quad r\in(R_1,R_2),$$

$$V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta)=A_3A^{(\mu)}_{\nu_3^*}(chr)+ +B_3B^{(\mu)}_{\nu_3^*}(chr), r\in(R_2,\infty), \tag{10}$$

то крайова умова в точці $r=R_0$ та умови спряження (3) для визначення шести величин $A_j,B_j(j=\overline{1,3})$ дають алгебраїчну систему із п'яти рівнянь:

$$Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1,\mathrm{R}_0)A_1+Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1,\mathrm{R}_0)B_1=0$$

$$Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1,\mathrm{R}_1)A_1+Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1,\mathrm{R}_1)B_1- -X^{11}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_1,b_2)A_2--X^{12}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_1,b_2)B_2=0, j=1,2;$$

$$X^{21}_{\alpha_2;j1}(\lambda R_2,b_2)A_2+X^{22}_{\alpha_2;j1}(\lambda R_2,b_2)B_2- -Y^{(\mu);21}_{\nu_3^*;j2}(\mathrm{chR}_2)A_3-Y^{(\mu);22}_{\nu_3^*;j2}(\mathrm{chR}_2)B_3=0 \tag{11}$$

В системі (11) беруть участь функції:

$$Y^{m1}_{\alpha_1;jk}(\mathrm{b}_1,R_m)=[(\beta^m_{jk}-\alpha_1R_m^{-1}\alpha^m_{jk})\cos(b_1\ln R_m)- -b_1R_m^{-1}\alpha^m_{jk}\sin(b_1\ln R_m)]R_m^{-\alpha_1},$$

$$Y^{m2}_{\alpha_1;jk}(\mathrm{b}_1,R_m)=[(\beta^m_{jk}-\alpha_1R_m^{-1}\alpha^m_{jk})\times \times\sin(b_1\ln R_m)+b_1R_m^{-1}\alpha^m_{jk}\cos(b_1\ln R_m)]R_m^{-\alpha},$$

$$X^{m1}_{\alpha_2;jk}(\lambda R_m,b_2)=(\alpha^m_{jk}d/dr+\beta^m_{jk})C_{\alpha_2}(\lambda r,b_2)|_{r=R_m},$$

$$X^{m2}_{\alpha_2;jk}(\lambda R_m,b_2)=(\alpha^m_{jk}d/dr+\beta^m_{jk})D_{\alpha_2}(\lambda r,b_2)|_{r=R_m},$$

$$Y^{(\mu);21}_{\nu_3^*,j2}(\mathrm{chR}_2)=\left(\alpha^2_{j2}\tfrac{d}{dr}+\beta^2_{j2}\right)A^{(\mu)}_{\nu_3^*}(chr)|_{r=R_2},$$

$$Y^{(\mu);22}_{\nu_3^*;j2}(\mathrm{chR}_2)=\left(\alpha^2_{j2}\tfrac{d}{dr}+\beta^2_{j2}\right)B^{(\mu)}_{\nu_3^*}(chr)|_{r=R_2}.$$

Сумісну алгебраїчну систему (11) розв'яжемо стандартним способом [11]. Припустимо, що $A_1=A_0Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1,\mathrm{R}_0)$, $B_1=-A_0Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1,\mathrm{R}_0)$, де $A_0\neq0$. Тоді перше рівняння системи (11) стає тотожністю.

Розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_2,B_2:

$$X^{11}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_1,b_2)A_2+X^{12}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_1,b_2)B_2= =-A_0[Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1,\mathrm{R}_0)Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1,\mathrm{R}_1)- -Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1\mathrm{R}_0)Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1\mathrm{R}_1)]\equiv \equiv-A_0\delta_{\alpha_1;j1}(b_1,\mathrm{R}_0,R_1),\ j=1,2 \tag{12}$$

Визначник алгебраїчної системи (12)

$$X^{11}_{\alpha_2;12}X^{12}_{\alpha_2;22}-X^{11}_{\alpha_2;22}X^{12}_{\alpha_2;12}(\lambda R_1,b_2)=- =-\frac{c_{21}sh(\pi b_2)}{\pi\lambda^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}}\equiv-q_{\alpha_2}\neq0$$

