УДК 517.5

©2011 р. А.О. Куриляк, О.Б. Скасків

Львівський національний університет імені Івана Франка

НЕРІВНІСТЬ ТИПУ ВІМАНА ДЛЯ АНАЛІТИЧНИХ В КРУЗІ ФУНКЦІЙ І КАТЕГОРІЇ БЕРА

Нехай f_t аналітична функція в одиничному крузі вигляду $f_t(z)=\sum a_n e^{i\theta_n t}z^n$, де $t\in\mathbb{R}$ і $\theta_n\in\mathbb{N}$, а h – додатна, неперервна, зростаюча до $+\infty$ на $(0,1)$ функція така, що $\int_{r_0}^1 h(r)dr=+\infty, r_0\in(0,1)$. Якщо послідовність $(\theta_n)_{n\geq 0}$ задовольняє умову $\theta_{n+1}/\theta_n\geq q>1$ $(n\geq 0)$, то для кожної аналітичної функції f_t існує множина $E=E(\delta,t)\subset(0,1)$ така, що $\int_E h(r)dr<+\infty$ і

$$\varlimsup_{\substack{r\to 1-0\\ r\notin E}}\frac{\ln M_f(r)-\ln\mu_f(r)}{2\ln h(r)+\ln\ln\{h(r)\mu_f(r)\}}\leq\frac{1}{4}.$$

Let f_t be analytic function in the unit disk of the form $f_t(z)=\sum a_n e^{i\theta_n t}z^n$, where $t\in\mathbb{R}$, $\theta_n\in\mathbb{N}$, and h be positive continuous increasing to $+\infty$ on $(0,1)$ function such that $\int_{r_0}^1 h(r)dr=+\infty, r_0\in(0,1)$. If sequence $(\theta_n)_{n\geq 0}$ satisfies condition $\theta_{n+1}/\theta_n\geq q>1$ $(n\geq 0)$, then for any analytic function f_t there exists the set $E=E(\delta,t)\subset(0,1)$ such that $\int_E h(r)dr<+\infty$ and

$$\varlimsup_{\substack{r\to 1-0\\ r\notin E}}\frac{\ln M_f(r)-\ln\mu_f(r)}{2\ln h(r)+\ln\ln\{h(r)\mu_f(r)\}}\leq\frac{1}{4}.$$

1. Вступ. Нехай H — клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на інтервалі $(0,1)$ функцій h таких, що

$$\int_{r_0}^1 h(r)dr=+\infty,\ r_0\in(0,1).$$

Для вимірної множини $E\subseteq(0,1)$ її h-мірою називатимемо величину

$$h\text{-meas }(E)\overset{def}{=}\int_E h(r)dr,$$

де функція $h\in H$. Зрозуміло, що h-meas $(0,1)=+\infty$.

Для аналітичної в одиничному крузі $\mathbb{D}=\{z\colon |z|<1\}$ функції f, зображеної степеневим рядом вигляду

$$f(z)=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}a_nz^n, \tag{1}$$

і $r\in[0,1)$ введемо такі позначення: $M_f(r)=\max\{|f(z)|\colon |z|=r\}$, $\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n\colon\ n\geq 0\}$ — максимальний член ряду (1) і $G_f(r)=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$,

$$S_f(r)=\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2r^{2n}\Big)^{1/2},$$

$$\Delta_h(r,f)=\frac{\ln M_f(r)-\ln\mu_f(r)}{2\ln h(r)+\ln_2\{h(r)\mu_f(r)\}},$$

$$E(\eta,f,h)=\big\{r\in(0,1)\colon$$
$$M_f(r)>\mu_f(r)(h^2(r)\ln\{h(r)\mu_f(r)\})^{\eta}\big\},$$

де $\ln_k x:=\ln(\ln_{k-1}x)$ $(k\geq 2)$, $\ln_1 x:=\ln x$.

З результату, доведеного в [1], випливає, що у випадку, коли $h(r)=(1-r)^{-1}$, для кожної аналітичної в $\mathbb{D}$ функції f вигляду (1) існує множина $E\subset(0,1)$ скінченної логарифмічної міри, тобто h-meas $(E)<+\infty$ з $h(r)=(1-r)^{-1}$, така, що

$$\varlimsup_{\substack{r\to 1-0\\ r\notin E}}\Delta_h(r,f)\leq\frac{1}{2}. \tag{2}$$

В [2] подібне твердження доведене з довільною функцією $h\in H$, для якої або $\ln h(r)=O(\ln_2 G_f(r))$, або $\ln_2 G_f(r)=O(\ln h(r))$ $(r\to 1-0)$.

