УДК 519.1

©2011 р. Р.А. Заторський

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ

ПАРАФУНКЦІЇ МАТРИЦЬ ПОХИЛОЇ СТРУКТУРИ ТА МНОГОЧЛЕНИ РОЗБИТТІВ

Розглядаються парафункції трикутних матриць похилої структури, встановлюються деякі комбінаторні тотожності і рекурентні співвідношення для многочленів розбиттів.

Parafunctions of three-cornered matrices of sloping structure are considered, some combinatorics equalities and recurrent correlations for the polynomials of partitions are proved.

1. Парадетермінанти і параперманенти трикутних матриць [1] знаходять застосування в алгебрі [2], комбінаторному аналізі [3], теорії чисел [4] та інших областях математики.

В роботі досліджується клас функцій трикутних матриць, пов'язаний з многочленами розбиттів, запроваджених Беллом [5]. При цьому встановлюються деякі загальні тотожності між парадетермінантами та параперманентами трикутних матриць похилої структури і многочленами розбиттів. Подання многочленів розбиттів у вигляді парафункцій трикутних матриць дозволяє встановити рекурентні співвідношення, яким вони задовольняють і побудувати ефективні алгоритми знаходження їх значень.

Наведемо основні відомості з теорії парадетермінантів, необхідні для подальшого викладу.

Нехай задано деяке числове поле K.

Означення 1. *Трикутну таблицю чисел, що належать полю K*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \qquad (1)$$

назвемо трикутною матрицею, а число n — її порядком.

Кожному елементу a_{ij} матриці (1) поставимо у відповідність $(i-j+1)$ елементів a_{ik}, $k=j,\ldots,i$, які назвемо *похідними елементами* матриці, породженими *ключовим елементом* a_{ij}.

Добуток всіх похідних елементів породжених елементом a_{ij} позначимо через $\{a_{ij}\}$ і назвемо *факторіальним добутком ключового елемента* a_{ij}, тобто

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}.$$

Означення 2. *Набір ключових елементів матриці (1) назвемо нормальним набором цієї матриці, якщо вони породжують монотрансверсаль, тобто множину похідних елементів потужності n, кожні два з яких не лежать в одному стовпці цієї матриці.*

Нехай $\mathbb{P}(n)$ — множина всіх впорядкованих розбиттів (композицій) (див. [6], с. 67) натурального числа n на натуральні доданки. Відомо, що

$$|\mathbb{P}(n)| = \sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} = 2^{n-1}. \qquad (2)$$

Між нормальними наборами ключових елементів матриці (1) і впорядкованими розбиттями натурального числа n існує бієкція:

$$(n_1, n_2, \ldots, n_r) \in \mathbb{P}(n) \Leftrightarrow$$

$$(a_{N_1,N_0+1}, a_{N_2,N_1+1}, \ldots, a_{N_r,N_{r-1}}),$$

де $N_0 = 0,\ N_s = \sum_{i=1}^{s} n_i,\ s = 1,2,\ldots,r.$

Кожному нормальному набору a ключових елементів поставимо у відповідність знак $(-1)^{\varepsilon(a)}$, де $\varepsilon(a)$ — сума всіх індексів ключових елементів цього набору.

Означення 3. *Парадетермінантом і параперманентом трикутної матриці (1) назвемо відповідно числа:*

$$ddet(A) = \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in\mathbb{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i(s),j(s)}\},$$

$$pper(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in\mathbb{P}(n)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i(s),j(s)}\},$$

де $a_{i(s),j(s)}$ — ключовий елемент відповідний s-тій компоненті розбиття $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, а символ $\varepsilon(a)$ — знак нормального набору a ключових елементів.

Згідно з (2) парадетермінант і параперманент n-того порядку складаються із 2^{n-1} доданків.

Приклад 1. *Парадетермінант матриці третього порядку дорівнює:*

$$\left\langle \begin{matrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\rangle = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{22}a_{33} -$$

$$a_{11}a_{32}a_{33} + a_{31}a_{32}a_{33}.$$

Кожному елементу a_{ij} трикутної матриці (1) поставимо у відповідність трикутну таблицю елементів цієї матриці з цим елементом в лівому нижньому куті, яку назвемо *рогом цієї матриці* і позначимо через R_{ij}. Очевидно, що ріг R_{ij} є трикутною матрицею $(i - j + 1)$-го порядку, причому йому належать лише ті елементи a_{rs} матриці (1), індекси яких задовольняють співвідношення $j \le s \le r \le i$.