Алгебраїчна система (12) має єдиний розв'язок [11]:

$$A_2=\tfrac{A_0}{q_{\alpha_2}(\beta)}[\delta_{\alpha_1;11}(b_1,\mathrm{R}_0,\mathrm{R}_1)X^{12}_{\alpha_2;22}(\lambda R_1,b_2)- -\delta_{\alpha_1;21}(b_1,\mathrm{R}_0,\mathrm{R}_1)X^{12}_{\alpha_2;12}(\lambda R_1,b_2)],$$

$$B_2=-\tfrac{A_0}{q_{\alpha_2}(\beta)}[\delta_{\alpha_1;11}(b_1,\mathrm{R}_0,\mathrm{R}_1)X^{11}_{\alpha_2;22}(\lambda R_1,b_2)- -\delta_{\alpha_1,21}(b_1,\mathrm{R}_0,\mathrm{R}_1)X^{11}_{\alpha_2;12}(\lambda R_1,b_2)] \tag{13}$$

При відомих A_2,B_2 розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_3,B_3 :

$$Y^{(\mu),21}_{\nu_3^*;j2}(chR_2)A_3+Y^{(\mu),22}_{\nu_3^*;j2}(chR_2)B_3= =A_0[q_{\alpha_2}(\beta)]^{-1}a_{(\alpha);j}(\beta), j=1,2 \tag{14}$$

Тут прийняті позначення:

$$\delta_{\alpha_2;kj}(\lambda R_1,\lambda R_2,b_2)=X^{11}_{\alpha_2;k2}(\lambda R_1,b_2)\times \times X^{22}_{\alpha_2;j1}(\lambda R_2,b_2)-X^{12}_{\alpha_2;k2}(\lambda R_1,b_2)X^{21}_{\alpha_2;j1}(\lambda R_2,b_2),$$

$$a_{(\alpha);j}(\beta)=\delta_{\alpha_1;21}(b_1,\mathrm{R}_0,\mathrm{R}_1)\delta_{\alpha_2;1j}(\lambda R_1,\lambda R_2,b_2)- -\delta_{\alpha_1;11}(b_1,\mathrm{R}_0,R_1)\delta_{\alpha_2;2j}(\lambda R_1,\lambda R_2,b_2),\ j=1,2.$$

Визначник алгебраїчної системи (14)

$$q_{(\mu)}(\beta)\equiv Y^{(\mu),21}_{\nu_3^*;12}Y^{(\mu),22}_{\nu_3^*;22}-Y^{(\mu),21}_{\nu_3^*;22}Y^{(\mu),22}_{\nu_3^*;12}(ch\mathrm{R}_2)= =\tfrac{c_{22}}{S_{(\mu)}(b_3)shR_2}\neq0$$

$$S_{(\mu)}(b_3)=\tfrac{2^{\mu_1}\pi^3\cos\mu_1\pi}{2^{\mu_2}(\cos\mu_2\pi+\cos\mu_1\pi ch(2\pi b_3))}\times \times\tfrac{1}{|(1/2+ib_2+\nu^+_{12})|^2|(1/2+ib_3+\nu^-_{12})|^2}$$

$$\nu^{\pm}_{12}=1/2(\mu_1\pm\mu_2).$$

Алгебраїчна система (14) має єдиний розв'язок [11];

$$A_3=-\omega^{(\mu)}_{(\alpha),2}(\beta),\quad B_3=\omega^{(\mu)}_{(\alpha);1}(\beta),$$

$$A_0=q_{\alpha_2}(\beta)q_{(\mu)}(\beta), \tag{15}$$

$$\omega^{(\mu)}_{(\alpha);j}(\beta)=a_{(\alpha);2}(\beta)Y^{(\mu);2j}_{\nu_3^*;12}(ch\mathrm{R}_2)- -a_{(\alpha);1}(\beta)Y^{(\mu);2j}_{\nu_3^*;22}(ch\mathrm{R}_2), j=1,2;$$