У статті [3] відзначається, що $1/2$ у нерівності (2), взагалі кажучи, не можна замінити меншою сталою. Для того, щоб у цьому переконатись досить розглянути аналітичну функцію $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{\sqrt{n}\}z^n$, для якої при $h(r) = (1-r)^{-1}$

$$\varliminf_{r\to 1-0} \frac{M_g(r)}{h(r)\mu_g(r)\ln^{1/2}\{\mu_g(r)h(r)\}} \geq C > 0.$$

В зв'язку з цим виникає природне питання: як описати "кількість" тих аналітичних функцій, для яких нерівність (2) можна уточнити?

У статті [4] доведено, що у певному ймовірнісному сенсі для "більшості" аналітичних функцій сталу $1/2$ у нерівності (2) можна замінити на $1/4$. Подібне твердження доведене в [2] і стосовно нерівності (2) з довільною описаною вище функцією $h \in H$.

Разом з цим, розглянуті в [2, 4] класи випадкових аналітичних функцій, взагалі кажучи, не містять в собі всі аналітичні функції вигляду

$$f_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\theta_n t} z^n, \qquad (3)$$

де $(\theta_n)_{n\geq 0}$ деяка фіксована послідовність невід'ємних цілих чисел. Зазначимо, що $f_0(z) \equiv f(z)$.

Вважатимемо, що послідовність $(\theta_n)_{n\geq 0}$ задовольняє нерівність

$$\theta_{n+1}/\theta_n \geq q > 1 \ (n \geq 0). \qquad (4)$$

У випадку $q \geq 2$ аналітичні функції вигляду (4) задовольняють умови згаданих вище теорем з [2, 4].

Зазначимо, що можливість уточнення нерівності Вімана-Валірона для цілих функцій вигляду (3) раніше розглянули М. Стіл [5] та П.Філевич [6] (див. також [7]). У статтях [8–10] подібне питання розглянуто стосовно аналогів нерівності Вімана в класі цілих функцій від двох комплексних змінних. У статті [11] кількість тих цілих функцій, для яких можна уточнити класичну нерівність Вімана-Валірона, розглянуто в сенсі категорій Бера.

Ми розглянемо сформульоване питання в класі аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій вигляду (3). Встановлені тут теореми доповнюватимуть у цьому випадку твердження з [2, 4] і за своїм змістом будуть аналогом результатів з [5] і [11].

2. Допоміжні твердження. Нам будуть потрібні такі допоміжні твердження.

Лема 1. *([5]) Нехай $(\theta_n)_{n\geq 0}$ задовольняє умову (4). Тоді для будь-якої послідовності (a_n), $a_n \in \mathbb{C}$, для кожного $\beta > 0$ і для всіх $N \geq 0$*

$$P_0\Big(\Big\{t \in [0, 2\pi] \colon \max_{0\leq\psi\leq 2\pi} \Big|\sum_{k=0}^{N} a_k e^{ik\psi} e^{i\theta_k t}\Big| \geq \geq A_{\beta q} S_N \ln^{1/2} N\Big\}\Big) \leq N^{-\beta},$$

де $A_{\beta q}$ — стала, яка залежить тільки від β і q, $S_N = \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2$, а $P_0 = \frac{\mathfrak{m}}{2\pi}$, $\mathfrak{m}$ – лебеґова міра на прямій.

Лема 2. *([6]) Нехай $k(r)$ — неперервна, зростаюча до $+\infty$ на $(0,1)$ функція, а відкрита множина $E \subset (0,1)$ така, що існує $0 < p_1 \leq ... \leq p_n \to 1$ $(n \to +\infty)$ зовні E. Тоді існує нескінченна послідовність $0 < r_1 \leq ... \leq r_n \to 1$ $(n \to +\infty)$ така, що для кожного $n \in \mathbb{N}$*

1) $r_n \notin E$;

2) $\ln k(r_n) \geq \frac{n}{2}$;

3) якщо $(r_n; r_{n+1}) \cap E \neq (r_n, r_{n+1})$, то $k(r_{n+1}) \leq ek(r_n)$.

Лема 3. *([4]) Нехай $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ додатні, неперервні, зростаючі на $[0, +\infty)\colon \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\varphi_i(x)} < +\infty$, $h \in H$ і $g_1(x) = \ln G_f(e^x)$, $x < 0$. Тоді існує множина $E \subset (0,1)$ така, що h-meas $(E) < +\infty$ і для всіх $r \in (0,1)\backslash E$*

$$g_1''(\ln r) \leq h(r)\varphi_2(h(r)\varphi_1(g_1(\ln r))).$$

Введемо позначення

$$g_1(x) = \ln G_f(e^x), \ A(r) = g_1'(\ln r) =$$

$$= \frac{d\ln G_f(r)}{d\ln r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n|a_n|r^n}{G_f(r)},$$

$$B^2(r) = g_1''(\ln r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2|a_n|r^n}{G_f(r)} - A^2(r).$$

Зараз ми отримаємо оцінки зверху для $A(r)$ і $B(r)$.