Нижче будемо вважати, що

$$ddet(R_{01}) = pper(R_{01}) =$$
$$ddet(R_{n,n+1}) = pper(R_{n,n+1}) = 1.$$

Означення 4. *Прямокутну таблицю елементів трикутної матриці (1) назвемо вписаною в цю матрицю, якщо одна її вершина співпадає з елементом a_{n1}, а протилежна до неї — з елементом $a_{ii}, i = 1, 2, \ldots, n$. Позначимо цю таблицю через $T(i)$.*

Зауваження 1. *Якщо в означенні 4 значення індекса i дорівнює 1 або $i = n$, то прямокутна таблиця вироджується відповідно у перший стовпець або останній рядок.*

При обчисленні парадетермінанта і параперманента зручно користуватися *алгебраїчними доповненнями.*

Означення 5. *Алгебраїчними доповненнями D_{ij}, P_{ij} до факторіального добутку $\{a_{ij}\}$ ключового елемента a_{ij} трикутної матриці (1), назвемо відповідно числа*

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot ddet(R_{j-1,1}) \cdot ddet(R_{n,i+1}),$$

$$P_{ij} = pper(R_{j-1,1}) \cdot pper(R_{n,i+1}),$$

де $R_{j-1,1}$ і $R_{n,i+1}$ — роги цієї матриці.

В численні трикутних матриць важливу роль відіграє наступна

Теорема 1. *[1]. Нехай A — трикутна матриця (1), а $T(i)$ — деяка вписана в неї прямокутна таблиця елементів. Тоді справедлива рівність:*

$$ddet(A) = \sum_{s=1}^{i} \sum_{r=i}^{n} \{a_{rs}\} D_{rs}, \tag{3}$$

$$pper(A) = \sum_{s=1}^{i} \sum_{r=i}^{n} \{a_{rs}\} P_{rs}, \tag{4}$$

де D_{rs} і P_{rs} — відповідно алгебраїчне доповнення до факторіального добутку ключового елемента a_{rs}, який належить таблиці $T(i)$.

Якщо $i = 1$, то теорема 1 дає розклад парафункцій за елементами першого стовпця трикутної матриці і рівності (3), (4) отримують вигляд

$$ddet(A) = \sum_{r=1}^{n} \{a_{r1}\} D_{r1} =$$

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\{a_{r1}\}\cdot ddet(R_{n,r+1}),$$

$$pper(A)=\sum_{r=1}^{n}\{a_{r1}\}P_{r1}=$$

$$\sum_{r=1}^{n}\{a_{r1}\}\cdot pper(R_{n,r+1}).$$

Якщо ж $i=n$, то отримаємо розклад парафункцій за елементами останнього рядка:

$$ddet(A)=\sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}D_{ns}=$$

$$\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\{a_{ns}\}\cdot ddet(R_{s-1,1}),$$

$$pper(A)=\sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}P_{ns}=$$

$$\sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}\cdot pper(R_{s-1,1}).$$

Теорема 2. *Нехай*

$$ddet\,(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=D(n),$$

$$pper\,(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=P(n),$$

тоді справедливі рекурентні співвідношення

$$D(n)=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}D(s-1)\prod_{k=s}^{n}a_{nk},$$

$$P(n)=\sum_{s=1}^{n}P(s-1)\prod_{k=s}^{n}a_{nk},$$

де $ddet\,(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ *і* $pper\,(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ *— відповідно парадетермінант і параперманент трикутної матриці, причому ми вважаємо, що*

$$D(0)=P(0)=1.$$

Теорема 3. *Для довільної трикутної матриці справедливі рівності:*

$$\left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right\rangle_n=$$

$$\left\langle\begin{matrix} (a_{11}-a_{21})\cdot a_{22} & & & \\ (a_{11}-a_{31})\cdot a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ (a_{11}-a_{n1})\cdot a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right\rangle_{n-1},$$

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right]_n=$$

$$\left[\begin{matrix} (a_{11}+a_{21})\cdot a_{22} & & & \\ (a_{11}+a_{31})\cdot a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ (a_{11}+a_{n1})\cdot a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right]_{n-1}.$$

Більш детальну інформацію про поняття парадетермінанта і параперманента можна знайти у [1].

