УДК 517.51

©2011 р. О.О. Карлова, В.В. Михайлюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ЗВ'ЯЗНА ТРИТОЧКА І ФУНКЦІЇ ПЕРШОГО КЛАСУ БЕРА

Доведено, що кожна нарізно неперервна функція, яка визначена на добутку числової прямої і довільного топологічного простору зі значеннями у зв'язній триточці, належить до першого класу Бера.

We prove that every separately continuous function, defined on a product of the real line and a topological space with values in an equiconnected space belongs to the first Baire class.

1 Вступ

У 1898 році А. Лебеґ [1] встановив, що при $X = Y = \mathbb{R}$ кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to Z$ належить до першого класу Бера. Набір топологічних просторів (X, Y, Z) з такою властивістю ми будемо називати *трійкою Лебеґа*.

Результат Лебеґа узагальнювався багатьма математиками (див. праці [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] і вказану там літературу). Зокрема, А. Каланча і В. Маслюченко [6] показали, що $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, Z)$ – це трійка Лебеґа, якщо Z – топологічний векторний простір. Т. Банах [7] встановив, що набір $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, Z)$ є трійкою Лебеґа у випадку, коли Z – рівномірно зв'язний простір. З [9, Теорема 3] випливає, що для метризовного лінійно зв'язного і локально лінійно зв'язного простору Z трійка $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, Z)$ є лебеґівською.

У зв'язку із згаданими вище результатами, В. Маслюченком було поставлене наступне питання.

Питання 1.1. *Чи існує зв'язний простір Z, такий, що $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, Z)$ не є трійкою Лебеґа?*

В даній статті ми доводимо, що $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, Z)$ є трійкою Лебеґа, якщо простір Z є зв'язною триточкою (див. означення в п.2). Крім того, ми вивчаємо деякі властивості функцій першого класу Бера зі значеннями в такому просторі Z.

2 Основні означення

Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Для функції $f : X \times Y \to Z$ і точки $(x, y) \in X \times Y$ позначимо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Функція f називається *нарізно неперервною*, якщо для всіх $(x, y) \in X \times Y$ функції $f^x : Y \to Z$ і $f_y : X \to Z$ неперервні.

Функція $f : X \to Y$ належить до *першого класу Бера*, якщо f є поточковою границею послідовності неперервних функцій $f_n : X \to Y$. Сукупність всіх функцій першого класу Бера з X в Y ми позначаємо через $B_1(X, Y)$.

Через $C(f)$ і $D(f)$ ми позначатимемо множини точок неперервності і розриву функції f відповідно.

Функція $f : X \to Y$ називається *слабко розривною*, якщо множина $D(f|_A)$ є ніде не щільною в A для будь-якої непорожньої множини $A \subseteq X$. Сукупність усіх слабко розривних функцій з X в Y ми будемо позначати через $D^w(X, Y)$.

Підмножина A топологічного простору X називається:

- *розкладною*, якщо для довільної непорожньої замкненої в X множини F множина $\overline{F \cap A} \cap \overline{F \setminus A}$ є ніде не щільною в F;
- *функціональною G_δ-множиною*, якщо $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, де U_n – функціонально відкрита множина в X для кожного $n \in \mathbb{N}$;
- *функціональною F_σ-множиною* в X, якщо $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, де F_n – функціонально замкнена множина в X для кожного $n \in \mathbb{N}$;

- *(функціонально) двосторонньою* в X, якщо A є одночасно (функціональною) G_δ- і (функціональною) F_σ-множиною в X.

Зазначимо, що згідно з теоремою Веденісова [10, Теорема 1.5.19] клас всіх множин функціонального типу F_σ $/G_\delta/$ в досконало нормальному просторі X збігається з класом усіх множин типу F_σ $/G_\delta/$.

Розглянемо на множині $T = \{0, 1, 2\}$ топологію $\mathcal{T}$, яка складається з множин $\emptyset$, T, $\{0\}$, $\{1\}$ і $\{0, 1\}$. Простір $\mathbb{T} = (T, \mathcal{T})$ ми називатимемо *зв'язною триточкою*.

3 Характеристичні функції зі значеннями в $\mathbb{T}$

Для підмножини A топологічного простору X символом χ_A ми позначаємо характеристичну функцію множини A, тобто таку функцію $\chi_A : X \to \mathbb{R}$, що $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A$, і $\chi_A(x) = 0$ при $x \in X \setminus A$. Позначимо через $\Phi(X)$ сукупність всіх функцій $f : X \to \mathbb{R}$, для яких $f(X) \subseteq \{0, 1\}$.