Лема 4. *Нехай $h \in H$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E = E(\varepsilon, f) \subseteq (0,1)$ така, що h-meas $(E) < +\infty$ і для всіх $r \in (r_0, 1)\backslash E$ виконуються нерівності*

$$A(r) \le h(r)\ln\{h(r)\mu_f(r)\}\ln_2^{1+\varepsilon}\{h(r)\mu_f(r)\},$$
$$B^2(r) \le h^{2+\varepsilon}(r)\ln\{h(r)\mu_f(r)\}\times$$
$$\times\ln_2^{2+\varepsilon}\{h(r)\mu_f(r)\}.$$

Доведення. Нехай ξ — випадкова величина з розподілом ймовірностей

$$P(\xi = n) = \frac{1}{g(x)}|a_n|e^{nx}.$$

Тоді $M\xi = g_1'(x)$ і $D\xi = g_1''(x)$, де $g_1(x) = \ln g(x)$.

Нехай $x = \ln r < 0$. За нерівністю Чебишова отримуємо $P(|\xi - g_1'(x)| < \sqrt{2g_1''(x)}\ ) \ge 1/2$, отже,

$$g(x) \le 2 \sum_{|n-g_1'(x)|<\sqrt{2g_1''(x)}} |a_n|e^{xn} \le$$
$$\le 2\mu_f(r) \sum_{|n-g_1'(x)|<\sqrt{2g_1''(x)}} 1 \le$$
$$\le 2\mu_f(r)(2\sqrt{2g_1{}''(x)} + 1). \tag{5}$$

Для фіксованих $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ визначимо множини

$$E_1 = \{x < 0\colon g_1''(x) > h(e^x)g_1{}'(x)\times$$
$$\times(\ln g_1'(x))^{1+\varepsilon_1},\ g_1'(x) \ge 2\},$$
$$E_2 = \{x < 0\colon g_1'(x) > h(e^x)g_1(x)\times$$
$$\times(\ln g_1(x))^{1+\varepsilon_2},\ g_1(x) \ge 2\},$$

Зауважимо, що

$$\int_{E_1\bigcup E_2} h(e^x)dx = \int_E \frac{h(r)}{r}dr < +\infty,$$
$$\int_E h(r)dr < +\infty,$$

де E — образ множини $E_1\bigcup E_2$ при відображенні $r = e^x$. Очевидно, що h-meas$E = \int_E h(r)dr < +\infty$. Тоді з (5) при $r \to 1-0$, $(r \notin E)$ отримаємо

$$g(\ln r) \le 2\mu_f(r)\Big(2\sqrt{2h(e^x)g_1'(x)\ln^{1+\varepsilon_1} g_1'(x)} +$$
$$+1\Big) \le 4\mu_f(r)\left(\sqrt{2h^2(e^x)g_1(x)\ln^{1+\varepsilon_2} g_1(x)}\,\times\right.$$
$$\left.\times\ln^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}}\Big\{h(e^x)g_1(x)\ln^{1+\varepsilon_2} g_1(x)\Big\} + 1\right) \le$$
$$\le 6\mu_f(r)h(r)\sqrt{g_1(x)}\times$$
$$\times\ln^{\frac{1+\varepsilon_2}{2}} g_1(x)\ln^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}\{h(r)g_1(x)\},$$
$$g_1(x) = \ln g(x) \le \ln 6 + \ln\{h(r)\mu_f(r)\} +$$
$$+ \ln g_1(x) + \ln_2\{h(r)g_1(x)\},$$
$$g_1(x) \le 2\ln\{h(r)\mu_f(r)\}.$$

Тепер для $\delta > 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$

$$G_f(r) \le \mu_f(r)h(r)\ln^{1/2}\{h(r)\mu_f(r)\}\times$$
$$\times\big(\ln_2\{h(r)\mu_f(r)\}\ln\{h(r)\ln\{h(r)\mu_f(r)\}\}\big)^{\frac{1+\delta}{2}}.$$

Тому,

$$M_f(r) \le G_f(r) \le \mu_f(r)h(r)\ln^{1/2}\{h(r)\mu_f(r)\}\times$$
$$\times\ln^{1/2+\delta} h(r)\ln_2^{1+\delta}\{h(r)\mu_f(r)\}. \tag{6}$$