2.

Означення 6. *Трикутні матриці виду*

$$\left(\begin{matrix} \tau_{11}x_1 & & & & \\ \tau_{21}x_2 & \tau_{22}x_1 & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}x_{n-1} & \tau_{n-1,2}x_{n-2} & \dots & \tau_{n-1,n-1}x_1 & \\ \tau_{n,1}x_n & \tau_{n,2}x_{n-1} & \dots & \tau_{n,n-1}x_2 & \tau_{n,n}x_1\end{matrix}\right),$$

де τ_{ij}, $1\leqslant j\leqslant i\leqslant n$ *— належать деякому числовому полю* K, *а* x_i, $i=1,2,\dots,n$ *— деякі змінні величини, назвемо похилими трикутними матрицями.*

Теорема 4. *Нехай*

$$Z_m(x_1,x_2,\dots,x_n)=$$

$$\left(\begin{matrix} x_1 & & & & & & \\ \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & & & \\ \dots & \dots & \ddots & & & & \\ \frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \dots & x_1 & & & \\ 0 & \frac{x_n}{x_{n-1}} & \dots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{x_n}{x_{n-1}} & \dots & \frac{x_2}{x_1} & x_1\end{matrix}\right)_m,$$

де $n\leqslant m$, *тоді справедливі тотожності:*

$$pper(Z_m(x_1,\dots,x_n))=$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=m}\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, \tag{5}$$

$$\operatorname{ddet}(Z_m(x_1,\ldots,x_n)) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=m}(-1)^{m-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\times x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, \qquad (6)$$

де $\lambda_i,\ i=1,2,\ldots,n$ *— цілі невід'ємні числа.*

Доведення. Доведемо тотожність (5). Звернемо увагу на те, що

$$Z_m(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant m},$$

де

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}, & \text{если } i-j<n, \\ 0, & \text{если } n\leqslant i-j,\ x_0=1. \end{cases}$$

Позаяк ключовому елементу a_{ij} цієї матриці відповідає факторіальний добуток

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik} = \begin{cases} x_{i-j+1}, & \text{если } i-j<n, \\ 0, & \text{если } n\leqslant i-j, \end{cases}$$

то компоненті α_i впорядкованого розбиття $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=m$, відповідає факторіальний добуток, який дорівнює x_{α_i}, а всьому впорядкованому розбиттю $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ – вектор $(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_n})$. Всім таким впорядкованим розбиттям, елементи яких утворюють мультимножину із первинною специфікацією

$$[1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}]$$

в парапермaненті відповідає доданок виду

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Полічимо число таких доданків у параперманенті. Позаяк число ненульових елементів впорядкованого розбиття дорівнює $\lambda_1+\ldots+\lambda_n$, то число всіх впорядкувань мультимножини з цією первинною специфікацією, згідно із поліноміальною теоремою, дорівнює

$$\frac{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}.$$

Для доведення тотожності (6) достатньо знайти знак нормального набору ключових елементів, відповідного впорядкованому розбиттю первинної специфікації

$$[1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}].$$

Очевидно, що знак $(-1)^{\varepsilon}$ нормального набору ключових елементів залежить лише від тих ключових елементів, які відповідають парним компонентам впорядкованого розбиття. Тому при $n=2k$ маємо:

$$\varepsilon\equiv(\lambda_2+\lambda_4+\ldots+\lambda_{2k})+2n\equiv$$
$$(\lambda_1+3\lambda_2+3\lambda_3+5\lambda_4+5\lambda_5+\ldots+$$
$$+(2k-1)\lambda_{2k-1}+(2k+1)\lambda_{2k})+n\equiv$$
$$\equiv n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)(mod 2).$$

При $n=2k+1$ справедливі аналогічні конгруенції. □

Відзначимо, що при $m=n$ теорема 4 переходить у твердження 3.2 [7].