Твердження 3.1. *Нехай X – топологічний простір, A – підмножина простору X і $f = \chi_A$. Якщо $f \in B_1(X, \mathbb{T})$, то A є множиною типу $F_{\sigma\delta}$ і $G_{\delta\sigma}$ в X.*

Доведення. Розглянемо послідовність $(f_n)_{n=1}^\infty$ неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{T}$, яка поточково збігається до функції f на X. Оскільки $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m \geq n} f_m^{-1}(1)$, $X \setminus A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m \geq n} f_m^{-1}(0)$, а множини $\{0\}$ і $\{1\}$ відкриті в $\mathbb{T}$, то множини A і $X \setminus A$ є типу $G_{\delta\sigma}$, а значить, і $F_{\sigma\delta}$ в X. □

Твердження 3.2. *Нехай X – зліченний гаусдорфовий простір. Тоді для довільної точки $a \in X$ функція $f = \chi_{\{a\}} : X \to \mathbb{T}$ належить до першого класу Бера.*

Доведення. Нехай $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ і $a \in X$. Без обмеження загальності, можемо вважати, що $a = x_1$.

Оскільки X – гаусдорфовий простір, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ існують такі відкриті множини U_n і V_n, що $U_n \cap V_n = \emptyset$, $x_1 \in U_n$ і $x_k \in V_n$ при $2 \leq k \leq n+1$. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$ покладемо

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in V_n, \\ 1, & x \in U_n, \\ 2, & x \in X \setminus (U_n \cup V_n). \end{cases}$$

Зрозуміло, що функція $f_n : X \to \mathbb{T}$ неперервна.

Крім того, $f_n(x_k) = f(x_k)$ для всіх $n \geq k$. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для кожного $x \in X$, тобто $f \in B_1(X, \mathbb{T})$. □

Твердження 3.3. *Нехай X – топологічний простір. Тоді*

$$\Phi(X) \cap B_1(X, \mathbb{R}) \subseteq B_1(X, \mathbb{T}).$$

Доведення. Нехай $f \in \Phi(X) \cap B_1(X, \mathbb{R})$. Тоді $f = \chi_A$ для деякої множини $A \subseteq X$. Позначимо $B = X \setminus A$.

Виберемо таку послідовність неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для кожного $x \in X$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $A_n = f_n^{-1}((\frac{1}{2}, 2))$ і $B_n = f_n^{-1}((-1, \frac{1}{2}))$. Оскільки функція f_n неперервна, то множини A_n і B_n відкриті в X для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Для кожного $x \in X$ і $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in A_n, \\ 1, & x \in B_n, \\ 2, & x \in X \setminus (A_n \cup B_n). \end{cases}$$

Зрозуміло, що функція $g_n : X \to \mathbb{T}$ неперервна для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ для всіх $x \in X$. Справді, нехай $x \in X$. Якщо $x \in A$, то існує таке N, що $x \in A_n$ для всіх $n \geq N$. Тоді $g_n(x) = f(x) = 1$ для всіх $n \geq N$. Якщо ж $x \in B$, то існує таке M, що $x \in B_n$ для всіх $n \geq M$. Тоді $g_n(x) = f(x) = 0$ для всіх $n \geq M$. Таким чином, $f \in B_1(X, \mathbb{T})$. □

Наступний приклад показує, що обернене твердження, взагалі кажучи, невірне.

Приклад 3.4. *Нехай*

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : y \geq 0\}.$$

Для всіх $p=(x,y)\in X$ і $n\in\mathbb{N}$ покладемо

$$U_n(p)=\{p\}\cup\{(q,0):|q-(x-\frac{y}{\sqrt{3}})|<\frac{1}{n}\}\cup$$

$$\cup\{(q,0):|q-(x+\frac{y}{\sqrt{3}})|<\frac{1}{n}\}.$$

Сім'я $(U_n(p):n\in\mathbb{N},p\in X)$ утворює деяку гаусдорфову топологію на X, з якою простір X буде зв'язним (див. [10, с. 518]).