Підставивши визначені згідно формул (13) та (15) A_j, B_j у рівності (10), отримаємо функції:

$$V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)=q_{\alpha_2}(\beta)q_{(\mu)}(\beta)[Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)r^{-\alpha_1}\times \times\cos(b_1\ln r)-Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r)],$$

$$
\begin{gathered}
V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta)=q_{(\mu)}(\beta)\{\delta_{\alpha_1;21}(b_1,\mathrm{R}_0,\mathrm{R}_1)\times\\
\times[X^{11}_{\alpha_2;12}(\lambda R_1,b_2)D_{\alpha_2}(\lambda r,b_2)-\\
-X^{12}_{\alpha_2;12}(\lambda R_1,b_2)C_{\alpha_2}(\lambda r,b_2)]-\\
-\delta_{\alpha_1;21}(b_1,\mathrm{R}_0,\mathrm{R}_1)[X^{11}_{\alpha_2;22}(\lambda R_1,b_2)\times\\
\times D_{\alpha_2}(\lambda r,b_2)-X^{12}_{\alpha_2;22}(\lambda R_1,b_2)\times\\
\times C_{\alpha_2}(\lambda r,b_2)]\},
\end{gathered}\tag{16}
$$

$$
V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)=\omega^{(\mu)}_{(\alpha);1}(\beta)B^{(\mu)}_{\nu^*_3}(chr)-
$$

$$
-\omega^{(\mu)}_{(\alpha);2}(\beta)A^{(\mu)}_{\nu^*_3}(chr).
$$

Згідно формули (8) спектральна вектор-функція $V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)$ стає відомою.

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної функції $V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)$ та спектральної щільності

$$
\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)=\frac{\beta\gamma_{(\mu)}(b_3)S_{(\mu)}(b_3)}{[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)]^2+[\gamma_{(\mu)}(b_3)\omega^{(\mu)}_{(\alpha);2}(\beta)]^2},
$$

$$
\gamma_{(\mu)}(b_3)=\frac{\cos\mu_1\pi sh(2\pi b_3)}{\cos\mu_2\pi+\cos\mu_1\pi ch(2\pi b_3)}
$$

дозволяє визначити пряме $H^{(\mu)}_{(\alpha)}$ й обернене $H^{-(\mu)}_{(\alpha)}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2^+ ГДО $M^{(\mu)}_{(\alpha)}$ [12]:

$$
H^{(\mu)}_{(\alpha)}[g(r)]=\int\limits_{R_0}^{\infty}g(r)V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr\equiv
$$

$$
\equiv\tilde{g}(\beta),\tag{17}
$$

$$
H^{-(\mu)}_{(\alpha)}[\tilde{g}(\beta)]=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\tilde{g}(\beta)V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta\equiv
$$

$$
\equiv g(r)\tag{18}
$$

Математичним обґрунтуванням правил (17),(18) є наступне твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). *Якщо вектор-функція*

$$
\begin{gathered}
f(r)=[\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)r^{\alpha_1-1/2}+\theta(r-R_1)\times\\
\times\theta(R_2-r)r^{\alpha_2-1/2}+\theta(r-R_2)\sqrt{shr}]g(r)
\end{gathered}
$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині (R_0,∞), *то для будь-якого* $r\in I_2^+$ *справджується інтегральне зображення*

$$
\begin{gathered}
g(r)=\tfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)\int\limits_{R_0}^{\infty}g(\rho)\times\\
\times V^{(\mu)}_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta
\end{gathered}\tag{19}
$$

Доведення: В основі доведення знаходиться невласний подвійний інтеграл

$$
\begin{gathered}
\tfrac{2}{\pi}\int\limits_{R_0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\psi(\lambda)V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\lambda)d\lambda\times\\
\times V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\psi(\beta),
\end{gathered}\tag{20}
$$

якщо $\lambda=\beta\in(0,\infty)$, і дорівнює нулю, якщо $\lambda=\beta\bar{\in}(0,\infty)$. Функція $\psi(\lambda)$ неперервна, абсолютно сумовна з обмеженою варіацією на $(0,\infty)$.

Припустимо, що функція

$$
g(r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\psi(\beta)V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta\tag{21}
$$

Помножимо рівність (21) на $V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr$ й проінтенгруємо по r від $r=R_0$ до $r=\infty$. Одержимо в силу рівності (20), що

$$
\int\limits_{R_0}^{\infty}g(r)V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr=\psi(\lambda)
$$

Підставивши в рівність (21) функцію

$$
\psi(\beta)=\int\limits_{R_0}^{\infty}g(\rho)V^{(\mu)}_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho,
$$

отримуємо інтегральне зображення (19).

Застосування запровадженого формулами (17), (18) ГІП базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $M^{(\mu)}_{(\alpha)}$.