Зауважимо, що

$$g_1(x) = (1 + o(1))\ln\{h(r)\mu_f(r)\},$$
$$r \to 1-0,\ (r \notin E).$$

Вибираючи в лемі 3 $\varphi_i(x) = (x + 2)\ln^{1+\varepsilon_0/2}(2 + x)$, $i \in \{1, 2\}$ для всіх $r \in (0,1)$ зовні множини скінченної h-міри отримаємо

$$A(r) \le h(r)\varphi(g_1(\ln r)) \le$$
$$\le h(r)g_1(\ln r)\ln^{1+\varepsilon_0} g_1(\ln r) \le$$
$$\le h(r)\ln\{h(r)\mu_f(r)\}(\ln_2\{h(r)\mu_f(r)\})^{1+\varepsilon}.$$
$$B^2(r) \le h(r)\varphi_2(h(r)\varphi_1(g_1(\ln r))) \le$$
$$\le h(r)h(r)\varphi_1(g_1(\ln r))\times$$
$$\times\ln^{1+\varepsilon_0}(h(r)\varphi_1(g_1(\ln r))) \le$$

$$\le h^2(r)g_1(\ln r)\ln^{1+\varepsilon_0} g_1(\ln r)\times$$
$$\times\ln^{1+\varepsilon_0}(h(r)g_1(\ln r)\ln^{1+\varepsilon_0} g_1(\ln r)) \le$$
$$\le h^{2+\varepsilon}(r)\ln^{1+\varepsilon}\{h(r)\mu_f(r)\}.$$

Лему 4 доведено.

3. Класи аналітичних функцій, в яких майже напевно можна покращити нерівність типу Вімана. Скрізь нижче термін "для майже всіх" означатиме "майже скрізь" за мірою Лебега на прямій. В цьому пункті доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Якщо $f_t(z)$ аналітична функція вигляду (3) і послідовність $(\theta_n)_{n\geq 0}$ задовольняє умову (4), то для кожного $\delta > 0$ і для майже всіх t існує множина $E = E(\delta,t) \subseteq (0,1)$, така, що h-meas $(E) < +\infty$ і для всіх $r \in (0,1)\backslash E$ виконується нерівність*

$$M_f(r,t) \overset{def}{=} \max_{|z|\leq r}|f_t(z)| \leq$$
$$\leq \mu_f(r)\sqrt{h(r)}\ln^{1/4}\{h(r)\mu_f(r)\}\times$$
$$\times \ln^{3/4+\delta}h(r)\ln_2^{1+\delta}\{h(r)\mu_f(r)\}. \qquad (7)$$

Зауважимо, що з нерівності (7) отримаємо

$$\varlimsup_{\substack{r\to 1-0\\ r\notin E}}\Delta_h(r,f_t) =$$
$$= \varlimsup_{\substack{r\to 1-0\\ r\notin E}}\frac{\ln M_f(r,t)-\ln\mu_f(r)}{2\ln h(r)+\ln_2\{h(r)\mu_f(r)\}} \leq \frac{1}{4}. \qquad (8)$$

Доведення. За нерівністю Маркова для випадкової величини X з розподілом ймовірностей $P(X=n) = |a_n|r^n/G_f(r)$ та математичним сподіванням $MX = A(r)$ отримаємо

$$\sum_{n\geq C}\frac{|a_n|r^n}{G_f(r)} \leq \frac{A(r)}{C}.$$

Нехай

$$C = C(r) = A(r)h(r)\ln^{1/2+\delta}\{h(r)\mu_f(r)\},$$
$$C_1(r) = h^2(r)\ln^2\{h(r)\mu_f(r)\}.$$

За лемою 4 $C_1(r) > C(r)$ для $r \in (r_0,1)\backslash E$. Тепер з (6) отримаємо

$$\sum_{n\geq C_1(r)}|a_n|r^n \leq \sum_{n\geq C(r)}|a_n|r^n \leq$$
$$\leq \frac{A(r)G_f(r)}{A(r)h(r)\ln^{1/2+\delta}\{h(r)\mu_f(r)\}} \leq$$
$$\leq \frac{h(r)\mu_f(r)\ln^{1/2+\delta}h(r)\ln^{1/2+\delta}\{h(r)\mu_f(r)\}}{h(r)\ln^{1/2+\delta}\{h(r)\mu_f(r)\}} =$$
$$= \mu_f(r)\ln^{1/2+\delta}h(r) \qquad (9)$$

для $r \notin E$, де E — множина скінченної h-міри.