Візьмемо довільну точку $a\in X$ і розглянемо функцію $f=\chi_{\{a\}}$. Тоді

$$f\in B_1(X,\mathbb{T})\setminus B_1(X,\mathbb{R}).$$

Доведення. Включення $f\in B_1(X,\mathbb{T})$ випливає з твердження 3.2.

З іншого боку, для довільної неперервної функції $g:X\to\mathbb{R}$ множина $g(X)$ є не більше, ніж зліченною зв'язною множиною. Тому $|g(X)|=1$, тобто кожна неперервна функція $g:X\to\mathbb{R}$ є сталою. Тоді кожна функція першого класу Бера з X в $\mathbb{R}$ є сталою. Тому $f\notin B_1(X,\mathbb{R})$. □

Твердження 3.5. *Нехай X – топологічний простір, $y_1,\dots,y_k$ – різні точки з $\mathbb{R}$ і $f:X\to\{y_1,\dots,y_k\}$, $f\in B_1(X,\mathbb{R})$. Тоді множина $f^{-1}(y_i)$ є функціонально двосторонньою в X для кожного $1\le i\le k$.*

Доведення. Розглянемо послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $f_n:X\to\mathbb{R}$, таку, що $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ для кожного $x\in X$. Зафіксуємо $i\le k$ і покладемо

$$A_m=\bigcup_{n\ge m}f_n^{-1}((y_i-\frac{1}{m},y_i+\frac{1}{m}))$$

для кожного $m\in\mathbb{N}$.

Покажемо, що $f^{-1}(y_i)=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}A_m$ для всіх $1\le i\le k$. Справді, нехай $x\in f^{-1}(y_i)$ і $m\in\mathbb{N}$. Тоді, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=y_i$, то існує таке $n\ge m$, що $|f_n(x)-y_i|<\frac{1}{m}$. З іншого боку, нехай $x\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}A_m$. Тоді існує така послідовність номерів $n_m\ge m$, що $|f_{n_m}(x)-y_i|<\frac{1}{m}$. Перейшовши до границі при $m\to\infty$, ми одержимо, що $f(x)=y_i$.

Оскільки для кожного $n\in\mathbb{N}$ функція $f_n:X\to\mathbb{R}$ неперервна, то множина A_m є функціонально відкритою в X. Тому $f^{-1}(y_i)$ є множиною функціонального типу G_δ в X. Крім того, $X=\bigsqcup\limits_{i=1}^{k}f^{-1}(y_i)$, звідки випливає, що $f^{-1}(y_i)$ є функціонально двосторонньою множиною для кожного $1\le i\le k$. □

Твердження 3.6. *Нехай A – підмножина топологічного простору X і $f=\chi_A$. Тоді $f\in B_1(X,\mathbb{R})$ в тому і тільки тому випадку, коли множина A є функціонально двосторонньою.*

Доведення. Необхідність. Випливає з твердження 3.5.

Достатність. Нехай

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \text{ і } X\setminus A=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n,$$

де $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ – зростаючі послідовності функціонально замкнених підмножин простору X. Розглянемо послідовність неперервних функцій $f_n:X\to\mathbb{R}$, таку, що $A_n=f_n^{-1}(1)$ і $B_n=f_n^{-1}(0)$ для кожного $n\in\mathbb{N}$. Легко бачити, що $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ для всіх $x\in X$. □

Твердження 3.7. *Нехай X – топологічний простір, $f\in B_1(X,\mathbb{R})$ – така функція, що $f(X)\subseteq\{0,1,2\}$. Тоді $f\in B_1(X,\mathbb{T})$.*

Доведення. Для $i=0,1,2$ позначимо

$$X_i=f^{-1}(i).$$

З твердження 3.5 випливає, що X_i є функціонально двосторонньою множиною в X при $i=0,1,2$. Тоді згідно з твердженням 3.6 $g=\chi_{X_1\cup X_2}\in B_1(X,\mathbb{R})\cap\Phi(X)$. Застосувавши твердження 3.3, виберемо послідовність неперервних функцій $f_n:X\to\mathbb{T}$, яка поточково на X збігається до g. Легко бачити, що послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ збігається також і до функції f. Отже, $f\in B_1(X,\mathbb{T})$. □

Твердження 3.8. *Нехай X – такий топологічний простір, що $\chi_{\{a\}}\in B_1(X,\mathbb{T})$ для довільної точки $a\in X$. Тоді простір X гаусдорфовий.*