Теорема 2 (про основну тотожність). *Якщо вектор-функція* $f(r)=\{B^*_{\alpha_1}[g_1(r)];B_{\alpha_2}[g_2(r)];\Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\}$ *неперервна на множині* I_2^+, *а функції* $g_j(r)$ *задовольняють крайові умови*

$$
\left(\alpha^0_{11}{}^{d}\!/_{dr}+\beta^0_{11}\right)g_1(r)\left.\right|_{r=R_0}=g_0\,,
$$

$$\lim_{r\to\infty}[shr(\frac{dg_3}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha),3}(r,\beta)-g_3\frac{dV^{(\mu)}_{(\alpha)}}{dr}(r))]=0 \quad (22)$$

та умови спряження

$$[\left(\alpha^k_{j1}d/dr+\beta^k_{j1}\right)g_k(r)- -\left(\alpha^k_{j2}d/dr+\beta^k_{j2}\right)g_{k+1}(r)\,|_{r=R_k}=\omega_{jk}\,; \quad (23)$$

$$j,k=1,2,$$

то має місце основна тотожність ГІП ГДО $M^{(\mu)}_{(\alpha)}$:

$$H^{(\mu)}_{(\alpha)}[M^{(\mu)}_{(\alpha)}[g(r)]]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_i(\beta)+ +(-\alpha^0_{11})^{-1}V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(R_0,\beta)\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}g_0+ +\sum_{k=1}^{2}d_k[Z^{(\mu),k}_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}-Z^{(\mu),k}_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}] \quad (24)$$

Тут прийняті позначення:

$$d_1=\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}:c_{11},\;\; d_2=\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}:c_{12};$$

$$\tilde{g}_1(\beta)=\int_{R_0}^{R_1}g_1(r)V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)r^{2\alpha_1-1}\sigma_1dr,$$
$$\tilde{g}_2(\beta)=\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta)r^{2\alpha_2-1}\sigma_2dr,$$

$$\tilde{g}_3(\beta)=\int_{R_2}^{\infty}g_3(r)V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3shrdr,$$

$$Z^{(\mu),k}_{(\alpha);i2}(\beta)=(\alpha^k_{i2}d/dr+\beta^k_{i2})V^{(\mu)}_{(\alpha);k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}.$$

Доведення. Згідно правила (17) маємо:

$$R\equiv H^{(\mu)}_{(\alpha)}[M^{(\mu)}_{(\alpha)}[g(r)]]=\int_{R_0}^{\infty}M^{(\mu)}_{(\alpha)}[g(r)]\times \times V^{(\mu)}_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr= =\int_{R_0}^{R_1}B^*_{\alpha_1}[g_1(r)]V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1r^{2\alpha_1-1}dr+ +\int_{R_1}^{R_2}B_{\alpha_2}[g_2(r)]V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta)\times \times\sigma_2r^{2\alpha_2-1}dr+ +\int_{R_2}^{\infty}\Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta)shrdr. \quad (25)$$

Проінтегруємо під знаками інтегралів два рази частинами:

$$R=[\sigma_1r^{2\alpha_1+1}(\tfrac{dg_1}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)-g_1(r)\tfrac{dV^{(\mu)}_{(\alpha);1}}{dr})]|^{R_1}_{R_0}+ +\int_{R_0}^{R_1}g_1(r)(B^*_{\alpha_1}[V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)])\sigma_1r^{2\alpha_1-1}dr+ +[\sigma_2r^{2\alpha_1+1}(\tfrac{dg_2}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta)-g_2(r)\tfrac{dV^{(\mu)}_{(\alpha);2}}{dr})]|^{R_2}_{R_1}+ +\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)(B_{\alpha_2}[V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta)])\sigma_2r^{2\alpha_2-1}dr+ +[\sigma_3shr(\tfrac{dg_2}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta)-g_3(r)\tfrac{dV^{(\mu)}_{(\alpha);3}}{dr})]|^{\infty}_{R_2}+ +\int_{R_2}^{\infty}g_3(r)(\Lambda_{(\mu)}[V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta)])\sigma_3shrdr \quad (26)$$

Якщо $\alpha^0_{11}\neq0$, то

$$(\frac{dg_1}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)-g_1(r)\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);1})|_{r=R_0}= =\frac{1}{\alpha^0_{11}}(\alpha^0_{11}\frac{dg_1}{dr}+\beta^0_{11}g_1)|_{r=R_0}V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(R_0,\beta)- -\frac{1}{\alpha^0_{11}}(\alpha^0_{11}\frac{dV^{(\mu)}_{(\alpha);1}}{dr}+\beta^0_{11}V^{(\mu)}_{(\alpha);1})|_{r=R_0}g_1(R_0)= =(\alpha^0_{11})^{-1}(g_0V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(R_0,\beta)-g_1(R_0)) \quad (27)$$

Позаінтегральний член в точці $r=\infty$ перетворюється в нуль внаслідок умови обмеження із рівності (22).