Виберемо в лемі 2 $k(r) = h(r)\mu_f(r)$ і нехай $(r_k)_{k\geq 0}$ — послідовність, для якої виконуються висновки цієї леми. Позначимо через F_k множину тих $t \in \mathbb{R}$, для яких

$$W(r_k) = \max_{0\leq\psi\leq 2\pi}\left|\sum_{n\leq[C_1(r_k)]}a_n r_k^n e^{in\psi}e^{i\theta_n t}\right| \geq$$
$$\geq A_{\beta q}S_{[C_1(r_k)]}(r_k)\ln^{1/2}[C_1(r_k)].$$

Тепер за лемою 1 з $\beta = 1$ маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(F_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[C_1(r_k)]} \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln^2\{\mu_f(r_k)h(r_k)\}]} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2} < +\infty.$$

Тоді за лемою Бореля-Кантелі для майже всіх $t \in \mathbb{R}$ при $k \geq k_0(t)$

$$W(r_k) < A_q S_{[C_1(r_k)]}(r_k)\ln^{1/2}[C_1(r_k)]. \qquad (10)$$

Використавши нерівність (6) і $S_{[C_1(r)]}(r) \leq M_f(r)\mu_f(r)$ отримаємо з нерівності (10)

$$W(r_k) < \sqrt{\mu_f(r_k)}\sqrt{\mu_f(r_k)h(r_k)}\times$$
$$\times \ln^{1/4}\{h(r_k)\mu_f(r_k)\}\ln^{1/4+2\delta/3}h(r_k)\times$$
$$\times \ln_2^{1/2+2\delta/3}\{h(r_k)\mu_f(r_k)\}\times$$
$$\times \ln^{1/2}(h^2(r)\ln^2\{h(r)\mu_f(r)\}) \leq$$
$$\leq \mu_f(r_k)\sqrt{h(r_k)}\ln^{1/4}\{h(r_k)\mu_f(r_k)\}\times$$
$$\times \ln^{3/4+3\delta/4}h(r_k)\ln_2^{1+3\delta/4}\{h(r_k)\mu_f(r_k)\}. \quad (11)$$

Оскільки

$$M_f(r,t) \leq \sum_{n\geq C_1(r)}|a_n|r^n + W(r),$$

то з (9) і (11) одержимо

$$M_f(r_k,f)\le\mu_f(r_k)\sqrt{h(r_k)}\times$$
$$\times\ln^{1/4}\{h(r_k)\mu_f(r_k)\}\ln^{3/4+4\delta/5}h(r_k)\times$$
$$\times\ln_2^{1+4\delta/5}\{h(r_k)\mu_f(r_k)\}. \qquad (12)$$

Припустимо, що $r_{k_2(t)}\in(0,1)$ — деяке число зовні множини E. Тоді для $r\in(r_p,r_{p+1})$, $p>k_2(t)$ за лемою 2

$$\mu_f(r_{p+1})h(r_{p+1})\le$$
$$\le e\mu_f(r_p)h(r_p)\le e\mu_f(r)h(r),$$
$$\mu_f(r_{p+1})=h(r_{p+1})\frac{\mu_f(r_{p+1})}{h(r_{p+1})}\le eh(r_p)\frac{\mu_f(r_p)}{h(r_{p+1})}\le$$
$$\le eh(r)\frac{\mu_f(r)}{h(r_{p+1})}\le e\mu_f(r),$$
$$h(r_{p+1})=\frac{\mu_f(r_{p+1})h(r_{p+1})}{\mu_f(r_{p+1})}\le$$
$$\le e\frac{\mu_f(r)h(r)}{\mu_f(r_{p+1})}\le eh(r).$$

Нарешті з (12) отримаємо для $r\in(r_p,r_{p+1})$

$$M_f(r,t)\le M_f(r_{p+1},t)\le\mu_f(r)\sqrt{h(r)}\times$$
$$\times\ln^{\frac14}\{h(r)\mu_f(r)\}\ln^{\frac34+\delta}h(r)\ln_2^{1+\delta}\{h(r)\mu_f(r)\}$$

тобто, для майже всіх $t\in\mathbb{R}$ при $r\in(r_0(t),1)\backslash E$, де E — множина скінченної h-міри.

Теорему 1 доведено.