Доведення. Зафіксуємо різні точки $x_0, x_1 \in X$. Для функції $f = \chi_{\{x_1\}}$ існує послідовність неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{T}$, яка поточково збігається до функції f, зокрема, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_i) = i$ при $i = 0, 1$. Виберемо номер n так, щоб $f_n(x_i) = i$. Тоді відкриті множини $U_0 = f_n^{-1}(0)$ і $U_1 = f_n^{-1}(1)$ є відкритими околами точок x_0 і x_1, які не перетинаються. □

4 Функції першого класу на берівських просторах

Твердження 4.1. *Нехай X – берівський простір, $A \subseteq X$ і $f = \chi_A \in B_1(X, \mathbb{T})$. Тоді множина $D(f)$ є ніде не щільною в X.*

Доведення. Припустимо, що множина $D(f) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ є щільною в деякій відкритій непорожній множині $G \subseteq X$. Оскільки G – берівський простір, то хоча б одна з множин $G_1 = G \cap A$ чи $G_2 = G \setminus A$ є множиною другої категорії в G, а значить, і в X. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що множина G_1 є другої категорії в X.

Розглянемо послідовність неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{T}$, таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для кожного $x \in X$. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$A_n = \{x \in G_1 : \forall m \geq n \;\; f_m(x) = 1\}.$$

Тоді $G_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Оскільки G_1 є множиною другої категорії, а послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ зростаюча, то існує такий номер n, що для всіх $m \geq n$ множина A_m є щільною в деякій відкритій в X непорожній множині $U \subseteq G$. З неперервності функції f_n випливає, що існує така відкрита множина $V \subseteq X$, що $f_n(x) = 1$ для всіх $x \in V$. Тоді множина V щільна в U, адже $V \supseteq A_n$. Оскільки $\mathrm{int}(U \setminus V) = \emptyset$, то $f_n(x) \neq 0$ для всіх $x \in U$. Аналогічно, $f_m(x) \neq 0$ для всіх $x \in U$ і $m \geq n$, звідки випливає, що $f|_U = 1$, тобто $U \cap G_2 = \emptyset$. З іншого боку, множина G_2 щільна в G, звідки отримується суперечність. □

Твердження 4.2. *Нехай X – топологічний простір і $E \subseteq X$. Характеристична функція $\chi = \chi_E : X \to \mathbb{R}$ множини E є слабко розривною тоді і тільки тоді, коли множина E розкладна.*

Доведення. Необхідність. Нехай $F \neq \emptyset$ – довільна замкнена множина в X. Тоді $D(\chi|_F) = \overline{F \cap E} \cap \overline{F \setminus E}$. Оскільки $D(\chi|_F)$ ніде не щільна в F, то множина E розкладна.

Достатність. Нехай A – довільна непорожня підмножина простору X і $F = \overline{A}$. Тоді $D(\chi|_A) = \overline{A \cap E} \cap \overline{A \setminus E} \cap A$. Оскільки $D(\chi|_A) \subseteq \overline{F \cap E} \cap \overline{F \setminus E}$, то множина $D(\chi|_A)$ ніде не щільна в F. Врахувавши, що множина A щільна в F, ми одержимо, що множина $D(\chi|_A)$ ніде не щільна в A. □

Теорема 4.3. *Нехай X – спадково берівський простір. Тоді*

$$\Phi(X) \cap B_1(X, \mathbb{T}) \subseteq D^w(X, \mathbb{R}).$$

Доведення. Візьмемо таку непорожню множину $E \subseteq X$, що її характеристична функція $f = \chi_E$ належить до класу $B_1(X, \mathbb{T})$. Згідно з твердженням 4.2 достатньо показати, що множина E розкладна.

Нехай $F \neq \emptyset$ – довільна замкнена підмножина в X. Оскільки F – берівський простір і $f|_F \in B_1(F, \mathbb{T})$, то за твердженням 4.1 множина $D(f|_F) = \overline{F \cap E} \cap \overline{F \setminus E}$ є ніде не щільною в F. Таким чином, множина E розкладна. □

Наприкінці цього пункту ми наведемо приклад, який показує, що обернені твердження до тверджень 3.1 і 4.3, взагалі кажучи, не вірні.