Скористаємося базовою тотожністю для випадку, коли умови спряження неоднорідні:

$$[u_k(r)v'_k(r)-u'_k(r)v_k(r)]|_{r=R_k}=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}\times \times[u_{k+1}(r)v'_{k+1}(r)-u'_{k+1}(r)v_{k+1}(r)]|_{r=R_k}+ +\frac{1}{c_{1k}}[Z^{(\mu);k}_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}-Z^{(\mu);k}_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}]. \quad (28)$$

При $r=R_1$ одержуємо:

$$(\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1})(\frac{dg_2}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta)- -g_2(r)\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{(\alpha);2}(r,\beta))|_{r=R_1}+\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}c_{11}^{-1}\times \times[Z^{(\mu),1}_{\alpha;12}(\beta)\omega_{21}-Z^{(\mu),1}_{\alpha;22}(\beta)\omega_{11}]= =d_1[Z^{(\mu),1}_{\alpha;12}(\beta)\omega_{21}-Z^{(\mu),1}_{\alpha;22}(\beta)\omega_{11}] \quad (29)$$

тому, що в силу вибору σ_1 та σ_2 вираз

$$\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}} - \sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1} =$$

$$= \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{shR_2}{R_2^{2\alpha_2+1}}R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}} -$$

$$-\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{shR_2}{R_2^{2\alpha_2+1}}R_1^{2\alpha_2+1} = \frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}shR_2 -$$

$$-\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}shR_2 \equiv 0.$$

При $r = R_2$ одержуємо:

$$(\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{22}}{c_{12}} - \sigma_3 shR_2)\times$$

$$\times(\frac{dg_3}{dr}V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta) - g_3(r)\frac{d}{dr}V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta))|_{r=R_2}$$

$$+\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}c_{12}^{-1}[Z_{(\alpha);12}^{(\mu),2}(\beta)\omega_{22} - \tag{30}$$

$$-Z_{(\alpha);22}^{(\mu),2}(\beta)\omega_{12}] = d_2[Z_{(\alpha);12}^{(\mu),2}(\beta)\omega_{22} -$$

$$-Z_{(\alpha);22}^{(\mu),2}(\beta)\omega_{12}]$$

тому, що в силу вибору σ_2 та σ_3 вираз

$$\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{22}}{c_{12}} - \sigma_3 shR_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{shR_2}{R_2^{2\alpha_2+1}}R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{22}}{c_{12}} -$$

$$-shR_2 = shR_2 - shR_2 \equiv 0.$$

Із диференціальних тотожностей

$$(B_{\alpha_1}^* + b_1^2)V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta) \equiv 0,$$

$$(B_{\alpha_2} + b_2^2)V_{(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta) \equiv 0,$$

$$(\Lambda_{(\mu)} + b_3^2)V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta) = 0$$

знаходимо, що

$$B_{\alpha_1}^*[V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)] = -(\beta^2 + k_1^2)V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta);$$
$$B_{\alpha_2}[V_{(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)] = -(\beta^2 + k_2^2)V_{(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta),$$
$$\Lambda_{(\mu)}[V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)] = -(\beta^2 + k_3^2)V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta). \tag{31}$$

Якщо одержані співвідношення (27), (29), (30) та (31) підставити в (26), то будемо мати рівність:

$$H_{(\alpha)}^{(\mu)}[M_{(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]] = (-\alpha_{11}^0)^{-1}V_{(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta)\times$$

$$\times\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}g_0 + \sum_{k=1}^{2} d_k[Z_{(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{2k} -$$

$$-Z_{(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{1k}] - (\beta^2 + k_1^2)\int\limits_{R_0}^{R_1} g_1(r)\times$$

$$\times V_{(\alpha);1}^{(\mu),k}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr - (k_2^2 + \beta^2)\int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r)\times$$

$$\times V_{(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr - (k_3^2 + \beta^2)\int\limits_{R_2}^{\infty} g_3(r)\times$$

$$\times V_{(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)shrdr \tag{32}$$

У результаті роз'єднання інтегралів на два доданки приходимо до основної тотожності (24).