Нехай

$$pper(Z_m(x_1,\ldots,x_n)) = \square_{n,m},$$
$$ddet(Z_m(x_1,\ldots,x_n)) = \lozenge_{n,m},$$

тоді розкладаючи параперманент і парадетермінант трикутної матриці $Z_m(x_1,\ldots,x_n)$ за елементами останнього рядка, отримаємо відповідно рекурентні співвідношення:

$$\square_{n,m} = x_1\square_{n,m-1}+x_2\square_{n,m-2}+\ldots+x_n\square_{n,m-n},$$
$$\square_{n,0}=1,$$
$$\lozenge_{n,m} = x_1\lozenge_{n,m-1}-x_2\lozenge_{n,m-2}+\ldots+$$
$$(-1)^{n-1}x_n\lozenge_{n,m-n},\ \lozenge_{n,0}=1.$$

Ці рекурентні співвідношення дають можливість побудувати рекурсивний алгоритм знаходження значення многочленів розбиття. Інший алгоритм знаходження значень многочленів розбиття можна побудувати на основі теореми 3, згідно з якою значення парафункції трикутної матриці порядку n можна отримати виконуючи $\frac{n(n-1)}{2}$ операцій множення і стільки ж операцій додавання.

Твердження 1. *Справедливі тотожності:*

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & & & \\ a_2 & a_1 & & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & & \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & & & \\ 0 & a_n & \ldots & a_2 & a_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 \end{bmatrix}_m =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=m}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}a_1^k a_2^{k-\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n},$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$.

$$\left\langle\begin{matrix} a_1 & & & & & & \\ a_2 & a_1 & & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & & \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & & & \\ 0 & a_n & \ldots & a_2 & a_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 \end{matrix}\right\rangle_m = \tag{7}$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=m}(-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}a_1^k a_2^{k-\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n},$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$.

Доведення. Якщо у тотожностях (5), (6) замість $\frac{x_i}{x_{i-1}}$ покласти a_i, то параперманент і парадетермінант трикутної матриці

$$Z_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

заміняться відповідно на параперманент та парадетермінант матриці

$$Z_m(a_1,a_1a_2,\ldots,a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n).$$

□

Покладемо у тотожності (7) замість $a_i,\ i=1,2,\ldots,n$ відповідно

$$\frac{a+(i-1)r}{b+(i-1)s}\cdot\frac{x_i}{x_{i-1}},\ x_0=1,$$

тоді матриця

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & & & & \\ a_2 & a_1 & & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & & \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & & & \\ 0 & a_n & \ldots & a_2 & a_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 \end{pmatrix}_m \tag{8}$$

матиме вигляд

$$F^+=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{b}x_1 & & & & & & \\ \frac{a+r}{b+s}\frac{x_2}{x_1} & \frac{a}{b}x_1 & & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\ \frac{a+(n-1)r}{b+(n-1)s}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{a+(n-2)r}{b+(n-2)s}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{a}{b}x_1 & & & \\ 0 & \frac{a+(n-1)r}{b+(n-1)s}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{a+r}{b+s}\frac{x_2}{x_1} & \ldots & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{a}{b}x_1 & \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{a+r}{b+s}\frac{x_2}{x_1} & \frac{a}{b}x_1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

а права частина тотожності (7) — вигляд виразу

$$\sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m}(-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a}{b}x_1\right)^k\left(\frac{(a+r)x_2}{(b+s)x_1}\right)^{k-\lambda_1}\times$$

$$\ldots\times\left(\frac{a+(n-1)r}{b+(n-1)s}\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^{\lambda_n}=$$

$$\sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m}(-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a^{\overline{1}(r)}}{b^{\overline{1}(s)}}\right)^{\lambda_1}\times$$

$$\ldots\times\left(\frac{a^{\overline{n}(r)}}{b^{\overline{n}(s)}}\right)^{\lambda_n}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$, а

$$a^{\overline{i}(r)}=a(a+r)(a+2r)\cdot\ldots\cdot(a+(n-1)r)$$

— зростаючий факторіальний степінь з кроком r.

Аналогічно можна отримати тотожність

$$pper(F^+)=\sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a^{\overline{1}(r)}}{b^{\overline{1}(s)}}\right)^{\lambda_1}\times$$

$$\ldots\times\left(\frac{a^{\overline{n}(r)}}{b^{\overline{n}(s)}}\right)^{\lambda_n}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Якщо ж у тотожності (7) замість $a_i,\ i=1,2,\ldots,n$ покласти

$$\frac{a-(i-1)r}{b-(i-1)s}\cdot\frac{x_i}{x_{i-1}},\ x_0=1,$$

то матриця (8) матиме вигляд

$$F^-=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{b}x_1 & & & & & \\ \frac{a-r}{b-s}\frac{x_2}{x_1} & \frac{a}{b}x_1 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ \frac{a-(n-1)r}{b-(n-1)s}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{a-(n-2)r}{b-(n-2)s}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \dots & \frac{a}{b}x_1 & & \\ 0 & \frac{a-(n-1)r}{b-(n-1)s}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \dots & \frac{a-r}{b-s}\frac{x_2}{x_1} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{a}{b}x_1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \frac{a-r}{b-s}\frac{x_2}{x_1} & \frac{a}{b}x_1 \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