Приклад 4.4. *Існують досконалий спадково берівський T_1-простір X і розкладна двостороння множина $A \subseteq X$, такі, що $\chi_A \notin B_1(X, \mathbb{T})$.*

Доведення. Розглянемо множину

$$X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

з топологією $\mathcal{T}$, в якій базу околів точки $x \in \mathbb{R}$ утворюють множини вигляду

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon), \; \varepsilon > 0,$$

а базу околів точки ∞ – множини вигляду

$$\{\infty\} \cup (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon),\ \varepsilon > 0.$$

Тоді $(X, \mathcal{T})$ є досконалим спадково берівським T_1-простором, який не є гаусдорфовим.

За твердженням 3.8 існує точка $a \in X$ (наприклад, $a = 0$), така, що $\chi_A \notin B_1(X, \mathbb{T})$, де $A = \{a\}$. Неважко переконатися, що множина A розкладна в X. Крім того, оскільки простір X досконалий, то множина A є двосторонньою в X. □

Твердження 4.5. *Нехай X – досконалий простір першої категорії зі зліченною псевдобазою. Тоді простір X можна подати у вигляді $X = A \sqcup B$, де A і B – щільні в X двосторонні множини.*

Доведення. Нехай $(V_n : n \in \mathbb{N})$ – псевдобаза в X і $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, де X_n – замкнена ніде не щільна підмножина простору X для кожного $n \geq 1$. Покладемо $E_1 = X_1$ і $E_n = X_n \setminus \bigcup\limits_{k<n} X_k$ при $n \geq 2$. Тоді E_n є ніде не щільною двосторонньою множиною в X для кожного $n \geq 1$ і $X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Нехай $m_0 = 0$. Виберемо такий номер $n_1 \geq 1$, що $(\bigsqcup\limits_{n=1}^{n_1} E_n) \cap V_1 \neq \emptyset$ і покладемо $A_1 = \bigsqcup\limits_{n=1}^{n_1} E_n$. Оскільки $\overline{X \setminus A_1} = X$, то існує такий номер $m_1 > n_1$, що $(\bigsqcup\limits_{n=n_1+1}^{m_1} E_n) \cap V_1 \neq \emptyset$. Покладемо $B_1 = \bigsqcup\limits_{n=n_1+1}^{m_1} E_n$. З того, що $\overline{X \setminus (A_1 \cup B_1)} = X$ випливає, що існує такий номер $n_2 > m_1$, що $(\bigsqcup\limits_{n=m_1+1}^{n_2} E_n) \cap V_2 \neq \emptyset$. Далі, існує таке $m_2 > n_2$, що $(\bigsqcup\limits_{n=n_2+1}^{m_2} E_n) \cap V_2 \neq \emptyset$. Покладемо $A_2 = \bigsqcup\limits_{n=m_1+1}^{n_2} E_n$ і $B_2 = \bigsqcup\limits_{n=n_2+1}^{m_2} E_n$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми одержимо послідовність чисел

$$m_0 < n_1 < m_1 < \cdots < n_k < m_k < n_{k+1} < \ldots$$

і множин

$$A_k = \bigsqcup_{n=m_{k-1}+1}^{n_k} E_n, \quad B_k = \bigsqcup_{n=n_k+1}^{m_k} E_n, \quad k \geq 1,$$

таких, що $A_k \cap V_k \neq \emptyset$ і $B_k \cap V_k \neq \emptyset$ для кожного $k \geq 1$.

Покладемо $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ і $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Зрозуміло, що $X = A \sqcup B$ і $\overline{A} = \overline{B} = X$. Крім того, A і B є множинами типу F_σ в X, а оскільки кожна з цих множин є доповненням до іншої, то A і B двосторонні в X. □

Теорема 4.6. *Нехай X – метризовний сепарабельний простір, такий, що*

$$\Phi(X) \cap B_1(X, \mathbb{T}) \subseteq D^w(X, \mathbb{R}).$$

Тоді X – спадково берівський.

Доведення. Міркуючи від супротивного, припустимо, що простір X не є спадково берівським. Тоді в ньому існує замкнена непорожня множина F першої категорії. Зауважимо, що простір F досконалий і має зліченну псевдобазу. Тому за твердженням 4.5 існують такі щільні двосторонні в F множини A і B, що $F = A \sqcup B$. Оскільки множина F є типу G_δ в X, то згідно з [11, с. 359] існує така двостороння множина E в X, що $A = E \cap F$. Покладемо $f = \chi_E$. Оскільки множина E є функціонально двосторонньою в X, то за твердженням 3.6 $f \in \Phi(X) \cap B_1(X, \mathbb{R})$, звідки, застосувавши твердження 3.3, ми одержимо, що $f \in B_1(X, \mathbb{T})$. Але $D(f|_F) = F$, тобто $f \notin D^w(X, \mathbb{R})$, суперечність. Отже, наше припущення невірне, і X є спадково берівським. □