4. Категорії Бера і нерівність типу Вімана для аналітичних функцій в одиничному крузі. Нехай $h\in H$, а $\theta=(\theta_n)_{n\ge0}$ – фіксована послідовність, що задовольняє умову (4). Подібно, як і в [11], визначимо такі множини

$$F_{1h}(f,\theta,E)=\Big\{t\in\mathbb{R}\colon \varlimsup_{\substack{r\to1-0\\ r\notin E}}\Delta_h(r,f_t)\le\frac14\Big\}$$
$$F_{2h}(f,\theta)=\Big\{t\in\mathbb{R}\colon(\forall\,\eta>\frac14)$$
$$\big[h\text{-meas }(E(\eta,f_t,h))<+\infty\big]\Big\}$$
$$F_{3h}(f,\theta)=\Big\{t\in\mathbb{R}\colon \varliminf_{r\to1-0}\Delta_h(r,f_t)\le\frac14\Big\}.$$

З теореми 1 випливає, що для кожної аналітичної в $\mathbb{D}$ функції f існує така множина $E(f)$ скінченної h-міри, що множина $F_{1h}(f,\theta)$ є "великою" в сенсі міри Лебега. Це в свою чергу імплікує той же висновок і для множин $F_{2h}(f,\theta)$, $F_{3h}(f,\theta)$.

Подібно, як і в [11], природно постає питання: чи для кожної аналітичної функції f існує множина $E=E(f)$ скінченної h-міри така, що множина $F_{1h}(f,\theta,E)$ є залишковою в $\mathbb{R}$? Нагадаємо, що множина $B\subseteq\mathbb{R}$ називається залишковою в $\mathbb{R}$, якщо її доповнення $B^c=\mathbb{R}\backslash B$ є множиною першої категорії в $\mathbb{R}$. З позитивної відповіді на це питання випливало б, що множини $F_{2h}(f,\theta)$, $F_{3h}(f,\theta)$ також є залишковими множинами в $\mathbb{R}$. Проте, як і в [11] для цілої функції $f(z)=e^z$, так і для деяких аналітичних функцій, множина $F_{1h}(f,\theta,E)$ є першої категорії. Це випливає з такої теореми.

Теорема 2. *Нехай послідовність $(\theta_n)_{n\ge0}$ задовольняє умову (4), функція $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp\{n^{\varepsilon}\}z^n$, $\varepsilon\in(0,1)$ і $h(r)=(1-r)^{-1}$, $r\in(0,1)$. Тоді існує така стала $C=C(\theta,\varepsilon)>0$, що для кожної зростаючої до 1 послідовності $(r_n)_{n\ge0}$ множина*

$$F_3=\Big\{t\in\mathbb{R}\colon$$
$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{M_{f_t}(r_n)}{h(r_n)\mu_f(r_n)\ln^{1/2}\{h(r_n)\mu_f(r_n)\}}\le C\Big\}$$

є множиною першої категорії.

Щоб довести цю теорему нам буде потрібна така лема.

Лема 5. *([12]) Нехай I — інтервал з $\mathbb{R}$ і $Q(t)=\sum_{n=1}^{N}c_ne^{i\lambda_nt}$, $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\ge q$, $n\in\{1,N-1\}$. Тоді для кожного $q>1$ існують такі додатні сталі $A=A(q)$ і $B=B(q)$, що $|I|\ge\frac{B}{\lambda_1}>0$, і існує така точка $t_0\in I$, що*

$$\operatorname{Re}Q(t_0)\ge A\sum_{n=1}^{N}|c_n|.$$

Доведення теореми 2. Для функції $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp\{n^{\varepsilon}\}z^n$, $\varepsilon\in(0,1)$ (див [3]) існує $C_0(\varepsilon)\in(0,1)$ таке, що для $r\to1-0$

$$C_0^{-1}(\varepsilon)\frac{\mu_f(r)}{1-r}\ge\frac{M_f(r)}{\sqrt{\ln M_f(r)}}\ge C_0(\varepsilon)\frac{\mu_f(r)}{1-r}.$$

Тоді при $r \to 1-0$ маємо

$$\ln M_f(r) - \frac{1}{2}\ln_2 M_f(r) \geq$$
$$\geq \ln C_0(\varepsilon) + \ln\frac{\mu_f(r)}{1-r},\ \ln M_f(r) \geq \ln\frac{\mu_f(r)}{1-r},$$
$$M_f(r) \geq C_0(\varepsilon)\frac{\mu_f(r)}{1-r}\ln^{1/2}\frac{\mu_f(r)}{1-r}. \qquad (13)$$

Нехай $(r_n)_{n\geq 0}$ — деяка зростаюча до 1 послідовність. Приймемо

$$q = \inf\{\theta_{n+1}/\theta_n\colon n \geq 0\} > 1,$$

$A = A(q)$ і $B = B(q)$ — сталі з леми 6, $C(\varepsilon) = AC_0(\varepsilon)$. Розглянемо послідовність чисел $(C_n(\varepsilon))_{n\geq 0}$, яка зростає до $C(\varepsilon)$, і визначимо для фіксованих натуральних чисел $k \geq 0,\ m \geq 0$ множину

$$F_{mk} = \Big\{t \in \mathbb{R}\colon\ (\forall l \geq k)\Big[M_{f_t}(r_l) \leq$$
$$\leq C_m(\varepsilon)\frac{\mu_f(r_l)}{1-r_l}\ln^{1/2}\frac{\mu_f(r_l)}{1-r_l}\Big]\Big\}.$$