причому

$$ddet(F^-) =$$

$$\sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m}(-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a}{b}x_1\right)^k\left(\frac{(a-r)x_2}{(b-s)x_1}\right)^{k-\lambda_1}\times$$

$$\ldots\times\left(\frac{a-(n-1)r}{b-(n-1)s}\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^{\lambda_n} =$$

$$\sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m}(-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a^{\underline{1}(r)}}{b^{\underline{1}(s)}}\right)^{\lambda_1}\times$$

$$\ldots\times\left(\frac{a^{\underline{n}(r)}}{b^{\underline{n}(s)}}\right)^{\lambda_n}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$, а

$$a^{\underline{i}(r)} = a(a-r)(a-2r)\cdot\ldots\cdot(a-(n-1)r)$$

— спадний факторіальний степінь з кроком r.

Аналогічно встановлюється тотожність

$$pper(F^-) = \sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a^{\underline{1}(r)}}{b^{\underline{1}(s)}}\right)^{\lambda_1}\times$$

$$\ldots\times\left(\frac{a^{\underline{n}(r)}}{b^{\underline{n}(s)}}\right)^{\lambda_n}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

Знайдемо рекурентні співвідношення, які задовольняють многочлени розбиттів, задані парадетермінантами і параперманентами трикутних матриць F^+ і F^- . Позначимо:

$$ddet(F^+) = \Diamond^+_{n,m},\ pper(F^+) = \Box^+_{n,m},$$

і розкладемо парадетермінант і параперманент трикутної матриці F^+ за елементами останнього рядка, тоді отримаємо рекурентні рівності:

$$\Diamond^+_{n,m} = \frac{a^{\overline{1}(r)}}{b^{\overline{1}(s)}}x_1\Diamond^+_{n,m-1} - \frac{a^{\overline{2}(r)}}{b^{\overline{2}(s)}}x_2\Diamond^+_{n,m-2} + \ldots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{a^{\overline{n}(r)}}{b^{\overline{n}(s)}}x_n\Diamond^+_{n,m-n},$$

$$\Box^+_{n,m} = \frac{a^{\overline{1}(r)}}{b^{\overline{1}(s)}}x_1\Box^+_{n,m-1} + \frac{a^{\overline{2}(r)}}{b^{\overline{2}(s)}}x_2\Box^+_{n,m-2} + \ldots$$

$$+\frac{a^{\overline{n}(r)}}{b^{\overline{n}(s)}}x_n\Box^+_{n,m-n}.$$

Аналогічно, зробивши позначення:

$$ddet(F^-) = \Diamond^-_{n,m},\ pper(F^-) = \Box^-_{n,m},$$

можна отримати рекурсії

$$\Diamond^-_{n,m} = \frac{a^{\underline{1}(r)}}{b^{\underline{1}(s)}}x_1\Diamond^-_{n,m-1} - \frac{a^{\underline{2}(r)}}{b^{\underline{2}(s)}}x_2\Diamond^-_{n,m-2} + \ldots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{a^{\underline{n}(r)}}{b^{\underline{n}(s)}}x_n\Diamond^-_{n,m-n},$$

$$\Box^-_{n,m} = \frac{a^{\underline{1}(r)}}{b^{\underline{1}(s)}}x_1\Box^-_{n,m-1} + \frac{a^{\underline{2}(r)}}{b^{\underline{2}(s)}}x_2\Box^-_{n,m-2} + \ldots$$

$$+\frac{a^{\underline{n}(r)}}{b^{\underline{n}(s)}}x_n\Box^-_{n,m-n}.$$

Таким чином, ми приходимо до теореми:

Теорема 5. *Нехай K — деяке числове поле. Для трикутних матриць (9), (10) і параметрів a,b,r,s, числового поля K, справедливі тотожності:*

$$ddet(F^+) = \Diamond^+_{n,m} = \qquad (11)$$

$$= \sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m}(-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a^{\overline{1}(r)}}{b^{\overline{1}(s)}}\right)^{\lambda_1}\times$$

$$\ldots\times\left(\frac{a^{\overline{n}(r)}}{b^{\overline{n}(s)}}\right)^{\lambda_n}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

$$pper(F^+) = \Box^+_{n,m} = \qquad (12)$$

$$= \sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a^{\overline{1}(r)}}{b^{\overline{1}(s)}}\right)^{\lambda_1}\times$$

$$\ldots\times\left(\frac{a^{\overline{n}(r)}}{b^{\overline{n}(s)}}\right)^{\lambda_n}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

$$ddet(F^-) = \Diamond^-_{n,m} = \qquad (13)$$

$$= \sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m}(-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a^{\underline{1}(r)}}{b^{\underline{1}(s)}}\right)^{\lambda_1}\times$$

$$\ldots\times\left(\frac{a^{\underline{n}(r)}}{b^{\underline{n}(s)}}\right)^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

$$pper(F^-)=\Box^-_{n,m}= \tag{14}$$

$$=\sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a^{\underline{1}(r)}}{b^{\underline{1}(s)}}\right)^{\lambda_1}\times$$

$$\ldots\times\left(\frac{a^{\underline{n}(r)}}{b^{\underline{n}(s)}}\right)^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

і відповідні рекурентні співвідношення:

$$\lozenge^+_{n,m}=\frac{a^{\overline{1}(r)}}{b^{\overline{1}(s)}}x_1\lozenge^+_{n,m-1}-\frac{a^{\overline{2}(r)}}{b^{\overline{2}(s)}}x_2\lozenge^+_{n,m-2}+$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{a^{\overline{n}(r)}}{b^{\overline{n}(s)}}x_n\lozenge^+_{n,m-n},$$

$$\Box^+_{n,m}=\frac{a^{\overline{1}(r)}}{b^{\overline{1}(s)}}x_1\Box^+_{n,m-1}+\frac{a^{\overline{2}(r)}}{b^{\overline{2}(s)}}x_2\Box^+_{n,m-2}+$$

$$\ldots+\frac{a^{\overline{n}(r)}}{b^{\overline{n}(s)}}x_n\Box^+_{n,m-n},$$

$$\lozenge^-_{n,m}=\frac{a^{\underline{1}(r)}}{b^{\underline{1}(s)}}x_1\lozenge^-_{n,m-1}-\frac{a^{\underline{2}(r)}}{b^{\underline{2}(s)}}x_2\lozenge^-_{n,m-2}+$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{a^{\underline{n}(r)}}{b^{\underline{n}(s)}}x_n\lozenge^-_{n,m-n},$$

$$\Box^-_{n,m}=\frac{a^{\underline{1}(r)}}{b^{\underline{1}(s)}}x_1\Box^-_{n,m-1}+\frac{a^{\underline{2}(r)}}{b^{\underline{2}(s)}}x_2\Box^-_{n,m-2}+$$

$$\ldots+\frac{a^{\underline{n}(r)}}{b^{\underline{n}(s)}}x_n\Box^-_{n,m-n}.$$

При $m=n$ матриці F^+, F^- мають відповідно вигляд

$$F^+=\left(\frac{a+r(i-j)}{b+s(i-j)}\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n},$$

$$F^-=\left(\frac{a-r(i-j)}{b+s(i-j)}\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n},$$

причому сума у правих частинах тотожностей (11)–(14) обчислюється за всіма розбиттями $\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=n$.

Відзначимо, що тотожності (11)–(14) є узагальненнями тотожностей [7]:

$$\left[\frac{i-j+\delta_{ij}}{i-j+1}\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{1^{\lambda_1}\lambda_1!\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

$$\left[\frac{1}{i-j+1}\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{1!^{\lambda_1}\lambda_1!\cdot\ldots\cdot n!^{\lambda_n}\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}$$

і відповідних тотожностей для парадетермінантів цих трикутних матриць.