Правила (17), (18) та (24) складають математичний апарат для розв'язання відповідних задач математичної фізики неоднорідних середовищ за такою логічною схемою.

Задача теплопровідності. Побудувати обмежений в області $D_2^+ = \{(t,r) : t \in (0,\infty);\ r \in I_2^+\}$ розв'язок сепаратної системи рівнянь теплопровідності параболічного типу [13]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - B_{\alpha_1}^*[u_1] = f_1(t,r), r \in (R_0,R_1),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - B_{\alpha_2}[u_2] = f_2(t,r), r \in (R_1,R_2), \tag{33}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - \Lambda_{(\mu)}[u_3] = f_3(t,r), r \in (R_2,\infty)$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)|_{t=0} = g_j(r), r \in (R_{j-1},R_j), j = \overline{1,3}, \tag{34}$$

$$R_3 = \infty,$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 d/dr + \beta_{11}^0\right)u_1(t,r)\,|_{r=R_0} = g_0(t),$$

$$[shru_3(t,r)]|_{r=\infty} < \infty \tag{35}$$

та умовами спряження

$$[(\alpha_{j1}^k\tfrac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k)u_k(t,r) - (\alpha_{j2}^k\tfrac{\partial}{\partial r} +$$
$$+\beta_{j2}^k)u_{k+1}(t,r)]|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t), j,k = 1,2 \tag{36}$$

Розв'язання. Запишемо систему (33) й початкові умови (34) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} (\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_1^2-B^*_{\alpha_1})u_1(t,r) \\ (\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_2^2-B_{\alpha_2})u_2(t,r) \\ (\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_3^2-\Lambda_{(\mu)})u_3(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \\ f_3(t,r) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix} \tag{37}$$

Інтегральний оператор $H^{(\mu)}_{(\alpha)}$ згідно правила (17) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H^{(\mu)}_{(\alpha)}[...] = [\int\limits_{R_0}^{R_1} ...V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr \quad \int\limits_{R_1}^{R_2} ...V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr \quad \int\limits_{R_2}^{\infty} ...V^{(\mu)}_{(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 shr dr] \tag{38}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (38) за правилом множення матриць до задачі (37). Внаслідок основної тотожності (24) отримаємо задачу Коші [8]:

$$(\frac{d}{dt}+\omega^2)\tilde{u}(t,\beta) = \tilde{F}(t,\beta), \ \tilde{u}(t,\beta)|_{t=0} = \tilde{g}(\beta) \tag{39}$$

Тут

$$\omega^2 = \beta^2+\gamma^2, \ \gamma^2 = \max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\};$$
$$\tilde{F}(t,\beta) = \tilde{f}(t,\beta) + (-\alpha^0_{11})^{-1}V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(R_0,\beta)\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}g_0(t) + \sum_{k=1}^{2} d_k[Z^{(\mu),k}_{(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}(t) - Z^{(\mu),k}_{(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}(t)]$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (39) є функція [8]

$$\tilde{u}(t,\beta) = e^{-\omega^2 t}\tilde{g}(\beta) + \int\limits_0^t e^{-\omega^2(t-\tau)}\tilde{F}(\tau,\beta)d\tau \tag{40}$$

Інтегральний оператор $H^{-(\mu)}_{(\alpha)}$ згідно правила (18) як обернений до (38) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H^{-(\mu)}_{(\alpha)}[...] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty ...V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty ...V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty ...V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta \end{bmatrix} \tag{41}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (41) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (40). У результаті низки елементарних перетворень маємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку задачі теплопровідності (33) – (36):

$$\begin{gathered} u_j(t,r) = \int\limits_0^t\int\limits_{R_0}^{R_1} H^{(\mu)}_{(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho) + \\ +\delta_+(\tau)g_j(\rho)]\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho d\tau + \\ +\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2} H^{(\mu)}_{(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho) + \\ +\delta_+(\tau)g_2(\rho)]\sigma_2\rho^{2\alpha_2-1}d\rho d\tau + \\ +\int\limits_0^t\int\limits_{R_2}^{\infty} H^{(\mu)}_{(\alpha);j3}(t-\tau,r,\rho)\times \\ \times[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)]g_3(\rho)]\sigma_3 sh\rho d\rho d\tau + \\ +\sum_{k=1}^{2}\int\limits_0^t[R^{(\mu)kj}_{(\alpha);12}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau) - \\ -R^{(\mu)kj}_{(\alpha);22}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)]d\tau + \\ +\int\limits_0^t W^{(\mu)}_{(\alpha);1j}(t-\tau,r)g_0(\tau)d\tau, j=\overline{1,3}, \end{gathered} \tag{42}$$

Нагадаємо, що $\delta_+(\tau)$– дельта - функція, зосереджена в точці $\tau = 0^+$.