Для фіксованого $r \in (0,1)$ розглянемо функцію

$$\alpha(t,\varphi) = \Big|\sum\nolimits_{n=0}^{+\infty}\exp\{i\theta_n t + n^\varepsilon + in\varphi\}r^n\Big|,$$

яка є неперервною в $\mathbb{R}^2$ і періодичною відносно змінних t і φ. Тоді функція $\beta(t) = \max\{\alpha(t,\varphi)\colon \varphi \in [0,2\pi]\} = M_f(r,t)$ є неперервною в кожній точці $t \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що множина F_{mk} замкнена в $\mathbb{R}$.

Доведемо, що множина $F_{mk}^c = \mathbb{R}\setminus F_{mk}$ є скрізь щільною. Розглянемо довільний інтервал $I \subseteq \mathbb{R}$, $|I| > 0$, і доведемо, що він містить точку t_0 з доповнення F_{mk}^c.

Виберемо $p \geq 1, \delta > 0$ так, щоб виконувалися нерівності

$$|I| \geq \frac{B}{\theta_p},\ 1-2\delta > \sqrt{\frac{C_m(\varepsilon)}{C(\varepsilon)}}. \qquad (14)$$

Використавши (13), ми можемо визначити

$$x_1 = x_1(\varepsilon) = \inf\Big\{r \in (0,1)\colon\ \sum_{n=0}^{+\infty}\exp\{n^\varepsilon\}r^n \geq$$
$$\geq (1-2\delta)C_0(\varepsilon)\frac{\mu_f(r)}{1-r}\ln^{1/2}\frac{\mu_f(r)}{1-r}\Big\},$$
$$x_2 = x_2(\varepsilon) = \inf\Big\{r \in (0,1)\colon$$
$$\sum_{n=0}^{p}\exp\{n^\varepsilon\}r^n \leq \frac{A}{A+1}\delta\sum_{n=0}^{+\infty}\exp\{n^\varepsilon\}r^n\Big\}.$$

Тепер виберемо натуральні числа $l \geq k$ і $s > p$ так, щоб виконувалися нерівності

$$r_l > \max\{x_1, x_2\},\ \sum_{n=s+1}^{+\infty}\exp\{n^\varepsilon\}r_l^n \leq$$
$$\leq \frac{A}{A+1}\delta\sum_{n=0}^{+\infty}\exp\{n^\varepsilon\}r_l^n. \qquad (15)$$

Тоді за лемою 2 в проміжку I існує точка t_0 така, що

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=p}^{s}e^{i\theta_n t_0 + n^\varepsilon}r_l^n\right) \geq A\sum_{n=p}^{s}\exp\{n^\varepsilon\}r_l^n. \quad (16)$$

Врахувавши означення x_1, x_2 з (13)–(16), отримаємо

$$M_f(r_l,t_0) = \max\{|f_{t_0}(r_l e^{i\varphi})|\colon \varphi \in [0,2\pi]\} \geq$$
$$\geq |f_{t_0}(r_l)| \geq \mathrm{Re}\, f_{t_0}(r_l) \geq$$
$$\geq \mathrm{Re}\left(\sum_{n=p}^{s}\exp\{i\theta_n t_0 + n^\varepsilon\}r_l^n\right) -$$
$$-\sum\nolimits_{n\notin[p,s]}\exp\{n^\varepsilon\}r_l^n \geq$$
$$\geq A\sum_{n=p}^{s}\exp\{n^\varepsilon\}r_l^n - \sum\nolimits_{n\notin[p,s]}\exp\{n^\varepsilon\}r_l^n =$$
$$= A\sum_{n=0}^{+\infty}\exp\{n^\varepsilon\}r_l^n -$$
$$-(1+A)\sum\nolimits_{n\notin[p,s]}\exp\{n^\varepsilon\}r_l^n \geq$$
$$\geq A\sum\nolimits_{n=0}^{+\infty}\exp\{n^\varepsilon\}r_l^n -$$
$$-(1+A)\frac{2A}{1+A}\delta\sum\nolimits_{n=0}^{+\infty}\exp\{n^\varepsilon\}r_l^n =$$
$$= A(1-2\delta)\sum\nolimits_{n=0}^{+\infty}\exp\{n^\varepsilon\}r_l^n \geq$$
$$\geq \frac{C(\varepsilon)}{C_0(\varepsilon)}(1-2\delta)^2 C_0(\varepsilon)\frac{\mu_f(r_l)}{1-r_l}\ln^{1/2}\frac{\mu_f(r_l)}{1-r_l} \geq$$
$$\geq C_m(\varepsilon)\frac{\mu_f(r_l)}{1-r_l}\ln^{1/2}\frac{\mu_f(r_l)}{1-r_l}.$$

Отже, $t_0 \in F_{mk}^c$.