У [8] доведено справедливість тотожності

$$ddet\left(\frac{ai+bj+c}{i-j+1}\right)_n=\frac{na+nb+c}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(ib+c) \tag{15}$$

та при допомозі теореми 2 тотожність

$$\frac{na+nb+c}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(ib+c)=(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{na+kb+c}{n-k+1}+ \tag{16}$$

$$+\sum_{s=2}^{n}(-1)^{n+s}\frac{(s-1)a+(s-1)b+c}{(s-1)!}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{s-2}(ib+c)\prod_{k=s}^{n}\frac{na+kb+c}{n-k+1}.$$

При $a=r,b=-r,c=a$ і $a=-r,b=r,c=a$ тотожності (15) матимуть відповідно вигляд

$$ddet\left(\frac{a+r(i-j)}{i-j+1}\right)_n=\frac{a^{\underline{n}(r)}}{n!},$$

$$ddet\left(\frac{a-r(i-j)}{i-j+1}\right)_n=\frac{a^{\overline{n}(r)}}{n!}$$

а тотожність (16) — вигляд

$$\frac{a^{\underline{n}(r)}}{n!}=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i-1}\frac{a^{\underline{i}(r)}}{i!}\cdot\frac{a^{\overline{n-i}(r)}}{(n-i)!}.$$

$$\frac{a^{\overline{n}(r)}}{n!}=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i-1}\frac{a^{\overline{i}(r)}}{i!}\cdot\frac{a^{\underline{n-i}(r)}}{(n-i)!}.$$

З іншої сторони тотожність (11) у випадку $n=m$ і $s=1,b=1$ матиме вигляд

$$ddet\left(\frac{a+r(i-j)}{i-j+1}\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_n=$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a^{\overline{1}(r)}}{1!}\right)^{\lambda_1}\times$$

$$\ldots\times\left(\frac{a^{\overline{n}(r)}}{n!}\right)^{\lambda_n}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

а тотожність (13) — вигляд

$$ddet\left(\frac{a-r(i-j)}{i-j+1}\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_n=$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a^{\underline{1}(r)}}{1!}\right)^{\lambda_1}\times$$

$$\ldots\times\left(\frac{a^{\underline{n}(r)}}{n!}\right)^{\lambda_n}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}$$

Отже, у випадку $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$, справедлива наступна

Теорема 6. *Для довільних дійсних значень параметрів a і r справедливі тотожності:*

$$ddet\left(\frac{a+r(i-j)}{i-j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=\frac{a^{\underline{n}(r)}}{n!}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i-1}\frac{a^{\underline{i}(r)}}{i!}\cdot\frac{a^{\overline{n-i}(r)}}{(n-i)!}=$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a^{\overline{1}(r)}}{1!}\right)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a^{\overline{n}(r)}}{n!}\right)^{\lambda_n},$$

$$ddet\left(\frac{a-r(i-j)}{i-j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=\frac{a^{\overline{n}(r)}}{n!}=$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i-1}\frac{a^{\overline{i}(r)}}{i!}\cdot\frac{a^{\underline{n-i}(r)}}{(n-i)!}=$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\left(\frac{a^{\underline{1}(r)}}{1!}\right)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a^{\underline{n}(r)}}{n!}\right)^{\lambda_n}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Р.А. Заторський* Про паравизначники та параперманенти трикутних матриць. // Математичні студії. — 2002. — Т.17, №1. — С. 3 – 17.
2. *В.Е.Тараканов, Р.А. Заторский* О связи детерминантов с перманентами. // Матем. заметки, 85:2 (2009), 292-299.
3. *Р.А. Заторский* Определители треугольных матриц и траектории на диаграммах Ферре.//Математические заметки. — 2002. — Т.72, Вып.6 — С.834–852.
4. *Р.А. Заторський, І.М. Литвиненко* Застосування параперманентів до лінійних рекурентних рівнянь.//Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2008., №5. — с. 122-128.
5. *E.T. Bell* Partition polynomials // Ann. Math. - 1927. - **29**. - P. 38-46.
6. *Г.Эндрюс.* Теория разбиений: Пер. с англ. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 256 с.
7. *Р.А. Заторський* Парадетермінанти і многочлени розбиттів.// УМЖ 2008, т.60, №11. — с.1457–1469.
8. *Р.А. Заторський* Парафункції і комбінаторні тотожності. // Науковий вісник Чернівецького університету. Зб. наук. пр. Випуск 336-337. Математика. - Чернівці: ЧНУ, 2007. - с. 79-84.