5 Рівномірна зв'язність простору $\mathbb{T}$

Топологічний простір X називається *рівномірно зв'язним*, якщо існує така неперервна функція $\lambda : X \times X \times [0, 1] \to X$, що

1. $\lambda(x, y, 0) = x$,
2. $\lambda(x, y, 1) = y$,
3. $\lambda(x, x, t) = x$

для всіх $x, y \in X$ і $t \in [0, 1]$.

Зауважимо, що довільна опукла підмножина A топологічного векторного простору X є рівномірно зв'язною. При цьому функція $\lambda : A \times A \times [0, 1] \to A$ означається наступним чином: $\lambda(x, y, t) = x + t(y - x)$ для всіх $x, y \in A$ і $t \in [0, 1]$.

Теорема 5.1. *Простір $\mathbb{T}$ є рівномірно зв'язним.*

Доведення. Для всіх $(x, y, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times [0, 1]$ покладемо

$$\lambda(x,y,t) = \begin{cases} x, & 0 \le t < \frac{1}{2}, \\ y, & \frac{1}{2} < t \le 1, \\ 2, & t = \frac{1}{2}, (x,y) \notin \{(0,0)\} \cup \{(1,1)\}, \\ x, & t = \frac{1}{2}, (x,y) \in \{(0,0)\} \cup \{(1,1)\}. \end{cases}$$

Легко бачити, що функція λ задовольняє умови (1) – (3).

Перевіримо неперервність функції λ. Покажемо спочатку, що $\lambda_1 = \lambda|_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}\times[0,\frac{1}{2}]}$ є неперервною функцією. Справді, при $i = 0, 1$ множина

$$\lambda^{-1}(i) = (\{i\} \times \mathbb{T} \times [0, \frac{1}{2})) \cup (\{i\} \times \{i\} \times [0, \frac{1}{2}])$$

є відкритою в $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \times [0, \frac{1}{2}]$. Аналогічно можна встановити, що функція $\lambda_2 = \lambda|_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}\times[\frac{1}{2},1]}$ неперервна, звідки випливає неперервність і самої функції λ. $\square$

Зі згаданого у вступі результату з [7] і теореми 5.1 негайно випливає наступний наслідок.

Теорема 5.2. *Нехай Y – топологічний простір. Тоді $(\mathbb{R}, Y, \mathbb{T})$ є трійкою Лебеґа.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Lebesgue, H. Sur l'approximation des fonctions // Bull. Sci. Math. – 1898. – **22**. – P. 278 - 287.
2. Moran, W. Separate continuity and supports of measures // J. London Math. Soc. – 1969. – **44**. – P. 320 - 324.
3. Vera, G. Baire mesurability of separately continuous functions // Quart. J. Math. Oxford (2). – 1988. – **39**. – P. 109 - 116.
4. Rudin, W. Lebesgue first theorem // Math. Analysis and Applications, Part B. Edited by Nachbin. Adv. in Math. Supplem. Studies 78. – Academic Press, 1981. – P. 741 - 747.
5. Маслюченко В.К., Собчук О.В. Берівська класифікація і σ-метризовні простори // Мат. студії. – 1994. – **3**. – С. 95 - 101.
6. Каланча А.К., Маслюченко В.К. Розмірність Лебеґа-Чеха та берівська класифікація векторнозначних нарізно неперервних відображень // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, №11. – С. 1596 - 1599.
7. Banakh T.O. (Metrically) quarter-stratifiable spaces and their applications // Мат. студії. – **18**, №1. – С. 10 - 28. – 2002.
8. Карлова О.О., Маслюченко В.К. Нарізно неперервні відображення зі значеннями в не локально опуклих просторах // Укр. мат. журн. – 2007. – т. 59, №12. – С.1639 - 1646.
9. Карлова О.О. Нарізно неперервні σ-дискретні відображення // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 314 - 315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С.77- 79.
10. R. Engelking, General Topology. Revised and completed edition. Heldermann Verlag, Berlin (1989).
11. Куратовский К. Топология. – Т.1. – Москва: Мир, 1966. – 596 с.