Оскільки множина F_{mk} замкнена в $\mathbb{R}$ і її доповнення F_{mk}^c — скрізь щільне, то множина F_{mk} ніде не щільна. Тоді

$$F_3 = \bigcup_{m=0}^{+\infty} \bigcup_{k=0}^{+\infty} F_{mk}$$

є множиною першої категорії. Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Якщо послідовність (θ_n) задовольняє умову (4), то для кожної аналітичної функції f множина $F_{3h}(f,\theta)$ з $h(r) = (1-r)^{-1}$ є залишковою в $\mathbb{R}$.*

Доведення. Нехай f — довільна аналітична в $\mathbb{D}$ функція. Розглянемо послідовність $(c_n)_{n\geq 0}$, таку, що $c_n \downarrow 1/4,\ n \to +\infty$.

Визначимо для $m \geq 0,\ k \geq 0$ множину

$$G_{mk} = \Big\{ t \in \mathbb{R} \colon M_f(r,t) \geq \\ \geq \frac{\mu_f(r)}{(1-r)^{2c_m}} \ln^{c_m} \frac{\mu_f(r)}{1-r},\ \forall r > 1 - \frac{1}{k+1} \Big\}.$$

Як було доведено вище, для фіксованого $r \in (0,1)$ функція $\beta(t) = M_f(r,t)$ є неперервною в кожній точці $t_0 \in \mathbb{R}$. Тоді множина G_{mk} замкнена в $\mathbb{R}$. Тепер за теоремою 1 множина G_{mk}^c є скрізь щільною. Тому G_{mk} є ніде не щільною і

$$G = \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} G_{mk}$$

є множиною першої категорії. Отже, $F_{3h}(f,\theta) = G^c$ — залишкова множина в $\mathbb{R}$.

Питання стосовно того, наскільки множина $F_{2h}(f,\theta)$ в сенсі категорій Бера є великою, є відкритим.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kövari T. *On the maximum modulus and maximum term of functions analytic in the unit disc* // J. London Math. Soc. – 1966. – V.41. – P.129–137.

2. Скасків О.Б., Куриляк А.О. *Прямі аналоги нерівності Вімана для функцій аналітичних в одиничному крузі* // Карпатські математичні публікації. – 2010. – Т.2, №1. – С.109–118.

3. Сулейманов Н.В. *Оценки типа Вимана-Валирона для степенных рядов с конечным радиусом сходимости и их точность* // ДАН СССР. – 1980. – Т.253, №4. – С.822–824.

4. Філевич П.В. *Оцінки типу Вімана-Валірона для випадкових аналітичних у крузі функцій* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. Київ: Інст. мат. – 1997. – Вип.15. – С.227–238.

5. Steele J.M. *Sharper Wiman inequality for entire functions with rapidly oscillating coefficients* // J. Math. Anal. Appl. – 1987. – V.123. – P.550–558.

6. Філевич П.В. *Деякі класи цілих функцій, в яких майже напевне можна покращити нерівність Вімана-Валірона* // Mat. Stud. – 1996. – Т.6. – С. 9–66.

7. Скасків О.Б., Зрум О.В. *Про виняткову множину у нерівності типу Вімана для цілих функцій* // Mat. Stud. – 2004. – Т.21, №1. – С.13–24.

8. Зрум О.В., Скасків О.Б. *Про нерівність Вімана для випадкових функцій від двох змінних* // Mat. Stud. – 2005. – Т.23, №2. – С.149–160.

9. Скасків О.Б., Зрум О.В. *Нерівность типу Вімана для цілих функцій від двох комплексних змінних з швидко коливними коефіцієнтами* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2005. – Т.48, №4. – С.78–87.

10. Скасків О.Б., Зрум О.В. *Уточнення нерівності Фентона для цілих функцій від двох комплексних змінних* // Матем. вісник НТШ. – 2006. – Т.3. – С.56–68.

11. Filevych P.V. *The Baire categories and Wiman's inequality for entire functions* // Mat. Stud. – 2003. – V.20, №2. – P.215–221.

12. Kahane J.-P., Weiss M., Weiss J. *On lacunary power series* // Ark. Mat. – 1963. – V.5. – P.1–26.