У рівностях (42) беруть участь головні розв'язки даної задачі:

1) породжені неоднорідністю системи (33) функції впливу

$$\begin{gathered} H^{(\mu)}_{(\alpha);jk}(t,r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\omega^2 t}V^{(\mu)}_{(\alpha);j}(r,\beta)\times \\ \times V^{(\mu)}_{(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta; j,k=\overline{1,3}, \end{gathered} \tag{43}$$

2) породжені неоднорідністю умов спря-

ження (36) функції Гріна

$$R^{(\mu),kj}_{\nu,(\alpha);i2}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\omega^2 t} d_k Z^{(\mu),k}_{(\alpha);i2}(\beta)\times$$
$$\times V^{(\mu)}_{(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta, i,k=1,2; j=\overline{1,3} \tag{44}$$

3) породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$W^{(\mu)}_{(\alpha);1j}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\omega^2 t}(-\alpha^0_{11})^{-1} V^{(\mu)}_{(\alpha);1}(R_0,\beta)\times$$
$$\times V^{(\mu)}_{(\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{(\alpha)}(\beta)d\beta\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1},\ j=\overline{1,3} \tag{45}$$

Зауваження. Якщо $\gamma^2 = \gamma_1^2 > 0$, то $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \geq 0$, $k_3^2 = \gamma_1^2 - \gamma_3^2 \geq 0$; якщо $\gamma^2 = \gamma_2^2 > 0$, то $k_1^2 = \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \geq 0$, $k_2^2 = 0$, $k_3^2 = \gamma_2^2 - \gamma_3^2 \geq 0$; якщо $\gamma^2 = \gamma_3^2 > 0$, то $k_1^2 = \gamma_3^2 - \gamma_1^2 \geq 0$, $k_2^2 = \gamma_3^2 - \gamma_2^2 \geq 0$, $k_3^2 = 0$.

Висновки

Інтегральне зображення (42) даної задачі теплопровідності поліпараметричне. Структура головних розв'язків дозволяє виділяти безпосередньо вибором параметрів будь-який практично важливий випадок (в рамках даної моделі).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Уфлянд Я. С.* О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики // Вопросы математической физики. – Л.: 1976. – С. 93-106.

2. *Ефимова И.Т.* Некоторые интегральные преобразования на составном промежутке и их приложение к решению краевых задач для слоистых сред: Дис. канд. физ.-мат. наук. – Л., 1972. – 150 с.

3. *Белова Н.А., Уфлянд Я.С.* О разложении по собственным функциям одной сингулярной краевой задачи для уравнения Лежандра // Диф.уравн. – 1967. – Т. III. – Вып. 8. – С. 1397-1399.

4. *Проценко В.С., Головченко А.В.* Обобщенное интегральное преобразование типа Фурье- Лежандра // Мат. методы анализа динам. систем. – Харьков, 1982. – № 6. – С. 26-28.

5. *Найда Л.С.* Гибридные интегральные преобразования Ханкеля-Лежандра // Мат. методы анализа динам. систем. – Харьков, 1984. – IV.- С. 132-135.

6. *Проценко В.С., Соловьев А.С.* Некоторые гибридные интегральные преобразования и их приложение в теории упругости неоднородных сред // Прикл. механіка. – 1982. – Т. XIII. – С. 62-67.

7. *Ленюк М.П., Шинкарик М.І.* Гібридні інтегральні перетворення(Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.

8. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.:Физматгиз, 1959. – 468 с.

9. *Ленюк М.П., Міхалевська Г.І.* Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва. – Чернівці: Прут, 2002. – 280с.

10. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. – Чернівці: Прут, 2002. – 248 с.

11. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

12. *Ленюк М.П., Ленюк О.М.* Гібридне інтегральне перетворення Лежандра-Фур'є-Ейлера на полярній осі // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип.528. Математика. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. – С. 80-87.

13. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.